Math. Un.
212 m – 1

Platt: 3. Theile 5 fl. 45 kr.
Lig. — . — . 42 — —
6 fl. 27 kr.

Graßman.

J. Gerstner.

J. Gerstner

<36636476680013

<36636476680013

Bayer. Staatsbibliothek

Anfangsgründe der Mathematik,

zum Gebrauch in Schulen und für Selbstlehrlinge.

Abgefasst von

M. A. von Winterfeld,
königl. preussischen Major.

Erster Teil,
welcher
die Anfangsgründe der Geometrie
enthält.

Zweite verbesserte Auflage.

Braunschweig
in der Schulbuchhandlung. 1800.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Gegenwärtige AnfangsGründe der Geometrie verdanken ihr Daseyn dem Unterrichte welchen ich meinem ältesten Sohn erteilte. Ehe ich ihm einen Saz erklärte sann ich auf faßlichen Vortrag, brachte das Resultat meines Nachdenkens zu Papiere, und machte den Versuch damit: wobei ich denn stets zu ändern, und nicht selten ganz umzuschmelzen nötig fand.

Diese kurze Nachricht von Entstehung meines Buchs war nicht überflüssig; denn sie zeigt den Nuzen und Gebrauch desselben. Ich hoffe, nämlich, durch meine Arbeit, Andern die ihrige erleichtert zu haben. Sie brauchen nun nicht, wie ich zu tuhn genötigt war, Tage lang auf schiklichen Vortrag eines Sazes zu sinnen; sondern dürfen sich nur bekant machen was schon ausgearbeitet da steht.

Ich habe mich der Gesprächs-LehrArt bedient; weil diese, wo sie Anwendung findet, unstreitig die zwekkmässigste ist. Keine Wissenschaften aber

sind mehr dazu geeignet als die Sittenlehre, und die MeßKunst: indem diese beiden, nicht wie die mehresten ihrer Schwestern, auf fremden Stamm gepfropft sind, und Kenntnisse voraussetzen, die erst mühsam ins Gedächtniß gepflanzt werden müssen: sondern alles aus sich selbst ziehn; sich auf Wahrheiten gründen, die schon in der Sele liegen, und welche, um ans Licht zu kommen, und Früchte zu tragen, nur guter Behandlung, und Pflege bedürfen. Nichts aber ist geschikter hierzu als Unterredung. Durch Fragen, durch Einwürfe, durch Folgerungen, oder andere künstliche Wendungen weis ein verständiger Lehrer aus der Sele des Lehrlings herauszulokken, was verborgen darin schlummerte; und der Lehrling wird zu gleicher Zeit belehrt und unterhalten, und vor Gedankenlosigkeit und Zerstreuung bewahrt. Auch ist diese LehrArt recht dazu geeignet, zur Deutlichkeit beizutragende Dinge mit einzuflechten, und Einwürfe und Schwirigkeiten vorzubeugen, oder sie, auf der Stelle, zu heben. Kurz, „wer nur einiger Massen MenschenVerstand hat, muß die Geometrie lernen, er mag wollen, oder nicht, wenn ich mich so ausdrukken darf.“ *)

In der Moral ist diese LehrArt schon seit Sokrates Zeit gebräuchlich. Eben derselbe hat, wenn

*) Sind Worte des Generals von Tempelhof, in einem Schreiben vom 18 Nov. 1799.

wenn anders Plato's Gespräche getreue Nachbildung der seinigen sind, auch in der Geometrie und Arithmetik kleine Versuche damit gemacht; aber, meines Wissens, bis zum Professor Michelsen, welcher in den Jahren 1781 bis 1784 Versuche in sokratischen Gesprächen, über die wichtigsten Gegenstände der Geometrie, und der Arithmetik herausgab, keinen Nachfolger darin gehabt. Michelsens Versuche aber haben die meinigen nicht unnütz gemacht: denn mein Buch solte ein Lehrbuch seyn, welches das michelsensche nicht ist, wie Jeder, der es einsehn will, nicht nur sich bald überzeugen wird, sondern er selbst auch eingesehn und gestanden hat. *)

Auf Michelsens Arbeit folgten Schweighäußer's Versuch eines sokratischen Vortrags der sogenanten fünf Species der Rechenkunst, in welchem ich aber, ausser den Anreden an die Lehrlinge, und einigen eingeschalteten Fragen, die entweder unbeantwortet bleiben, oder von dem Lehrer selbst beantwortet werden, nichts sokratisches finde. D. C. Möllers Anleitung zum Rechnen; in sokratischen Gesprächen, die kleinen Rechner, und vielleicht noch andre dieser Art, sind jünger als meine Arbeit.

*) Fortsetzung des Versuchs in sokratischen Gesprächen; Vorrede, S. II.

Man hat wider die sokratische LehrArt eingewandt, sie sei nur beim PrivatUnterrichte anwendbar, aber nicht bei öffentlichem. Allein die Erfahrung widerspricht dem. Ich kenne öffentliche Schulen, wo die Geometrie nach sokratischer Art gelehrt wird; und Prof. Michelsen, welcher selbst Lehrer an einer öffentlichen Anstalt war, versichert, daß dieser Einwurf entweder Mangel an eignen Versuchen, oder an dabei nötiger Herablassung, verrate. *)

Ein andrer Einwurf ist folgender. Man gibt zu daß die sokratische LehrArt zum mündlichen Unterrichte gut sei, nur zum schriftlichen, sagt man, tauge sie nicht; erstens, weil sie zu weitschweifig sei; und zweitens, weil die Antwort der Lehrlinge nicht immer so ausfalle wie sie geschrieben steht, wodurch dem Lehrer das Concept verrükkt werde, und sein Vortrag eine andre Wendung erhalte als die vorgezeichnete.

Auf den Vorwurf der Weitschweifigkeiten dient zur Antwort, daß man sokratisch, und dennoch gedrängt; und im GegenTeil unsokratisch, und sehr weitschweifig schreiben könne. So haben, z. B. Kästner, Herr von Segner, der Abt

Hä=

*) Beiträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik, Band I. S. 146.

Häseler, und der Abbé Deidier die Rechen-Kunst, der Erste auf 31, der Zweite auf 49, der Dritte auf 55, der Vierte gar auf 100 Bogen unsokratisch abgehandelt; wogegen mein sokratischer Vortrag nur 24 füllt. Mit der Geometrie bin ich zwar noch nicht fertig; doch ist abzusehn, daß ich auch dazu weit weniger Papier verbrauchen werde als die jezt genanten Autoren dazu gebraucht haben. Die welche sich kürzer gefasst haben, wie Kästner, Lorenz rc. haben nur Compendien geschrieben um darüber zu lesen.

Den zweiten Einwurf, die Antworten betreffend, erwiedere ich: Sie sind gröstentheils so eingerichtet daß sie nicht wol anders ausfallen können, nämlich dem Sinne nach; denn daß es auf Worte dabei nicht ankömt, versteht sich von selbst. Freilich seze ich, zu Vermeidung unabsehlicher Weitläuftigkeiten, oft voraus, daß der Lehrling alles Vorhergegangene wohl gefasst, und gegenwärtig habe; welches allerdings nicht immer der Fall seyn wird. Der Lehrer kan sich aber sehr helfen, wenn er so oft er zu einem neuen Satze übergeht, erst alle dazu erfoderliche Lehren von denen er fürchtet daß sie den Lehrlingen entfallen seyn möchten, wieder in Erinnerung bringt. Hat er der Schüler mehre, so wird, was dem einen entfallen ist, doch dem andern im Andenken seyn, und nicht leicht

eine Frage unbeantwortet bleiben. Wird noch überdies darauf gehalten daß die Schüler sich auf den Vortrag des Lehrers vorbereiten, so verschwindet die Schwirigkeit fast gänzlich. Solte aber, wider Vermuten, die Antwort dennoch einmal stekken bleiben, oder unrichtig ausfallen; so wird das einen geschikkten Lehrer nicht sehr in Verlegenheit sezen: sondern er wird durch eine anders eingekleidete Frage, durch Einwürfe und Folgerungen, 2c. die Schüler von der Unrichtigkeit ihrer Antwort zu überführen, und eine richtigere von ihnen herauszulokken wissen. Und gesezt dies Alles würde vergebens versucht; so bleibt ihm noch das lezte, aber unfehlbare Mittel übrig, den Schülern die Antwort einzugeben: welcher Fall aber da wo es dem Lehrer weder an Geschikklichkeit, noch an Gedult fehlt, nur selten eintreten wird. Und endlich ist auch gar nicht nötig daß der Unterricht aus offenem Buche geschehe. Nach meiner Erfahrung geht er am besten von Statten, wenn der Lehrer, nachdem er sich auf seinen Vortrag wohl vorbereitet hat, das Buch zumacht — Will man sagen, auf solche Bedingung sei meine sokratische Einkleidung unnüz? so dient zur Antwort: Ich muste doch Muster und Probe geben, und dazu sind ein par sokratisch behandelte Säze nicht hinlänglich; denn die Sache lernt sich so geschwinde nicht; und es ist immer gut Muster nicht nur zur Nachahmung, sondern auch zur Be-

Berichtigung und Verbesserung vor sich zu haben. Mancher der es schlechter gemacht hätte als ich, wird es nun, da ich ihm vorgearbeitet habe, besser machen: denn inuentis facile est addere; und wer auf eines Andern Schultern steht, sieht weiter als der auf der Erde stehende. Auch können Selbstlehrlinge von diesem Vorschlage keinen Gebrauch machen; und von Lehrern die es könten, ist ungewiß ob alle ihn annehmen werden.

Meine HauptFührer sind Euklides und Kästner gewesen; doch bin ich auch zuweilen von ihnen abgewichen, und entweder Andern gefolgt, oder meinen eignen Weg gegangen, wie in der Lehre von den gleichlaufenden Linien. Deutlichkeit und Ueberzeugung waren meine HauptZwekke. Daher bin ich ausführlich und strenge im Beweisen. Um das Gedächtniß nicht gleich Anfangs zu überhäufen schikke ich nur die unentbehrlichen Erklärungen, deren Möglichkeit von selbst in die Augen leuchtet, voran, und lasse die andern zurükk bis da wo sie gebraucht werden; wo ich dan die Aufgabe welche die Möglichkeit zeigt, mit der Erklärung verbinde, und jene dieser vorausschikke; welches mir natürlicher scheint, als die gewöhnliche Art, nach welcher alle Erklärungen ohne Unterschied den VorderZug machen, und hinterher, wan man sie schon vergessen hat, erst ihre Möglichkeit erwiesen wird. Aus gleichen Ursachen ordne ich die GrundSätze, welche Folgen von Erklärungen

 sind

sind, gleich hinter die Erklärung aus denen sie fliessen. Nicht nur der Deutlichkeit wegen, sondern auch um sich besser zurecht zu finden, habe ich, nicht wie Michelsen, die Säze in einander gemischt; sondern sie gehörig bezeichnet, und gezählt; ja um öftere RuhePunkte zu haben, ist oft ein euklidischer Saz in zwei, ja drei Säze zerschnitten: auch sind, der Anführungen wegen, die eigentlichen Säze, von den Auflösungen und Beweisen, durch grössere Schrift unterschieden.

Da zu völliger Einsicht der Geometrie auch Kentniß ihrer LehrArt erfodert wird; so habe ich auch darauf an Ort und Stelle Rükksicht genommen. Anfänger, und Alle denen an oberflächlicher Kentniß genügt, können dieses, so wie alles mit kleinerer Schrift gedrukte überschlagen.

Dieser erste Teil meiner Geometrie enthält, das erste, dritte und vierte Buch des Euklides; und zwar so daß das erste, von mir in zwei Bücher zerschnitten ist; das dritte und vierte aber in eins zusammen gezogen sind. Euklidens zweites Buch habe ich übergangen, weil man die Lehren desselben durch die Analysis leichter und geschwinder erlernt, und dadurch Zeit für andre nüzliche Dinge erspart: worauf RükkSicht zu nehmen mir, da es der zu lernenden

Din-

Dinge in unsern Tagen viele gibt, sehr wesentlich scheint.

Die Anwendung mit der Theorie zu verbinden, wie Dechales, Wolf, und Andere getan haben, hielt ich nicht ratsam, weil es den ZusammenHang zu sehr unterbricht, und nicht selten Kentnisse aus andern Wissenschaften voraussezt, die man von Lehrlingen nicht fodern darf. Der folgende Teil wird indessen in einem besondern Buche, die Anwendung der Geometrie auf das FeldMessen zeigen.

Professor Michelsen ist der Meinung, man könne sieben bis achtjährige Kinder schon in der Geometrie unterrichten, und sagt, er habe selbst einst ein sechsjähriges Kind mit Vorteil darin unterwiesen. *) Ungeachtet ich ihm zugestehe, daß unter allen Wissenschaften, die Geometrie gehörig vorgetragen der jugendlichen FassungsKraft am angemessensten sei; bin ich doch der Meinung daß wer seine Ungeduld bis zum zwölften Jahre beschränken kan, sich für diesen Aufschub, durch die schnellern FortSchritte des Lehrlings reichlich entschädigt sehen werde. Eine HauptRegel der Erziehung ist, Zeit zu verlieren zu wissen, um welche zu gewinnen. **)

Oh-

*) Erste Fortsetzung seiner Versuche, Vorrede, S. III.

**) La plus grande, la plus importante, la plus utile regle de toute l'éducation n'est pas de gagner

Ohne Aufmerksamkeit fruchtet kein Unterricht, am allerwenigsten in der Geometrie, die ganz Sache des Verstandes ist. Ein Haupt-Mittel diese zu erregen ist, wie ich schon gesagt habe, die Gesprächs-LehrArt. Aber kein Erwachsener ist einer lange anhaltenden Anstrengung fähig; noch weit weniger also darf man diese von Kindern fodern, wenn man ihren Verstand, anstat ihn aufzuheitern, nicht stumpf machen, und ihnen gegen die zu lehrende Sache Abscheu und Widerwillen erregen will. Daher rate ich abzubrechen sobald die Aufmerksamkeit anfängt zu ermüden, und wäre es in der Mitte eines Satzes. Beim PrivatUnterricht hat dieses keine Schwirigkeit; beim öffentlichen aber, nach Stunden zugeschnittenen, muß der Lehrer durch Wiederholung, durch Zeichnen, durchDictiren, und durch andre zweckmässige, jedoch mindere Anstrengung fodernde Mittel, die Stunde zu füllen suchen.

Ein den Anfängern gewöhnlicher Fehler, der aber auch Geübtern, bei nicht gespanter Aufmerksamkeit, begegnen kan, ist, das Voraus Gesetzte und Bekante, mit dem zu suchenden Unbekanten zu verwechseln. Diesem Uebel vorzubeugen kenne ich drei Mittel.

Das

gagner du tems, c'est d'en perdre, (Emile, par J. J. Rousseau, livre II).

Das erste ist das eigne Zeichnen der Figuren. Dadurch drükkt sich nicht nur alles besser ein, und das Gegebne unterscheidet sich von selbst von dem Gesuchten; sondern man erreicht auch noch ein par NebenZwekke: Unterhaltung und Geschiklichkeit im Zeichnen.

Hiernächst muß man die bekanten Seiten und Winkel bezeichnen: erste durch kleine Querstriche, oder andre MerkMale; lezte durch kleine Bögen zwischen ihren Schenkeln. Bei § 56 sind Beispiele von beiden zu sehen.

Endlich, drittens, muß gleich nach vollendeter Zeichnung, oder auch während derselben, das Bekante aufgesucht, und aufgeschrieben werden. Und dieses wird fortgesezt: das heisst, sobald man in der Folge etwas durch Schlüsse herausbringt, wird es dem Bekanten zugesellt, und zugleich bezeichnet. Der Lehrer, wenn er der Schüler mehre hat, zeichnet und schreibt an eine grosse an der Wand hangende Tafel, die Lehrlinge aber zeichnen und schreiben, Jeder für sich, auf Papier, oder auf SchieferTafeln. Die Zeichnungen können zum Behuf der Anführungen, mit der ParagraphenZahl bemerkt werden. Auch können des Schreibens schon kundige Schüler noch überdis, die Säze, ohne Auflösung und Beweis, dazu schreiben. Der Nuzen hiervon wird mehrfach seyn, zumal

wenn

wenn das Gezeichnete und Aufgeschriebene vom Lehrer nachgesehn und berichtigt, in den Frei-Stunden aber von den Schülern ins Reine gebracht wird.

Noch ein BeförderungsMittel der Verständlichkeit ist das Illuminiren der Figuren, wenn es mit Einsicht geschiht. So könte man z. B., in der zum pythagorischen LehrSatze gehörigen Zeichnung, (§160), die Parallelogrammen M und m gelb, die N und n rot; die zum Beweise erfoderten DreiEkke aber noch überdies mit blasser Tusche überziehn. Es sind Exemplare mit illuminirten Zeichnungen zu haben.

Diejenigen welche sich dieses Buchs zum SelbstUnterrichte bedienen wollen, müssen sich eben so wenig verdriessen lassen die Zeichnungen selbst zu verfertigen. Auch rate ich ihnen, auf jede Frage des Lehrers, ehe sie die darunter stehende Antwort lesen, erst selbst eine Antwort zu suchen.

Fragt man: womit der Anfang zu machen sei? Ob mit der Arithmetik, oder mit der Geometrie? so bin ich der Meinung, daß es am füglichsten mit der Geometrie geschehe: denn die beiden ersten Bücher setzen keine ZahlenKentniß voraus, als die man bei zwölf bis vierzehnjährigen Kindern, die keinen wissenschaftlichen arithmetischen Unterricht erhalten haben,

ben, sondern nur Ziffern kennen, und leichte KopfRechnungen zu machen wissen, findet. Man kan also mit der Geometrie den Anfang machen. Dabei muß man es so genau nicht nehmen, wenn auch beim ersten Cursus nicht alles ganz genau gefasst wird. Ist man ans Ende des ersten Buchs gekommen; so kan mans mit der RechenKunst versuchen. Stösst man auf Schwirigkeiten, und will es damit nicht weiter; so fange man die Geometrie von vorn an. Es wird nun schon besser gehn als zum ersten Mal, und man kan jezt das Ende des zweiten Buchs zu erreichen suchen; dan wieder zur Arithmetik, und von dieser zur Geometrie zurükk kehren; und so immer abwechseln, oder auch beide zugleich treiben. — Dieses ist der Weg den ich selbst befolgt habe, und also aus eigner Erfahrung empfehlen kan.

* * *

Bei dieser neuen Ausgabe erscheint das Buch ganz umgearbeitet. Ich habe zusammen gezogen, erweitert, weggeschnitten, eingeschaltet, versezt u. s. w., nach den Umständen und hoffe es dadurch brauchbarer, und des erhaltenen Beifalls würdiger gemacht zu haben. Auch sind grösserer Bequemlichkeit wegen, die Zeichnungen,

so

so wie ich es schon bei der ersten Auflage gewünscht hatte, dem Texte einverleibt worden. — Was sonst noch zu erinnern seyn möchte, ist an Ort und Stelle geschehn.

Niden in der UkerMark, den 23 Febr. 1800.

Geometrie.

Erstes Buch.

Einleitung. § 1 = = 50.
Von der geometrischen LehrArt. § 51 = = 53.
Von DreiEkken, Winkeln, und Linien. § 54 b. E.

Einleitung.

§ 1.

L. Was Ausdehnung nach allen Richtungen, oder Länge, Breite, und Höhe, oder Dikke, hat, heisst ein Körper. — Was ist nun dieser Tisch? Ist er ein Körper, oder nicht?

S. Er ist allerdings ein Körper, denn er hat Länge, Breite und Dikke.

L. Und das Glas?

S. Ebenfalls?

L. Aber ein dünnes Blatt Papier, wie ist es damit?

S. Es hat nicht nur Länge und Breite, sondern auch Dikke, obgleich nur geringe, und ist also auch ein Körper.

L. Daß das dünnste Blatt wirklich Dikke hat, erhellt nicht nur daraus, daß man es zwischen den Fingern fühlen kan; sondern auch, daß mehre Blätter auf einander gelegt, ein Buch ausmachen. — Aber wie ist es mit dem leren Raum? Ein leres Zimmer, z. B., ist das auch ein Körper?

S. Es ist wenigstens mit Luft erfüllt, die für einen Körper gelten kan.

L. Das ist wahr. Aber ein luftlerer Raum, voraus gesetzt, daß dergleichen möglich sei, was wäre der?

S. Das weis ich nicht.

L. Hat der lere Raum nicht Ausdehnung nach allen Seiten? nicht Länge, Breite, Höhe?

S. Allerdings.

L. Was fehlt ihm also zu einem Körper?

S. Nichts.

L. Also auch der luftlere Raum ist ein geometrischer Körper. Man muß aber den geometrischen Körper nicht mit dem physischen verwechseln, der kein lerer, sondern ein voller Raum ist.

§ 2.

L. Das Aeusserste oder die Grenzen der Körper, heissen Flächen. — Haben Flächen auch Ausdehnung.

S. Länge und Breite müssen sie wenigstens haben.

L. Aber wie ist es mit der Dikke?

S. Wenn sie die hätten, so wären sie Körper.

L.

L. Recht! Flächen haben nur Länge und Breite, aber keine Dikke. Sie sind dem Schatten zu vergleichen.

§ 3.

L. So wie Körper Grenzen haben welche Flächen heissen, so haben Flächen wieder ihre Grenzen die man Linien nennt. Welche Ausdehnung können diese wol haben?

S. Da Flächen nur Länge und Breite haben; so bleibt für die Linien keine Ausdehnung übrig als blosse Länge. Denn hätten die Linien auch Breite, so wären sie Flächen. (§ 2).

§ 4.

L. Die Grenzen der Linie heissen Punkte. Welche Ausdehnung bleibt diesen übrig?

S. Keine. Da Linien nur bloß Länge haben, so bleibt den Punkten gar keine Ausdehnung übrig?

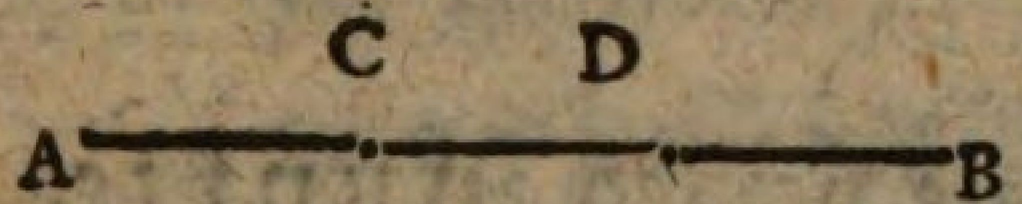
L. Es ist richtig; ein Punkt hat gar keine Ausdehnung. Hätte er Länge, so wäre er Linie; hätte er Breite, so wäre er Fläche; hätte er Dikke, so wäre er Körper.

§ 5.

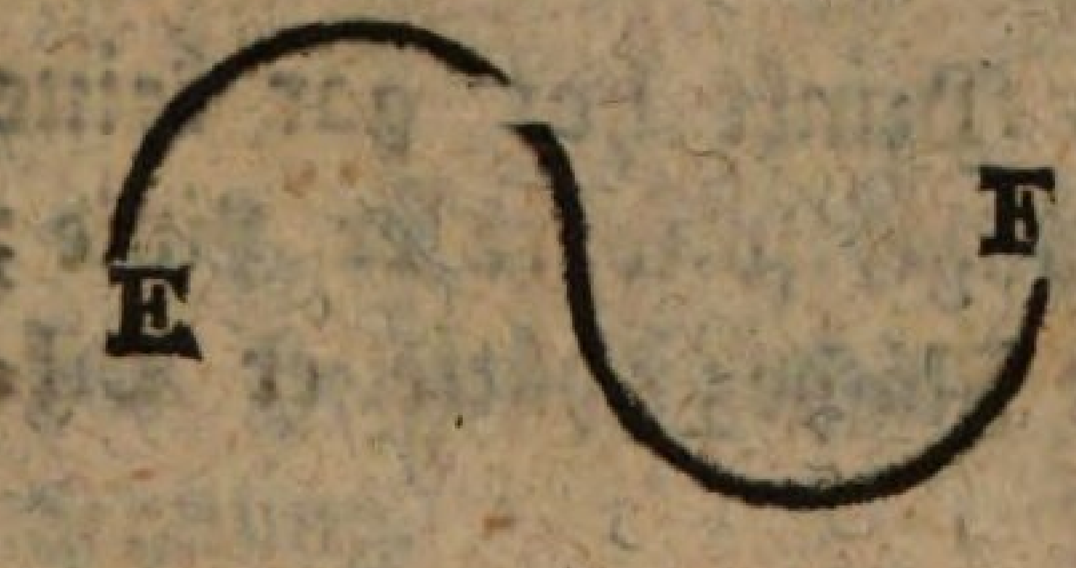
L. An und für sich, oder abgesondert, lässt sich kein geometrischer Punkt zeichnen, oder darstellen. Denn wenn man's auch auf's sauberste bewerkstelligte;

te; so würde er doch, wenn er solte sichtbar werden, nicht bloß Länge und Breite, sondern sogar Dikke erhalten, müssen, und folglich ein Körper seyn. Und eben so ist es mit Linien. Sie lassen sich ohne Flächen, deren Grenzen sie sind, nicht denken. Wenn man daher Linien mit der Reißfeder, oder einem andern WerkZeuge, zieht; so sind das nicht wahre geometrische Linien, sondern nur Bilder derselben, und zwar sehr ungetreue Bilder, welche, stat Linien, Körper darstellen. Mit einem Worte: Wo ein Körper ist, da sind auch Flächen, Linien, und Punkte; aber ohne Körper sind dergleichen nur denkbar, aber nicht wirklich, oder ausführbar.

§ 6.



L. Eine Linie AB, deren Teile AC, CD, DB, alle einerlei Richtung haben, oder auf einen Punkt B hinweisen, heisst eine gerade Linie. Eine Linie EF aber,



von der kein Teil gerade ist, das heisst, auf welcher sich nicht zwei Punkte angeben lassen, sie mögen so nahe an einander liegen als sie wollen, zwischen denen nicht andre sind, die mit den ersten nicht in gerader Richtung liegen, heisst eine krumme Linie. —

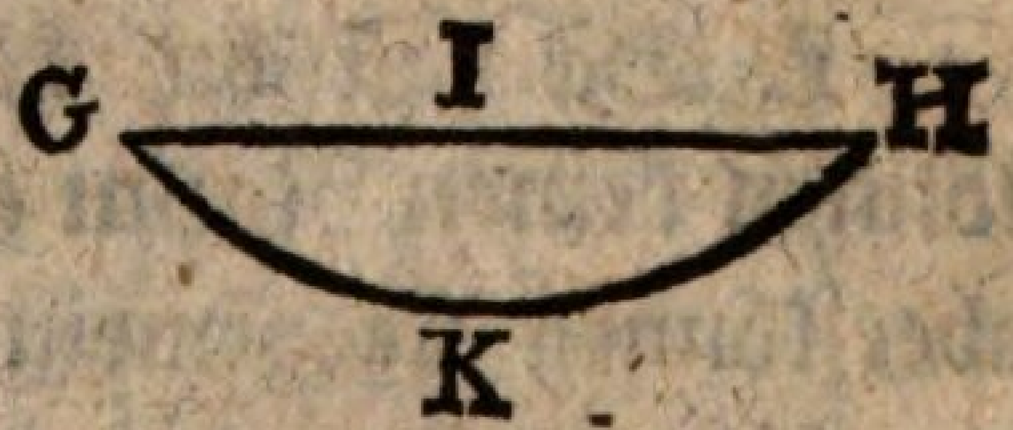
§ 7.

L. Von einem gegebenen Punkte zum andern kan nicht nur eine gerade Linie gezogen, sondern sie kan auch, in eben der Richtung, zu beiden Seiten, nach Willkühr verlängert werden. — Ist das richtig?

S. Nein. Es kan keine geometrische gezogen werden. (§ 5).

L. Das ist wahr. Da man indessen der Linien nicht entbehren kan; so ist man genötigt sich mit dem unvollkommenen Bilde einer mit Tinte, Tusch, oder Bleistift, nach einem Lineal gezogenen Linie zu begnügen, und es für eine geometrische gerade Linie anzunehmen.

§ 8.



L. Von einem Punkte G, zum andern H, also, kan eine gerade Linie GIH gezogen werden (§ 7). Aber solte es nicht möglich seyn, von G nach H noch eine zweite gerade Linie GKH zu ziehn?

S. Nein.

L. Warum nicht?

S. Da alle Teile der Linie GIH einerlei Richtung haben und nach H hinweisen; so können die Teile von GKH, welche von GIH abweichen, unmöglich eben die Richtung haben.

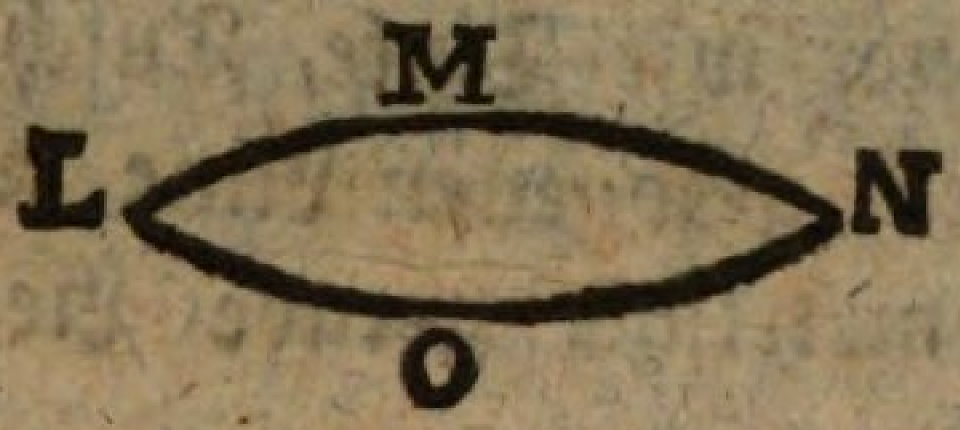
L. Ganz recht! Wie viel gerade Linien also können von einem Punkte zum andern gezogen werden?

S. Nicht mehr als eine.

L. Von einem Punkte zum andern also ist nur eine gerade Linie möglich, ist ein GrundSatz den wir uns einprägen müssen, weil wir ihn oft brauchen werden.

§ 9.

L. Können zwei gerade Linien LMN, und LON, wol einen Raum LMNOL einschliessen, oder rund um begrenzen?

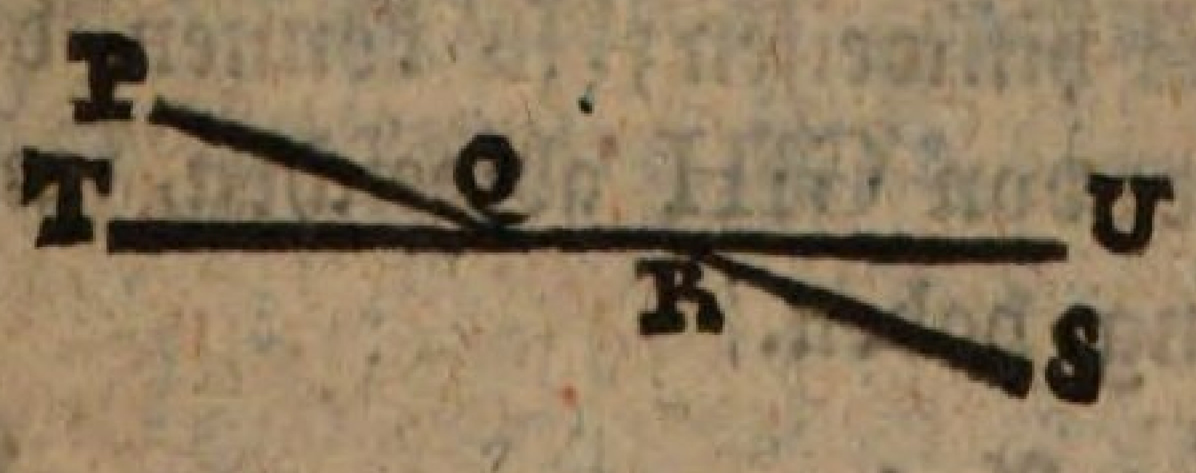


S. Nein, dan müsten von L nach N zwei gerade Linien möglich seyn, welches dem eben angenommenen GrundSatze (§ 8) widerspricht.

L. Da hast du Recht. Zwei gerade Linien können keinen Raum einschliessen. Wie viel Punkte aber können sie gemein haben? In wie viel Punkten können sie zusammen treffen?

S. Wol in nicht mehr als in einem.

L. Recht! Denn träfen sie in zwei Punkten zusammen, so müsten sie zwischen diesen Punkten entweder aus einander gehn, wie LMN und LON, oder zusammen bleiben, wie PQRS und TQRU.



Im ersten Fall, schlössen sie einen Raum, LMNOL ein, welches nicht möglich ist (§ 8);

und

und im zweiten, da sie zusammen blieben, müste wenigstens eine von ihnen, PQRS ihre Richtung ändern, bald mit der andern gehn, in QR, bald wieder von ihr abweichen, in RS; welches, dem Begriff einer geraden Linie, die immer einerlei Richtung behalten muß, (§ 6) widerspricht. Zwei gerade linien, also, können nicht mehr als einen Punkt x gemein haben: Sobald sie in mehr als einem Punkte zusammen treffen, so fallen sie ganz zusammen, und machen nur eine einzige Linie.

§ 10.

L. Zwei gerade Linien also können keinen Raum einschliessen: aber kan es eine einzige?

S. Eben so wenig.

L. Eine linie YZ also, die einen Raum einschliesst = = ?

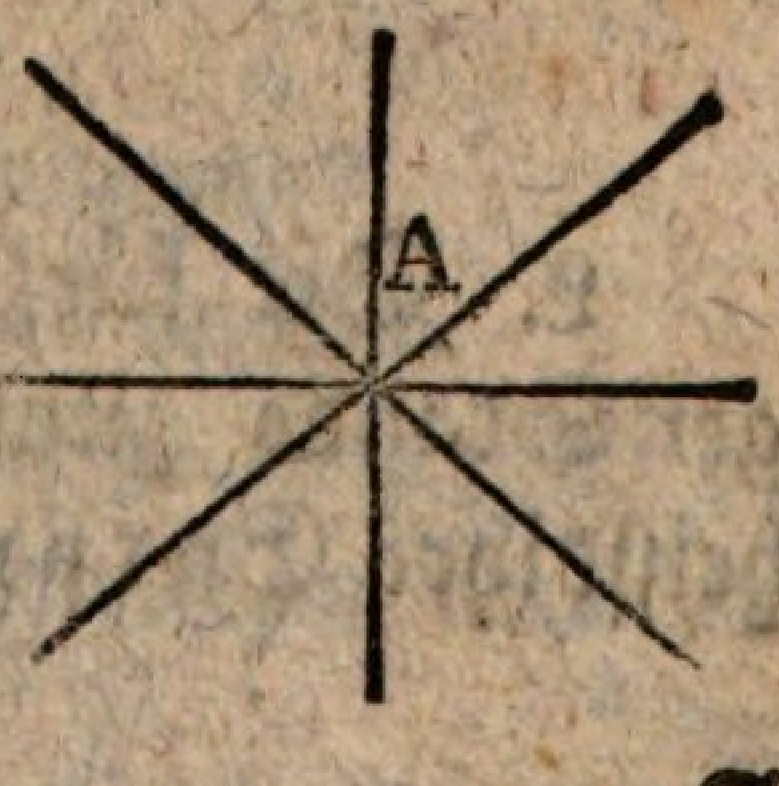
S. Ist krumm.

§ 11.

L. Wie viel gerade Linien lassen sich durch einen Punkt A ziehn?

S. So viele man will?

L. Und nach welchen Richtungen?



S. Nach allen möglichen.

L. Aber durch zwei Punkte B und C, wie viel

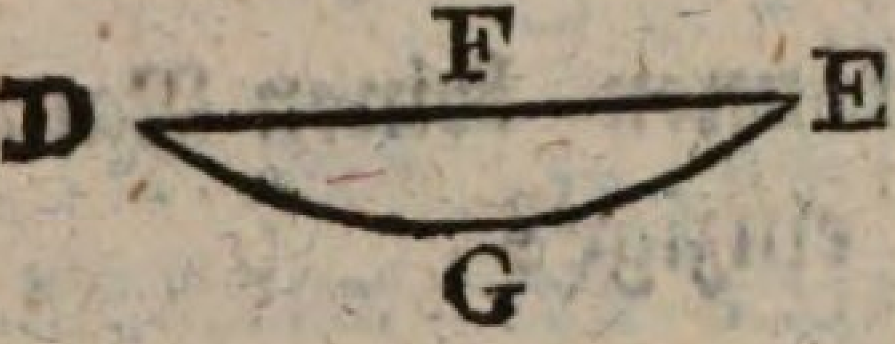
gerade Linien laſſen ſich da ziehn?

S. Nicht mehr als eine (§ 8).

L. Zwei Punkte alſo beſtimmen die Lage oder die Richtung, einer geraden Linie; durch einen Punkt aber laſſen ſich ſo viel gerade Linien ziehn, als man will und nach allen möglichen Richtungen.

§ 12.

L. Von einem Punkte D, zum andern E, wollen wir zwei Linien ziehn: eine gerade DFE, und eine krumme DGE. Welche von beiden iſt die kürzeſte? Die gerade, oder die krumme?



S. Die gerade.

L. Recht! Da die krumme durch einen Umweg von D nach E geht; ſo würde ſie, wenn man ſie ausrekkte, über ihre EndPunkte D und E hinaus reichen, wie dieſer Faden. Die gerade Linie alſo iſt der kürzeſte Weg von einem Punkte zum andern.

§ 13.

L. Die kürzeſte Linie welche von einem GegenStande zum andern kan gezogen werden, heiſſt ihre Entfernung von einander. Durch welche

che Linie also wird die Entfernung gemessen? Durch eine gerade, oder eine krumme?

S. Durch eine gerade. (§ 12).

§ 14.

L. Hier auf dieser Tafel, oder auf diesem Tische, lassen sich zwischen jeden zwei Punkten, wir mögen sie annehmen wo wir wollen, gerade Linien ziehn. Was für eine Fläche ist nun die Oberfläche des Tisches, oder der Tafel? Eine ebene, oder eine unebene? Eine gerade oder eine krumme?

S. Eine ebene, oder gerade Fläche?

L. Aber auf den Seiten dieses runden Glases, oder auf dem Schnitte dieses Buchs, lassen sich da auch gerade Linien ziehn?

S. Gerade auch wol, aber nicht seitwärts oder schräge.

L. Also nicht nach allen Richtungen. Was für Flächen sind diese?

S. Ungerade, oder krumme Flächen.

L. Da haben wir also die Erklärung gerader und ungerader Flächen. Was ist eine gerade Fläche?

S. Eine **gerade** Fläche ist, auf der sich zwischen jeden zwei Punkten eine gerade linie ziehn lässt.

L. Und eine ungerade, oder krumme?

S. Ist, wo dieses nicht überall angeht.

L. Diese letzte Erklärung ist nicht bestimmt genug, denn sie passt auch auf vermischte oder aus ge-

geraden und ungeraden Teilen zusammen gesetzte Flächen. Wie würde sie bestimmter lauten?

S. Eine ungerade Fläche ist, auf welcher kein Teil der eben wäre, anzutreffen ist.

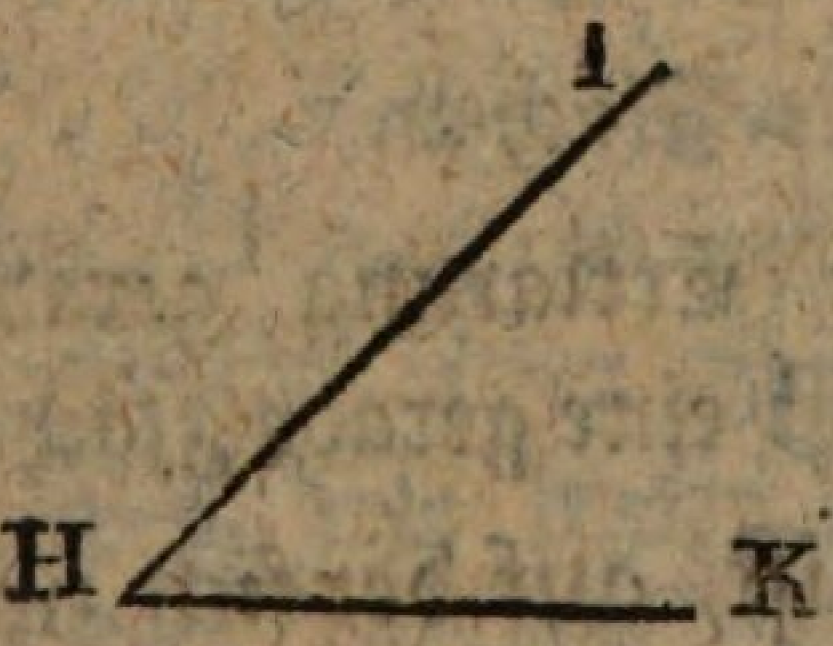
L. So ist sie genauer. — Wir haben künftig, bis es anders verabredet wird, mit lauter geraden und ebenen Flächen, die man auch schlechtweg Ebenen nennt, zu tuhn.

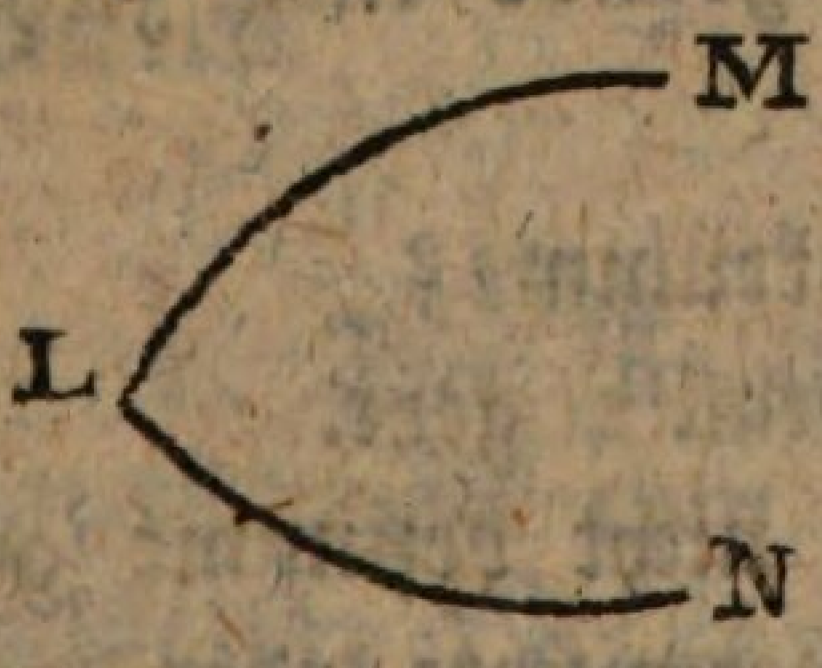
§ 15.

In der Natur gibt es vielleicht so wenig ganz ebene oder glatte Flächen, als es Linien ohne Breite, (§ 7) und unteilbare Punkte (§ 4) gibt: indem auch der polirteste Stahl, und der geschliffenste Diamant, unter dem VergrösserungsGlase ansehnliche Unebenheiten zeigen: aber der Verstand kan sich ebene Flächen, und gerade Linien denken, und das genügt dem Geometer.

§ 16.

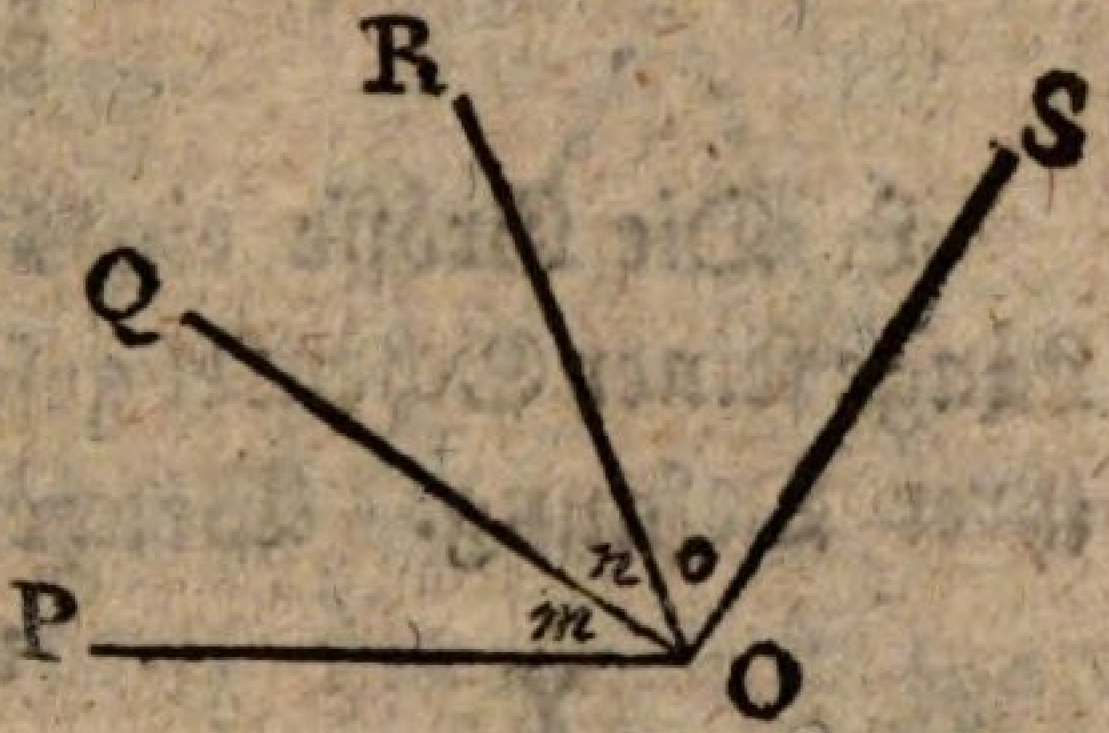
L. Zwei Linien, die in einem Punkt zusammenstossen, bilden einen Winkel. Sind die Linien gerade, wie HI und HK, so ist der Winkel geradlinig; sind sie krumm, wie LM und LN, so ist er krummlinig. Die Linien HI und HK, LM und LN heissen Schenkel. Die Punkte H und L aber, wo die Schenkel zusammentreffen, heissen Spitzen oder +Scheitel der Winkel. Man ~~bemerkt~~ einen Winkel durch den an seiner Spitze befindlichen Buchsta-





+ krumm

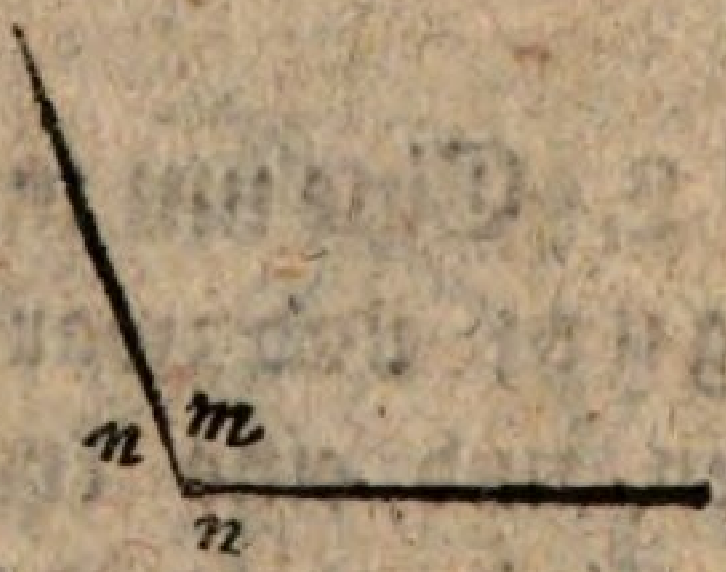
staben M. Haben zwei oder mehr Winkel einen gemeinschaftlichen ScheitelPunkt O; so braucht man drei Buchstaben zur Benennung und Unterscheidung eines jeden derselben: wobei es gleichgültig ist, welchen der beiden äussern Buchstaben man zuerst nennt, wenn



nur der an der Spitze stehende in die Mitte kömt: POQ, oder QOP; QOR oder ROQ; ROS, oder SOR. Durch kleine zwischen die Schenkel geschriebene Buchstaben m, n, o, wird diese Unbequemlichkeit drei Buchstaben zu Benennung eines Winkels zu brauchen, gehoben. Wir wollen, unter dem an der Spitze stehenden Buchstaben O, alle daselbst zusammen stossende Winkel, m, n und o, zusammen verstanden wissen.

§ 17.

1. Eigentlich bilden zwei zusammen stossende Linien zwei Winkel, nämlich einen m innerhalb ihrer Schenkel, und einen andern n, ausserhalb derselben. Der erste m heisst ein hohler, der zweite nn, ein erhabener Winkel. Euklides, und mit ihm die mehresten Lehrer der Geometrie, erwähnen des erhabenen Winkels entweder gar nicht, oder nur zufällig, ungeachtet



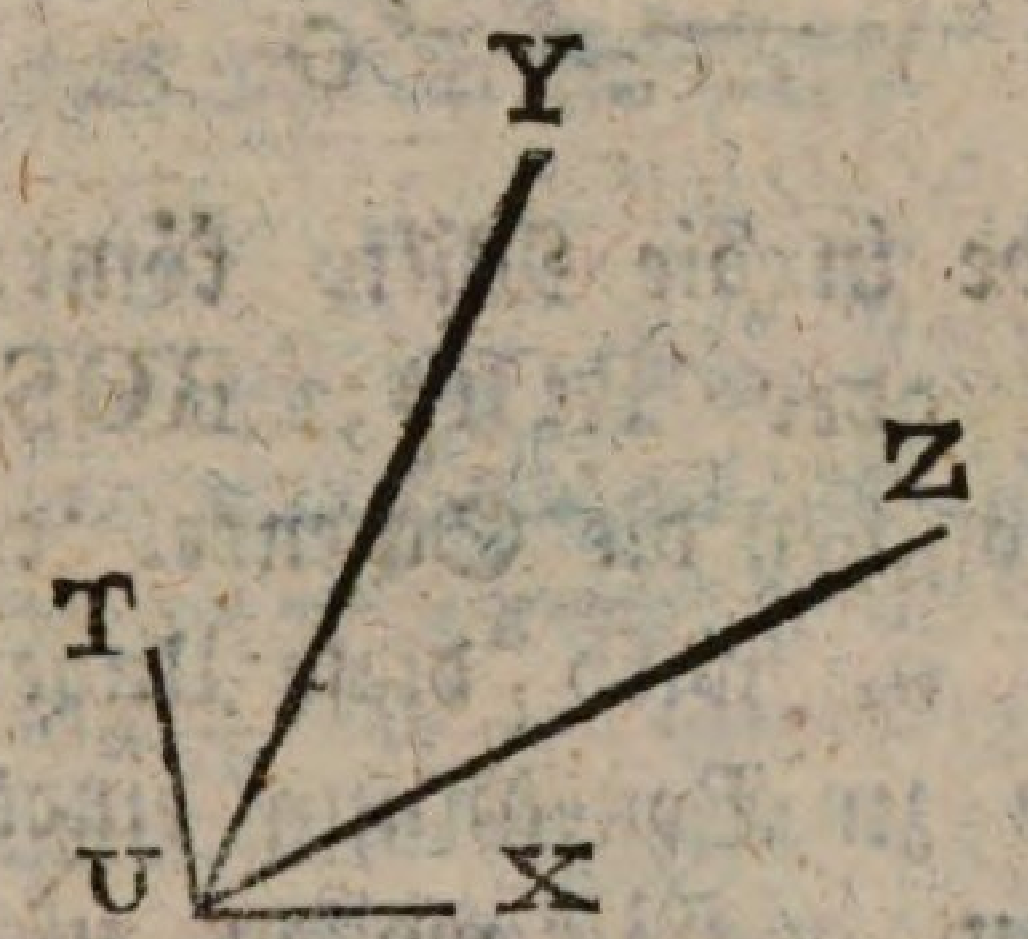
er in der Geometrie unentbehrlich ist, wie wir in der Folge sehen werden. Mir wenigstens ist ausser Voigts Grund-

Lehren

Lehren der reinen Mathematik kein LehrBuch bekant, welches den erhabenen Winkel alle seine Rechte angedeihen liesse.

§ 18.

L. Die Grösse eines Winkels wird nicht nach der Länge seiner Schenkel geschätzt, sondern nach der Weite ihrer Oefnung. Welcher der beiden Winkel TUX und YUZ ist dem zufolge der gröste?



S. Der Winkel TUX.

L. Solte nicht die Oefnung YZ grösser seyn, als die TX?

S. An der Mündung wol; aber man muß, wenn man die Grösse der Winkel vergleichen will, in beiden Winkeln, die Weite der Oefnung, in gleicher Entfernung vom ScheitelPunkte U messen.

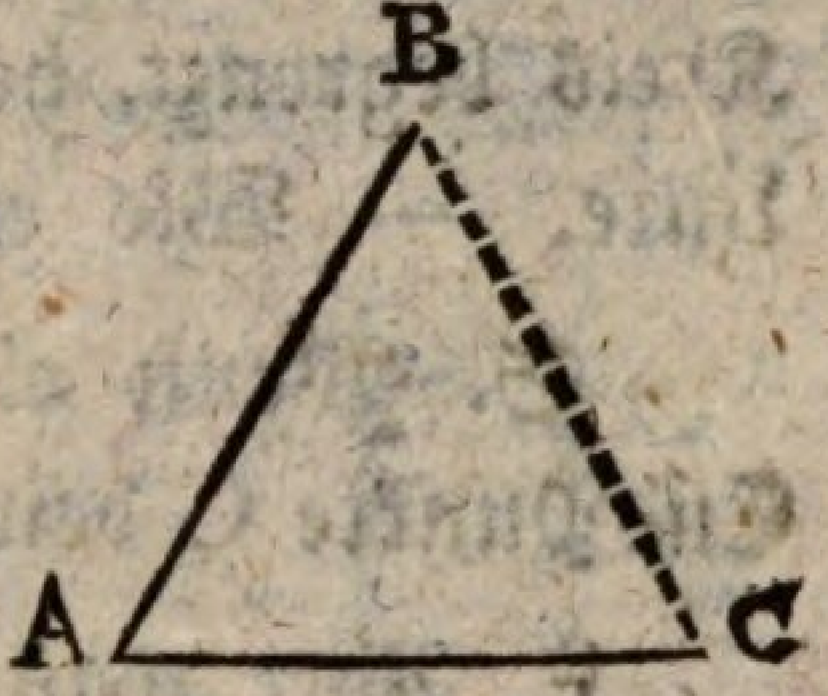
L. Das ist richtig. Und durch Verlängerung der Schenkel, gewinnt ein Winkel nichts an Grösse, so wie er, umgekehrt, durch Verkürzung derselben nichts verliert.

§ 19.

L. Eine um und um begrenzte Fläche heißt eine Figur; und zwar eine geradlinige, wenn sie von geraden, und eine krummlinige, wenn sie von krummen Linien begrenzt wird. — Wie viel gerade Linien werden erfordert eine Fläche einzuschliessen? Sind zweie hinlänglich?

S.

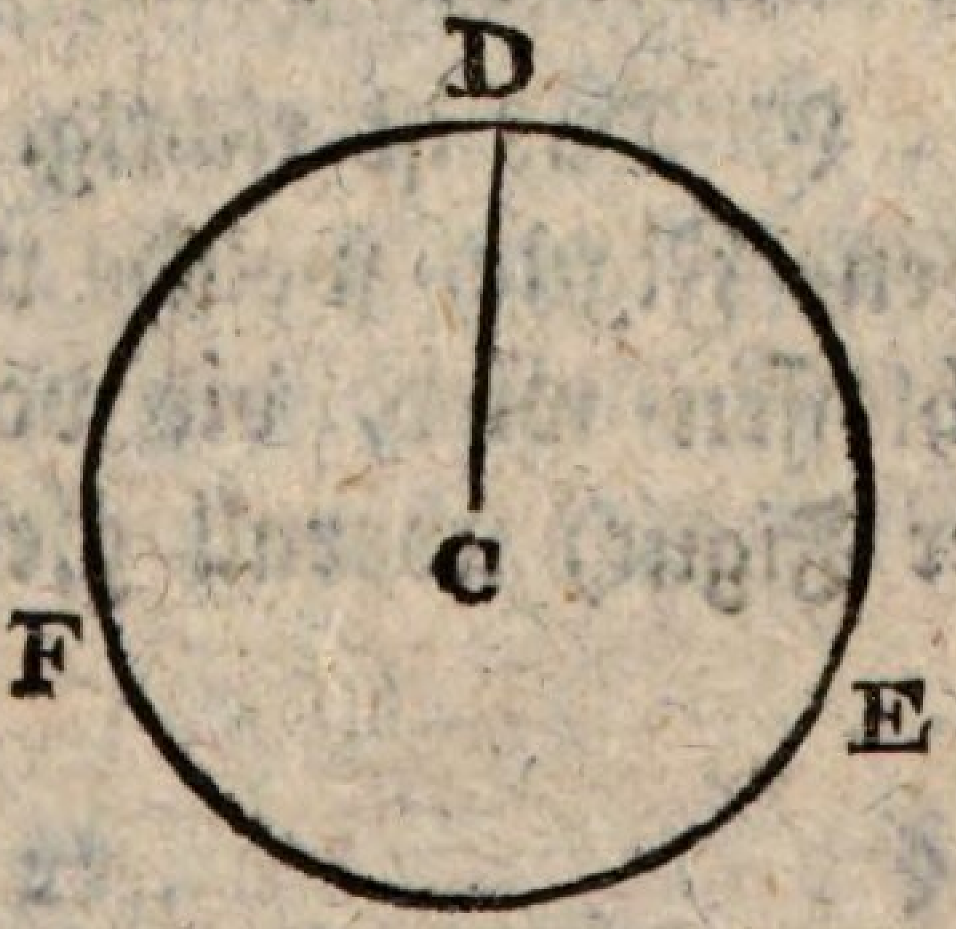
S. Nein. Zwei gerade Linien können höchstens einen Winkel A bilden, der nicht rund um begrenzt wird, sondern eine offene Seite hat, welche zu verschliessen eine dritte Linie BC erfordert wird.



L. Es werden also wenigstens drei gerade Linien erfordert, um eine Figur zu bilden. Die drei Linien welche eine Figur begrenzen heissen ihre Seiten. Eine dreiseitige Figur, heisst ein DreiEkk, eine vierseitige ein VierEkk, eine fünfseitige ein FünfEkk u. s. w. Figuren welche mehr als vier Seiten haben, heissen, mit einem allgemeinen Namen, VielEkke. — Eine geradlinige Figur heisst ordentlich, oder regulär, wenn sie lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel hat; und unordentlich, oder irregulär, wenn dieses nicht Stat findet. — Hiermit wird nicht behauptet daß es wirklich ordentliche DreiEkke, VierEkke, FünfEkke u. s. w. gebe: das muß sich erst in der Folge ausweisen; sondern es wird diesen Dingen nur, auf den MöglichkeitsFall, ein Namen angewiesen.

§ 20.

L. Wenn eine Linie CD sich um einen ihrer EndPunkte C bewegt, bis sie wieder in ihre erste Lage kömt; so beschreibt sie einen Kreis. Der feste Punkt C, um welchen die Linie CD sich bewegt, heisst der Mittel-



Punkt

Punkt des Kreises, und die von dem andern End-Punkt D beschriebene Linie DEF, welche den Kreis begrenzt, heisst sein Umfang, oder die Kreis-linie. — Wie entsteht nun ein Kreis?

S. Wenn eine Linie CD sich um einen ihrer EndPunkte C bewegt.

L. Aber was ist ein Kreis?

S. Eine Figur.

L. Wodurch wird sie begrenzt?

S. Durch eine krumme Linie DEF.

L. Woher weist du daß die Linie DEF krumm ist?

S. Eine gerade Linie kan keinen Raum einschliessen (§ 10).

L. Es könte der krummen Linien aber mehre geben. Lässt sich ihre Lage und Beschaffenheit nicht genauer angeben?

S. Sie ist von einem in ihrer Mitte des Kreises befindlichen Punkte C überall gleich weit entfernt.

L. Woher weist du das?

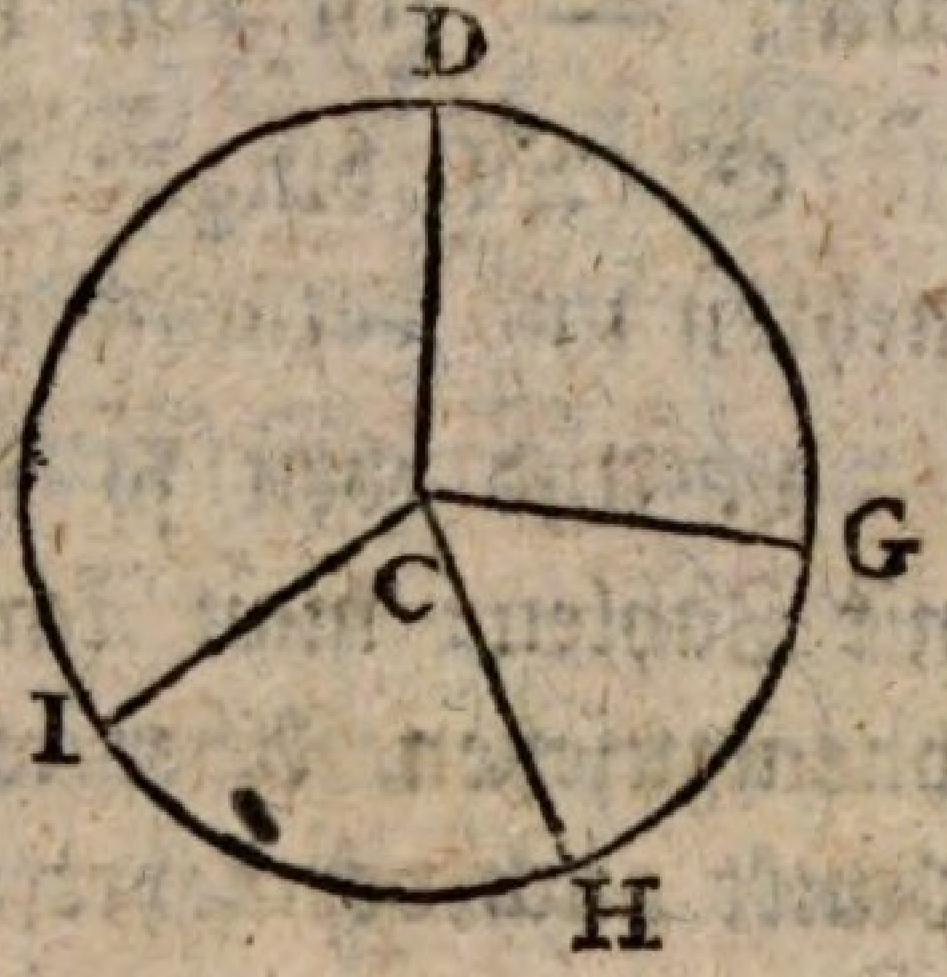
S. Weil die Linie CD, während ihr einer End-Punkt D den Umfang bezeichnet, ihre Länge, und ihr andrer EndPunkt C seine Stelle nicht verändert.

L. Das ist richtig. Ein Kreis also ist eine ebene Figur, welche von einer einzigen Linie beschlossen wird, die von einem Punkte (innerhalb der Figur) überall gleich weit absteht.

§ 21

§ 21.

L. Eine vom MittelPunkte bis an den Umfang des Kreises reichende gerade Linie CD heisst ein HalbMesser.



Wenn man solcher HalbMesser nun mehre zöge, CG, CH, CI ꝛc. welcher davon würde der längste seyn?

S. Sie sind alle gleich lang.

L. Woher das?

S. Der Umfang ist vom MittelPunkte überall gleich weit entfernt (§ 20); und die Entfernung wird durch gerade Linien, wie CD, CG, CH ꝛc. sind, gemessen (§ 13).

L. Also alle HalbMesser eines Kreises sind gleich.

§ 22.

L. So wie man die Möglichkeit einer geraden Linie zugeben muste (§ 7); so ist man auch genötigt die einer KreisLinie zuzugeben, oder anzunehmen, daß aus jeden gegebenen Punkt, mit jedem HalbMesser ein Kreis könne beschrieben werden; ungeachtet der so gezeichneten KreisLinie die geometrische Genauigkeit eben so sehr fehlt, als sie der geraden Linie fehlte.

§ 23.

L. Was einer Vermehrung und Verminderung fähi ist heisst eine *Grösse* oder Quantität. — Ist eine Linie auch eine Grösse?

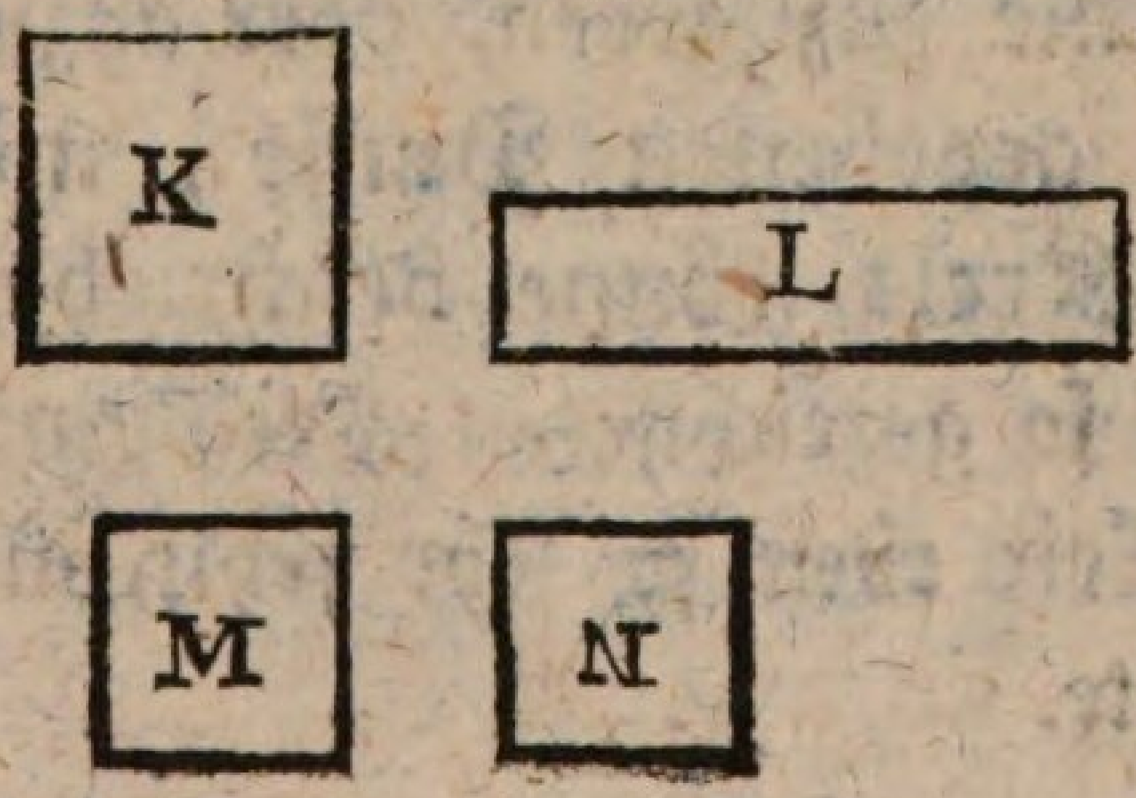
S Allerdings; denn ich kan ihre Länge vermehren und vermindern.

L. Und eben so ist es mit Flächen, mit Körpern, mit Zahlen: man kan ihnen abnehmen, man kan ihnen zusetzen. Aber wie ist es mit Punkten? Kan ein Punkt auch vermehrt oder vermindert werden?

S. Da ein Punkt weder Länge, noch Breite, noch Dikke hat (§ 4); so sehe ich nicht was man ihm nehmen könte. Und eben so wenig kan man ihm etwas zusetzen, wenn er nicht soll aufhören Punkt zu seyn.

§ 24.

L. UebereinStimmung in der Grösse heisst *Gleichheit*; UebereinStimmung in der Gestalt heisst *Aehnlichkeit*; und UebereinStimmung in beiden, in der Grösse so wol, als in der Gestalt heisst *Gleichheit und Aehnlichkeit* oder Congruenz.



Z. B. K und L sind einander gleich; K und M sind einander ähnlich; und M und N sind einander gleich und ähnlich. Durch Zeichen schreibt man dieses so

K

$K \doteq L$
$K \sim M$
$M \cong N$

Was sind nun gleiche Grössen?

S. Solche deren eine so groß ist als die andre.

L. Und ähnliche?

S. Solche die in Form oder Gestalt übereinstimmen.

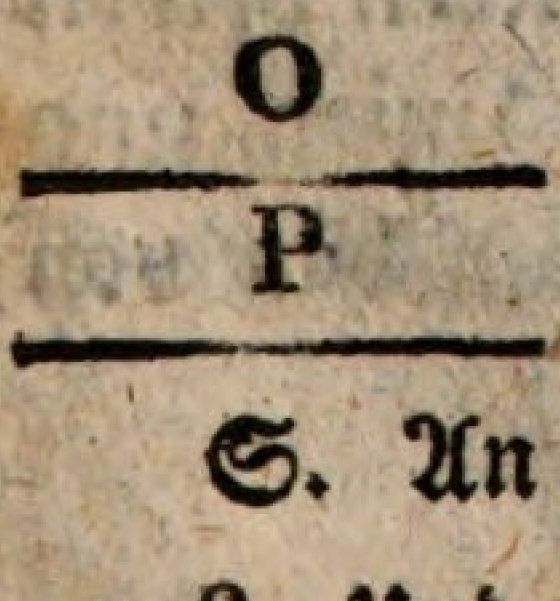
L. Oder die sich durch nichts unterscheiden, als ihre Grösse. — Und was sind gleiche und ähnliche Grössen?

S. Die an Grösse und Gestalt übereinkommen.

L. Recht. Aehnliche und gleiche Dinge sind weiter nichts als ein Ding, das man sich zwei Mal vorstellt. Nicht nur innerer Raum, sondern auch gleichliegende Seiten und Winkel, alles muß in ihnen aufs genaueste übereinstimmen. Dabei aber muß man bemerken, daß die Geometrie es bloß mit Grösse und Gestalt zu tuhn hat, nicht aber mit Farbe, Gewicht und Geschmakk ꝛc.

§ 25.

L. Woran unterscheiden sich wol zwei gerade Linien?



S. An ihrer Länge.

L. Und wenn sie gleich lang sind?

S. Dan weis ich kein UnterscheidungsZeichen.

L. Sie haben auch wirklich keins, denn sie sind alle einander ähnlich. Und eben die Bewandniß hat es mit Winkeln. Wenn man daher von geraden Linien, und Winkeln Gleichheit bewiesen hat, so hat man alles von ihnen erwiesen, indem die Aehnlichkeit eine Folge ihrer Gleichheit ist. Und da es in der Geometrie Regel ist nichts Ueberflüssiges zu sagen; so erwähnt man, wan von geraden Linien, und Winkeln die Rede ist, der Aehnlichkeit, als einer sich von selbst verstehenden Sache, gar nicht, sondern sagt bloß: Sie sind gleich.

§ 26.

L. Da gleiche und ähnliche Dinge nicht zu unterscheiden sind (§ 24), so folgt daraus, daß gleichlange gerade Linien, wenn man sie mit ihren Enden, und ihrer Länge nach gehörig auf einander legt, erst die eine, und dan die andere oben, wechselsweise auf einander passen müssen, und keine unter der andern hervor ragen könne. Und eben so ist es mit Winkeln und gleichen und ähnlichen Figuren. Mit einem Wort: Gerade gleich lange Linien, gleich grosse Winkel, und gleiche und ähnliche Figuren dekken einander; und umgekehrt, wenn gerade Linien, und Winkel einander dekken, was kan man dan von ihnen behaupten?

S. Dan sind sie einander gleich.

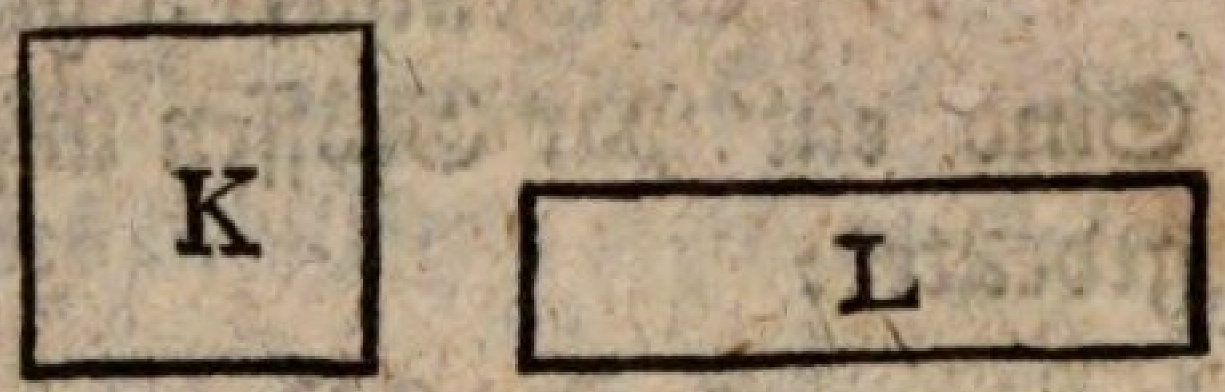
L.

L. Und Figuren die einander dekken?

S. Sind gleich und ähnlich.

§ 27.

L. Gesetzt ich hätte eine Grösse K, und vertauschte sie gegen eine andere eben so große L: gewönne, oder verlöre ich bei dem Tausch?

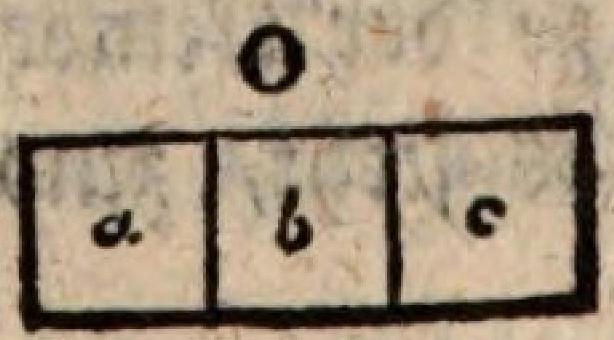


S. Keins von beiden. Von gleichen Dingen kan, der Grösse unbeschadet, eins fürs andre genommen werden.

§ 28.

L. Wir müssen, um in der Folge nicht genötigt zu seyn den Vortrag zu unterbrechen, hier noch einige Zeichen erklären, deren man sich der Kürze und Bequemlichkeit wegen, zu bedienen pflegt.

Wan Grössen, wie 3 und 5, oder a, b und c, zusammengefügt, oder vereinigt werden sollen; so bezeichnet man dieses so:



$$3 + 5 = 8;$$
$$a + b + c = O;$$

und spricht es aus:

3 mehr 5 ist gleich 8;
a mehr b mehr c ist gleich O.

Soll

Soll eine Grösse von einer andern weggenommen werden; so schreibt man das:

$$5 - 3 = 2;$$
$$O - a = b + c;$$

und liest:

5 weniger 3 ist gleich 2;
O weniger a gleich b mehr c.

Sind ein Par Grössen ungleich, so wird das so angedeutet:

$$5 > 3;$$
$$3 < 5;$$
$$O > a + b;$$
$$a < O;$$

und spricht es aus:

5 ist grösser als 3;
3 ist kleiner als 5
O ist grösser als a mehr b;
a ist kleiner als O

Das Zeichen der Ungleichheit, $>$ oder $<$, wird nämlich, wie aus den Beispielen zu ersehn, so gestellt, daß es seine Mündung der grössern, und seine Spizze der kleinern der beiden Grössen zwischen welcher es steht, zuwendet.

§ 29.

L. Daß 3 so groß wie 3, 4 so groß wie 4, 5 so groß wie 5 sei, wirst du doch wol ohne Beweis annehmen?

S. Ja, das ist ohne Beweis klar.

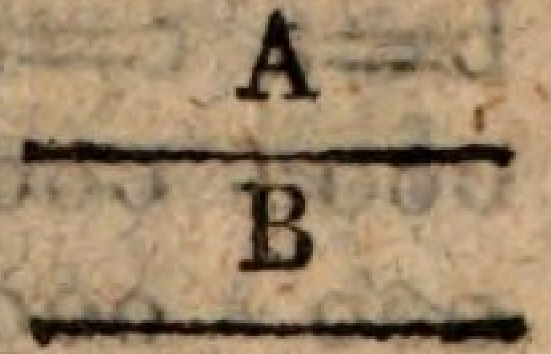
L. Diese Wahrheit allgemein ausgedrükkt, oder geometrisch eingekleidet lautet, so: Jede Grösse ist sich selbst gleich. Durch Zeichen drükkt man dis so aus:

$$a = a;$$

oder $b = b$; u. s. w.

Es gibt noch mehr Wahrheiten dieser Art, die so klar sind, daß sie keines Beweises fähig sind, und zum Glükk auch keines bedürfen, weil niemand sie bezweifelt, sobald er sie versteht: ihr allgemeiner Ausdrukk aber gibt ihnen, für den der geometrischen Sprache noch Ungewohnten ein geheimnißvolles Ansehn.

§ 30.



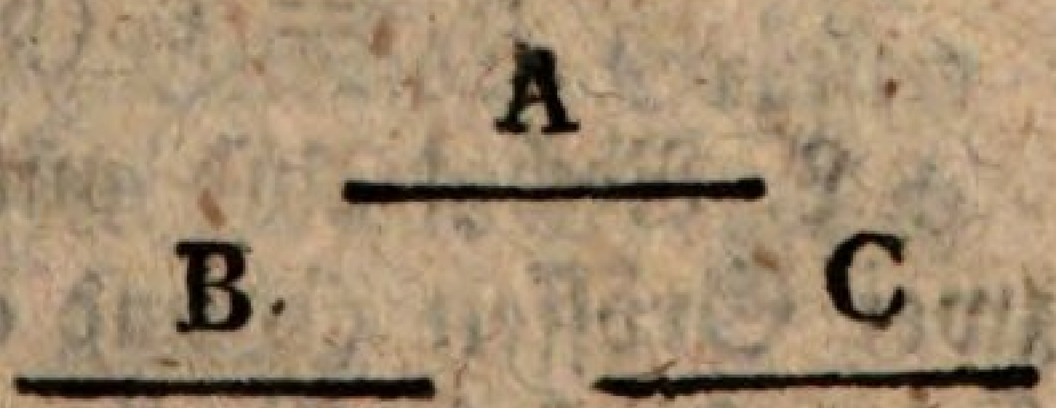
L. Zwei Linien A und B sind gleich lang. Kan wol, unter dieser VorausSezzung, A kürzer seyn als B?

S. Nein, das ist nicht möglich.

L. Aber länger?

S. Eben so wenig. Zwei Grössen können nicht zu gleicher Zeit einander gleich und ungleich seyn.

§ 31.



L. Es wird eine gerade Linie A, von beliebiger Länge, gezogen. Hierauf eine zweite B, eben so lang als A; und eine dritte C,

auch so lang als A. Die Linien B und C also sind jede so lang als A; welche von ihnen ist nun die längste?

S. Da jede so lang ist als A, so sind beide gleich lang; denn man kan jede von ihnen an die Stelle von A setzen (§ 27).

L. Richtig! Durch Zeichen schreibt man dieses so:

$$\begin{array}{c} A = B \\ A = C \\ \hline B = C \end{array} \text{ (§ 27).}$$

a
ooo
ooo
b=a c=a
ooo ooo
ooo ooo

Und nun wollen wir auch einen Haufen von Bohnen, Zahlpfennigen, oder Knöpfen etwan von 6 Stükk, machen, und ihn a nennen. Dan einen zweiten b und einen dritten c, jeden von eben so viel Bohnen oder Zahlpfennigen als a. — Welcher von diesen beiden Haufen b und c wird nun der gröste seyn?

S. Sie sind auch beide gleich groß.

L. Wie würde man dis durch Zeichen andeuten?

S.
$$\begin{array}{c} a = b \\ a = c \\ \hline b = c \end{array} \text{ (§ 27).}$$

L. Recht! Und mit Worten heisst es: Wenn zwei Grössen (b und c) einer dritten (a) gleich sind, so sind sie einander selbst gleich.

§ 32.

§ 32.

L. Es werden zwei Haufen a und b von gleicher Grösse gemacht. Hierauf wird ein dritter Haufen c, so groß als a, und ein vierter d, so groß als b, gemacht. Welcher nun von diesen beiden letzten c und d, wird der gröste seyn?

a	= b
ooo	ooo
c=a	d=b
ooo	ooo

S. Sie sind gleichen Haufen, a und b gleich, und also auch unter sich gleich.

L. Die Sache ist klar genug, um ohne Beweis angenommen zu werden: da es aber in der Geometrie Regel ist alles zu beweisen, was sich beweisen lässt; so wollen wir an diesem Satze den ersten Versuch machen. — Nach der VorausSezzung ist a gleich b und c gleich a. Was folgt daraus?

S. $a = b$

$a = c$

$b = c$ (§ 31)

L. Recht! Und daraus daß b gleich c, und b gleich d?

S. $b = c$

$b = d$

$c = d$ (§ 31)

L. Da ist der vollständige Beweis: Grössen (c und d) die gleichen Grössen (a und b) gleich sind, die sind einander selbst gleich.

§ 33.

a = b
ooo ooo
c = a
ooo

L. Es werden zwei Haufen, a und b von gleicher Grösse, und hierauf wird ein dritter, c, so groß als der erste, a, gemacht. — Welcher der beiden Haufen b und c wird nun der gröste seyn?

S. Sie sind beide gleich groß. Was einer von zwei gleichen Grössen gleich ist, das ist auch gleich der andern von ihnen.

L. Recht! Und wie würde man dis durch Zeichen ausdrükken?

S. a = b
c = a

c = b (§ 31).

§ 34.

a = b
ooo ooo
c < a
oo
d > a
oooo

L. Zwei Haufen, a und b, werden gleich groß, ein dritter c aber wird kleiner als a gemacht. Wie werden nun die Haufen c und b sich gegen einander verhalten? Welcher von ihnen wird der gröste seyn?

S. b wird grösser seyn als c.

L. Recht! Es wird ein vierter Haufen d grösser als a gemacht. Wie wird dieser vierte Haufen sich gegen b verhalten?

S. Er wird auch grösser seyn als b.

L. Woher das?

S.

S. Was grösser oder kleiner ist als eine von zwei gleichen Grössen, das ist auch grösser oder kleiner als die andr evon ihnen.

L. Das ist richtig. Wie wird es aber mit Zeichen geschrieben?

S. $\begin{array}{c} a = b \\ c < a \\ \hline c < b \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{c} a = b \\ d > a \\ \hline d > b \end{array}$

§ 35.

L. Es werden zwei ungleiche Haufen a und b gemacht, und zwar kan a grösser seyn als b. Hierauf wird ein dritter Haufen c gemacht, noch grösser als der gröste Haufen a. Welcher von den beiden Haufen c und b ist nun der gröste?

$a > b$
0000 000
$c > a$
000
000 $d < b$
00

S. c ist grösser als b.

L. a und b bleiben wie sie sind; ein vierter Haufen, d, aber wird kleiner gemacht, als der kleinste b: wie verhält sich nun d zu a? Ist es grösser oder kleiner?

S. Da d schon kleiner ist als b, so muß es um so mehr kleiner seyn als a. Was grösser ist als die gröste von zwei ungleichen Grössen, das ist auch grösser als die kleinste von ihnen. Und umgekehrt: Was kleiner ist als die kleinste von zwei ungleichen Grössen, das ist auch kleiner als die gröste von ihnen.

L. Ganz richtig! Wie wird man das aber durch Zeichen andeuten?

S. $a > b$ $\quad b < a$

$$\begin{array}{ccc} a > b & \quad & b < a \\ c > a & & d < b \\ \hline c > b & & d < a \end{array}$$

§ 36.

$a = b$	
ooo ooo	
oo oo	
$c = d$	
ooo ooo	
$a+c=b+d$	
ooo ooo	
oo oo	
ooo ooo	

L. Es werden zwei Haufen a und b von gleicher Grösse, etwan von 5 ein jeder, gemacht. Dan zwei andre Haufen c und d, auch von gleicher Grösse, jeder etwan von 3 Stükk. Hierauf werden a und c, desgleichen b und d zusammen gescharrt. — Welcher von den vereinigten Haufen wird nun der gröste seyn. $a + c$, oder $b + d$?

S. Sie sind beide gleich groß.

L. Woher das?

S. Gleiches zu Gleichem hinzugetahn, gibt Gleiches. Denn man kan a für c und b für d setzen (§ 27).

L. Aber kan man das wiederholen? das heisst, kan man mehr, als ein Mal Gleiches hinzutuhn, so daß die Grössen gleich bleiben?

S. Daran ist gar kein Zweifel.

L. Ganz recht! Aber wie schreibt mans mit Zeichen?

S.

S. $a = b$
$c = d$

$$\left.\begin{array}{l} a + c = b + d \\ a + 2c = b + 2d \end{array}\right\} (\S\ 27)$$

§ 37.

L. Die beiden Haufen a und b bleiben gleich. Wenn ich nun von dem ersten 2 wegnehme, und von dem andern auch 2; ist das übrig Bleibende gleich oder ungleich?	$a = b$ ooo ooo \oo \oo $a - c = b - c$ ooo ooo

S. Gleiches von Gleichem weggenommen, bleibt Gleiches.

L. Recht! Wir wollen die weggenommene Grösse c nennen. Wie schreibt man diesen Satz nun durch Zeichen?

S. $a = b$

$a - c = b - c$

L. Dieses Wegnehmen gleicher Grössen kan übrigens wiederholt werden, so gut als das Hinzutuhn (§ 40).
Das heisst: Wenn $a - c = b - c$
so ist auch $a - 2c = b - 2c$.

§ 38.

$a = b$
ooo ooo
oo oo
$c < d$
oo ooo
$a + c < b + d$
ooo ooo
oo oo
oo ooo

L. Die Haufen a und b bleiben wie sie sind, gleich groß, c und d aber werden ungleich gemacht, etwan $c = 2$ und $d = 3$. Nun die Haufen a und c, b und d zusammen geschoben, werden sie gleich oder ungleich seyn?

S. Sie werden ungleich seyn.

L. Woher das?

S. Gleiches mit Ungleichem vereiniget, gibt Ungleiches.

L. Und welcher Klumpen wird grösser seyn? der wo Grösseres, oder der wo Kleineres hinzugekommen ist?

S. Der wo Grösseres hinzugekommen ist, wird grösser, der wo Kleineres hinzugekommen ist, wird kleiner seyn.

L. Recht! Aber wie wird es durch Zeichen angedeutet?

S. $a = b$
$c < d$
$a + c < b + d.$

§ 39.

$a \overset{>}{\neq} b$
ooo ooo
ooo oo

L. Es werden ein par ungleiche Haufen a und b, der eine etwan von 6, der andere von 5 Stükk gemacht. Wenn ich nun von jedem gleich viel, $2 = c$ wegneh-

nehme; ist das was übrig bleibt gleich oder ungleich?

$a - c > b - c$
oo oo
oo o

S. Gleiches von Ungleichem weggenommen bleibt Ungleiches.

L. Recht! Und wie wird es durch Zeichen dargestellt?

S.
$$\frac{a > b}{a - c > b - c}$$

§ 40.

L. Es werden ein par gleiche Haufen a und b, etwan 8 ein jeder, und ein par ungleiche c und d, der erste von 3, der andre von 4 gemacht. Wenn ich nun c von a, und d von b wegnehme, wie sind die UeberReste $a - c$ und $b - d$, beschaffen? Sind sie gleich oder ungleich?

$a = b$
oooo oooo
oooo oooo
$c > d$
ooo oooo
$a - c > b - d$
oooo oooo
o

S. Ungleich: Denn Ungleiches von Gleichem weggenommen; lässt Ungleiches.

L. Recht! Aber durch Zeichen?

S.
$$\begin{array}{c} a = b \\ c < d \\ \hline a - c > b - d \end{array}$$

§ 41.

a = b
oooo oooo
c
oo
a+c
oooo
oo
a−c
oo

L. Wenn ich von zwei gleichen Grössen a und b der einen a eine dritte c hinzufüge, der andern b aber nichts?

S. So werden sie ungleich.

L. Wenn aber von einer der beiden gleichen Grössen a und b etwas weggenommen wird, und von der andern nicht = = ?

S. So werden sie auch ungleich.

Wenn $a = b$

so ist $a + c > b$
und $a - c < b$

§ 42.

a > b
ooo ooo
ooo oo
c
ooo
a+c
ooo
ooo
ooo b−c
oo

L. Gesetzt a wäre grösser als b, und es käme zu a noch c hinzu, zu b aber nicht?

S. So bleibt a+c grösser als b.

L. Gesetzt aber ich nehme der kleinern Grösse b noch etwas ab, der grössern a aber nicht?

S. Dan ist b − c kleiner als a

L. Wie bezeichnet man dis?

S. $a > b$

$a + c > b$
$b - c < a$

L.

L. Mit Worten heisst das: Wenn von zwei ungleichen Grössen, der grösseren etwas zugesetzt, oder der kleinern etwas abgenommen wird; so bleiben sie ungleich.

§ 43.

L. Es wird ein Haufen a nach Wilkühr gelegt. Dan ein zweiter Haufen b, und ein dritter c, jeder eben so groß als a. — Welcher dieser beiden lezten ist nun der gröste?

a	
ooo	
b=a	c=a
ooo	ooo
d=b+a	e=c+a
ooo	ooo
ooo	ooo

S. Keiner. Zwei Grössen die einer dritten gleich sind, die sind unter sich gleich. (§ 31).

L. Recht! aber wie wird es bezeichnet?

S. $b = a$

$c = a$

$\overline{b = c}$ (§ 31)

L. Zu jedem der Haufen b und c kömt noch ein Mal der Wert von a, so daß zwei neue Haufen d und e entstehen, von denen jeder zwei Mal so groß ist als a. Welcher von ihnen ist nun der gröste?

S. Auch keiner. Gleiches zu Gleichem hinzugetahn gibt Gleiches (§ 36).

L. Recht! Und das wird bezeichnet?

S. $b = c$ (Beweis)

$b + a = c + a$ (§ 36)

oder $d = e$ (§ 37)

L. Grössen also wie d und e, deren jede zwei Mal so groß ist als eine dritte a, sind einander gleich.

§ 44.

a

000

000

$b = a$ $c = a$

000 000

000 000

$d = b - \frac{1}{2}a$ $e = c - \frac{1}{2}a$

000 000

L. Nun wollen wir den vorigen Satz umkehren. — Es sei $a = 6$.

$b = a$

und $c = a$

Was ist die Folge davon?

S. Daß $b = c$ (31).

L. Wenn ich nun jedem der gleichen Haufen b und c, die Hälfte von a, das ist 3, wegnehme, wie verhalten sich dan ihre UeberReste, d und e, zu einander? Sind sie einander gleich, oder nicht?

S. Sie sind einander gleich: denn Gleiches von Gleichem weggenommen bleibt Gleiches (§ 37).

L. Zwei Grössen, d und e also, deren jede von einer dritten die Hälfte ist, sind einander gleich. Es kömt nun noch darauf an, den Beweis welchen wir durch Worte geführt haben, auch durch Zeichen zu führen.

S. $b = a$

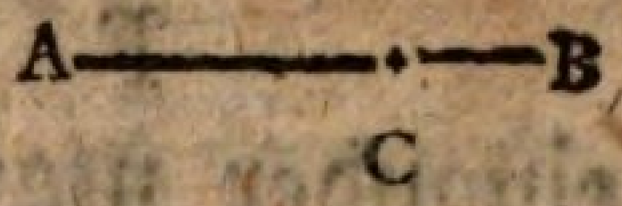
$c = a$

$b = c$ (§ 31)

$b - \frac{1}{2}a = c - \frac{1}{2}a$ (§ 37)

oder $d = e$ (§ 27)

§ 45.



L. Wenn man von einer Linie AB ein Stükk CB abschneidet, was ist mehr? Das Ganze AB? oder der übrig bleibende Teil AC?

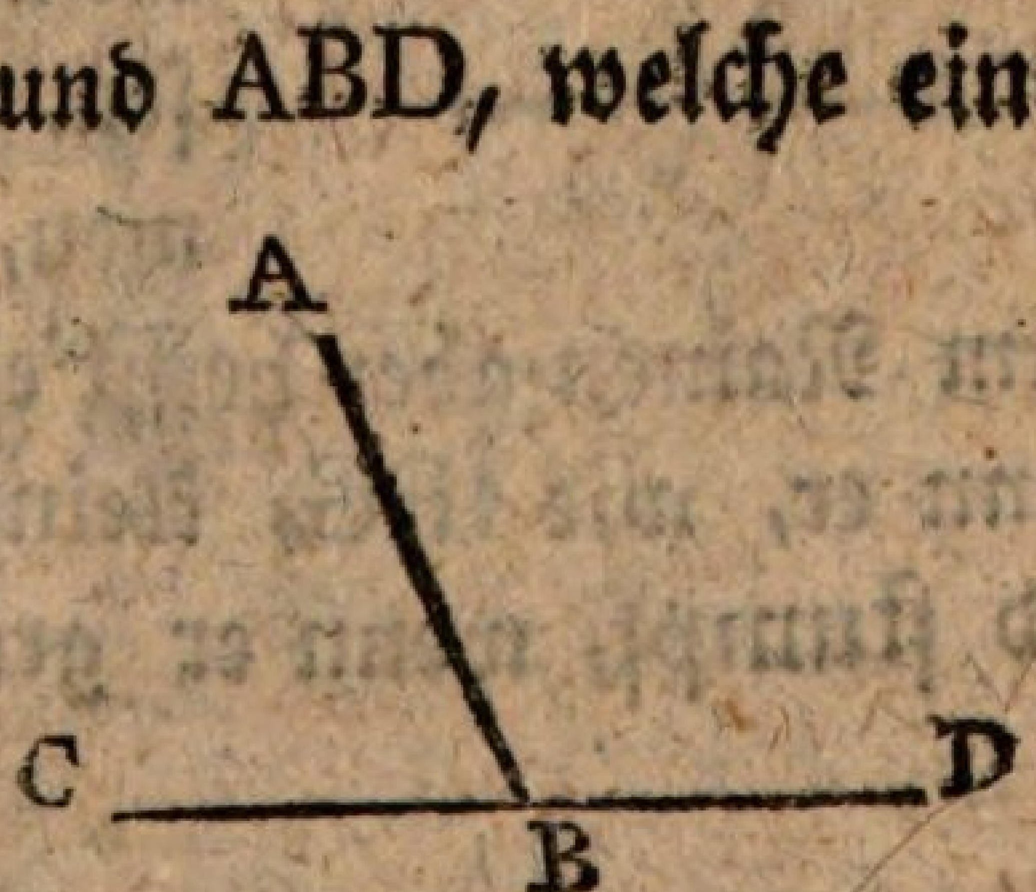
S. Das Ganze ist grösser als sein Teil?

L. Wenn man aber alle Stükken AC, CB, in die eine Linie AB zerschnitten ist, zusammen nimt, was wird dan grösser seyn? Die ganze Linie AB? oder alle ihre Teile, AC + CB zusammen?

S. Das Ganze ist seinen Teilen zusammen genommen gleich. AB = AC + CB.

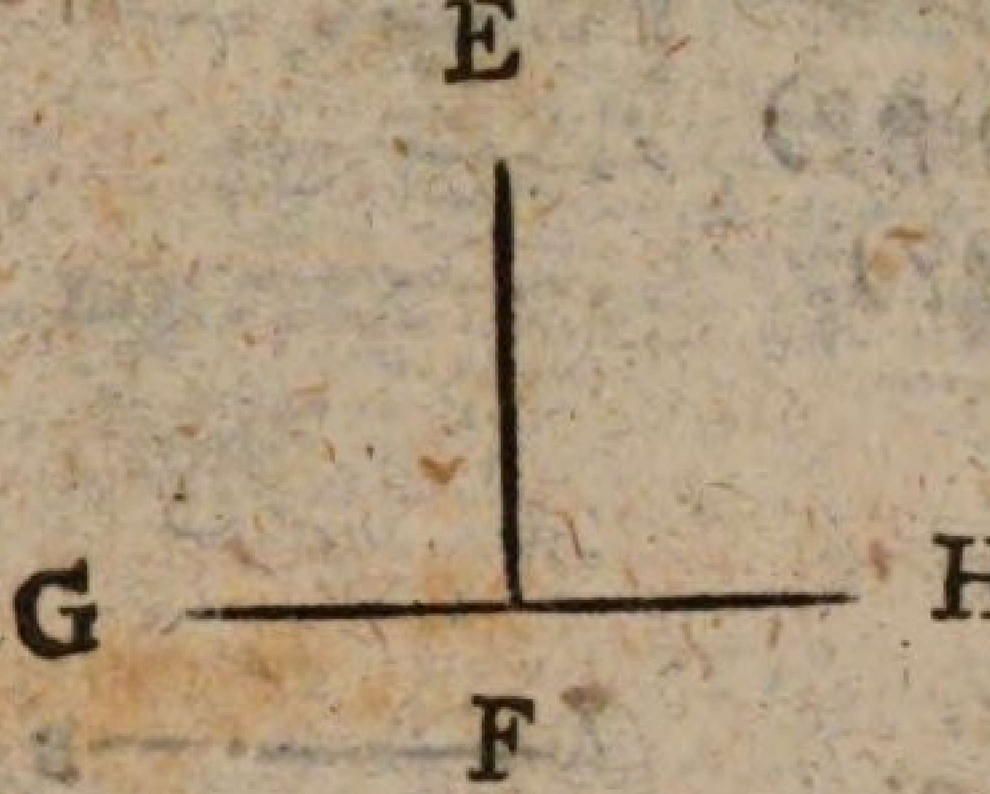
§ 46.

L. Winkel wie ABC und ABD, welche einen Schenkel AB gemein, ihre beiden andern Schenkel BC und BD aber in gerader Linie haben, heissen Neben-Winkel.



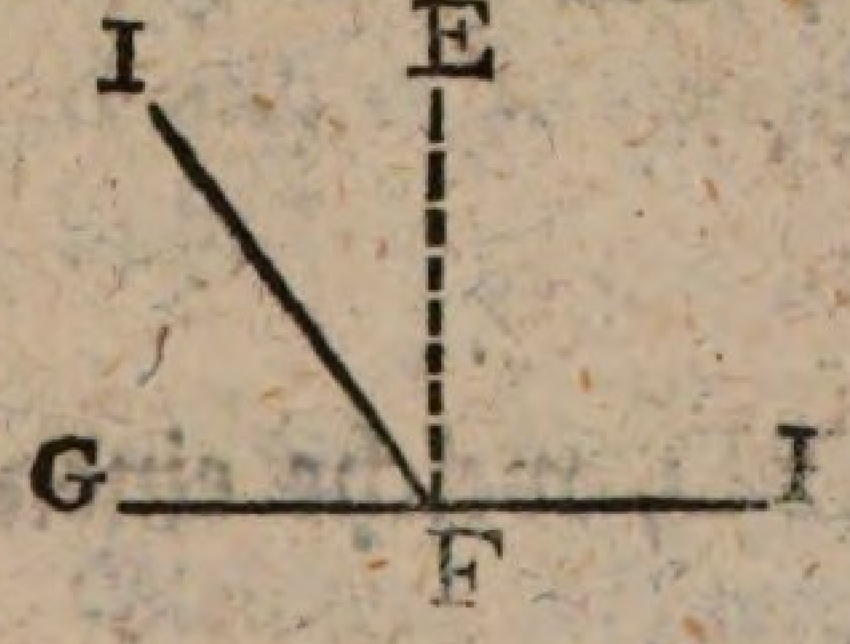
§ 47.

L. Wenn eine gerade Linie EF, auf einer andern, GH, so steht daß die NebenWinkel EFG und EFH gleich groß sind; so stehn diese Linien EF und GH senkrecht auf einander, und die Winkel welche sie mit einander machen, heissen rechte Winkel. Das Zeichen eines rechten Winkels ist gewöhnlich R; wir wollen aber, weil R ein Buchstab ist, der oft andre Bedeutungen haben kan, den rechten Winkel durch ∟ bezeichnen.



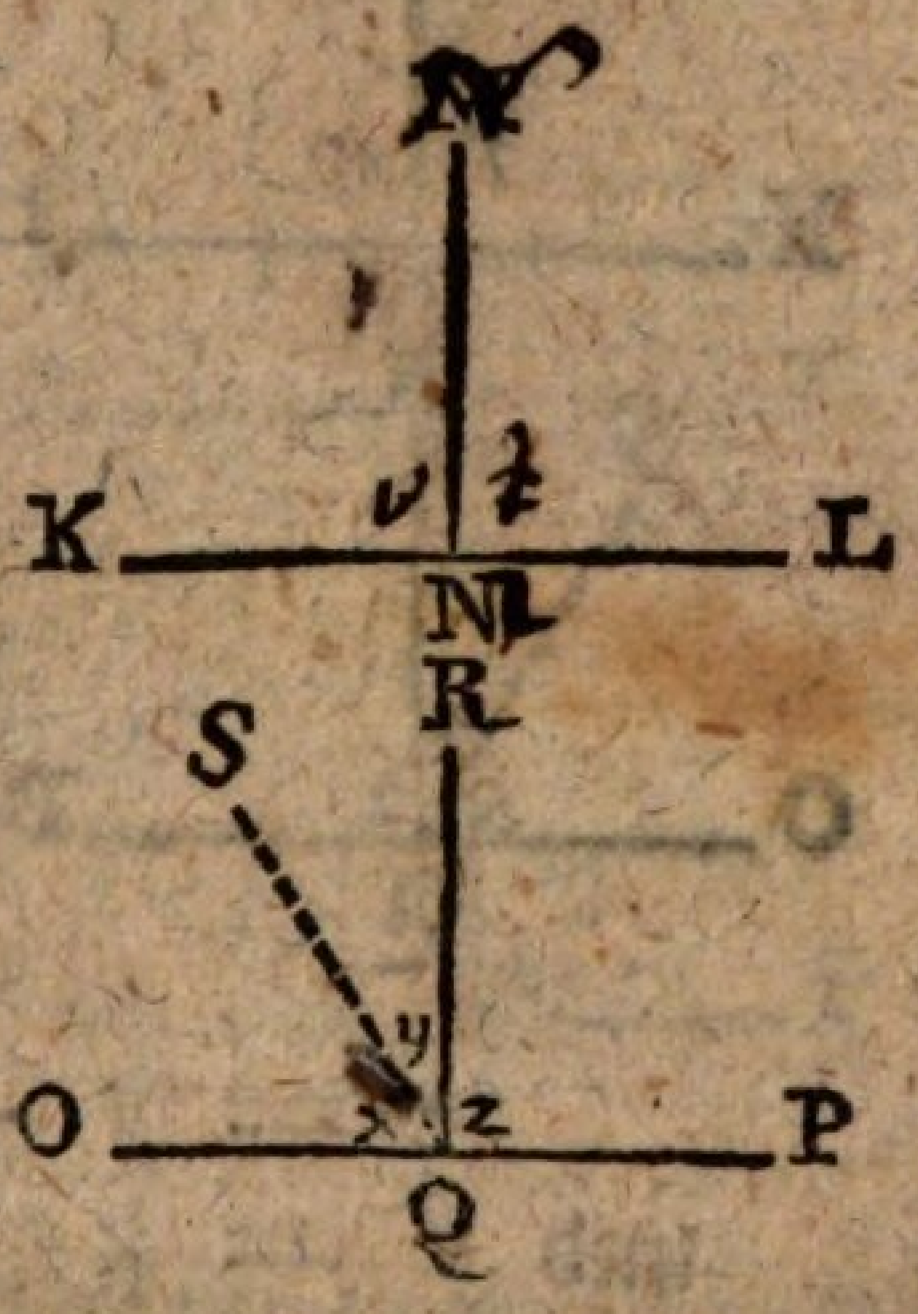
§ 48.

L. Sind die NebenWinkel welche zwei Linien GH und IF mit einander machen, ungleich, so stehn beide Linien schief auf einander, und die ungleichen NebenWinkel heissen, mit einem allgemeinen Namen, schiefe Winkel. Mit besondern Namen aber heisst ein Winkel spitz oder scharf, wenn er, wie IFG, kleiner ist als ein rechter EFG; und stumpf, wenn er grösser ist als ein rechter.



§ 49.

L. Hier sind zwei Par gerade Linien, KL, MN und OP, QR, von denen zwei und zwei senkrecht auf einander stehn. Was für Winkel machen sie mit einander?



S. Senkrechte Linien setzen rechte Winkel voraus (§ 47).

L. Das wären zusammen vier rechte Winkel. Wenn man diese so auf einander legte, daß M auf Q, und MK längs QO zu liegen käme, wo würde ML hinfallen?

S. Auf QP (§ 11).

L. Und wo MN?

S. Auf QR.

L. Könte MN nicht neben QR fallen, etwan in die Lage QS?

S. Nach der VorausSetzung ist

$$v = t$$

und $z = y + x$

$$z > x \quad (§ 41)$$

$$y + z > x \quad (§ 42)$$

Fiele nun MN auf QS, so wäre

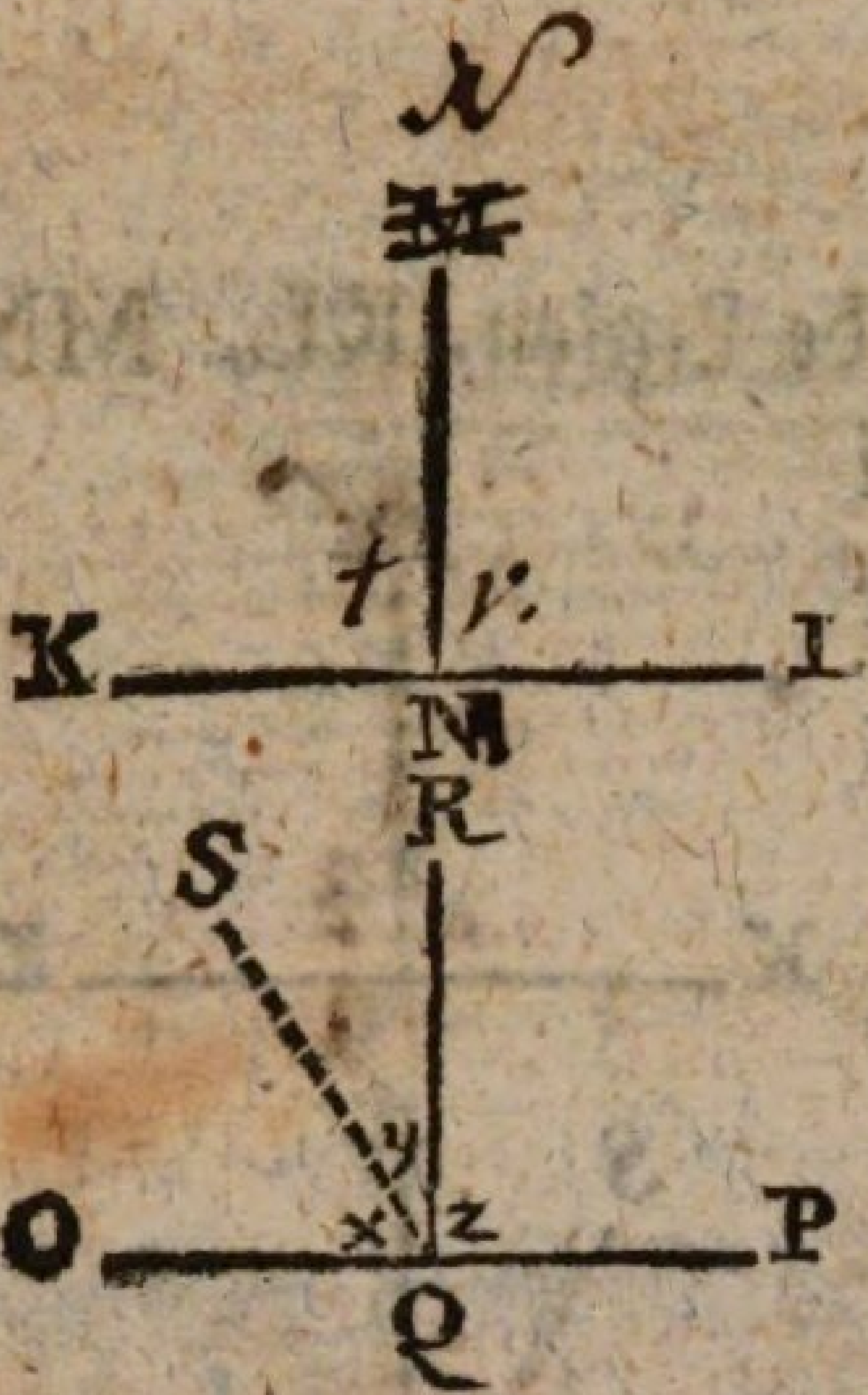
$$y + z = x$$

Also zu gleicher Zeit

$$y + z = x$$

und $y + z > x$

welches unmöglich ist (§ 30).



L. Ganz richtig! Liegt M auf Q, und ML auf QP; so muß notwendig MN auf QR fallen, und die Winkel t und y+x, v und z werden sich dekken. Was folgt daraus?

S. Daß sie alle gleich sind.

L. Eigentlich folgt nichts weiter daraus als daß

$$\left.\begin{array}{l} t = y + x \\ \text{und } v = z \end{array}\right\} (\S\ 26)$$

Wir wissen aber noch überdies aus der Voraus-Setzung daß

$$t = v$$
$$\text{und } y + x = z$$

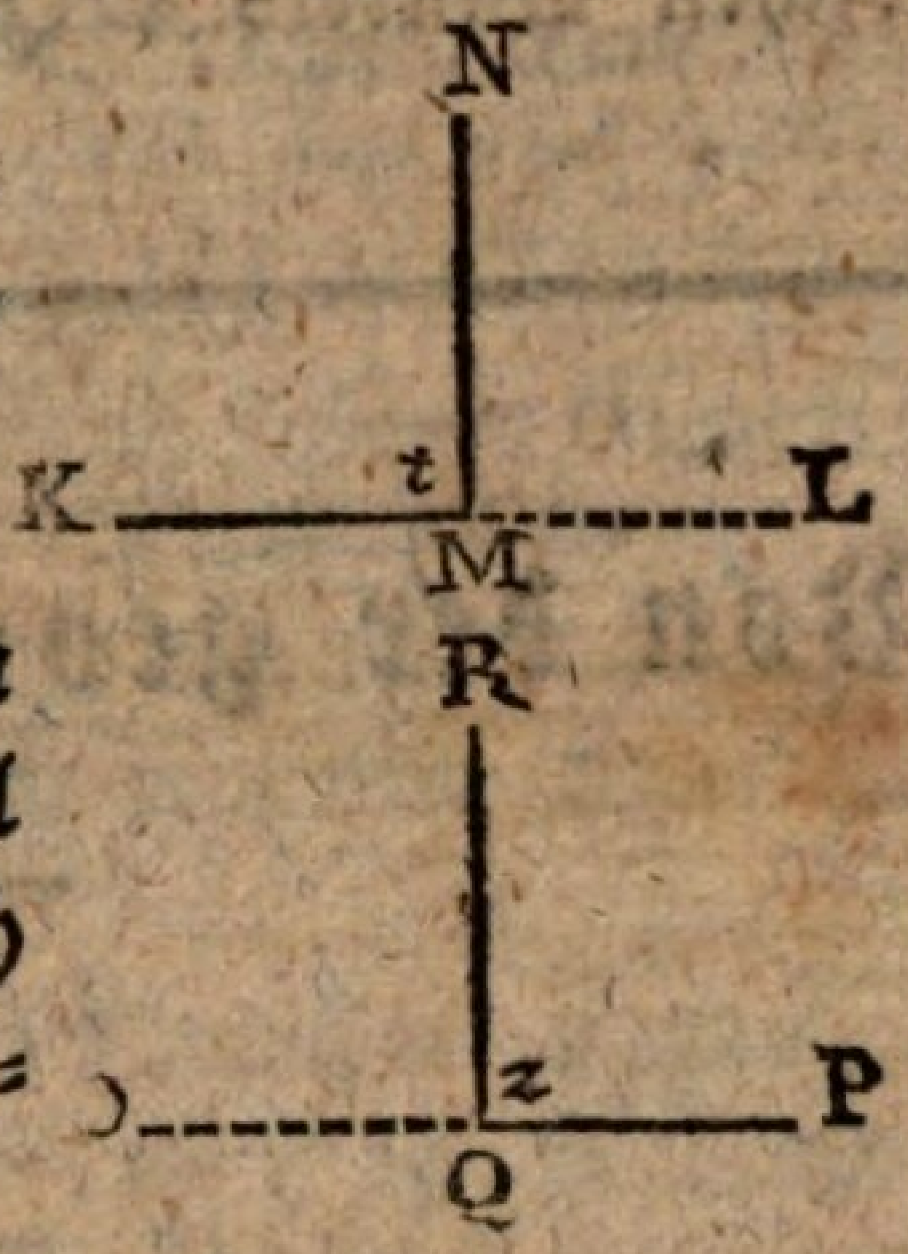
Womit aber beweist man die Gleichheit von t und z?

$$\text{S.}\ \left.\begin{array}{l} t = v \\ z = v \end{array}\right\} \text{wie schon bewiesen;}$$
$$t = z\ (\S\ 31)$$

L. Und nun noch die Gleichheit von v und y + x?

$$\text{S.}\ v = t = y + x\ (\text{Bew.})$$
$$v = y + x\ (\S\ 31)$$

L. Alle vier Winkel also sind gleich. — Würde der Beweis aber auch passen, wenn die Linien ML und QO fehlten, und nur zwei Winkel, t und z, zu vergleichen wären.

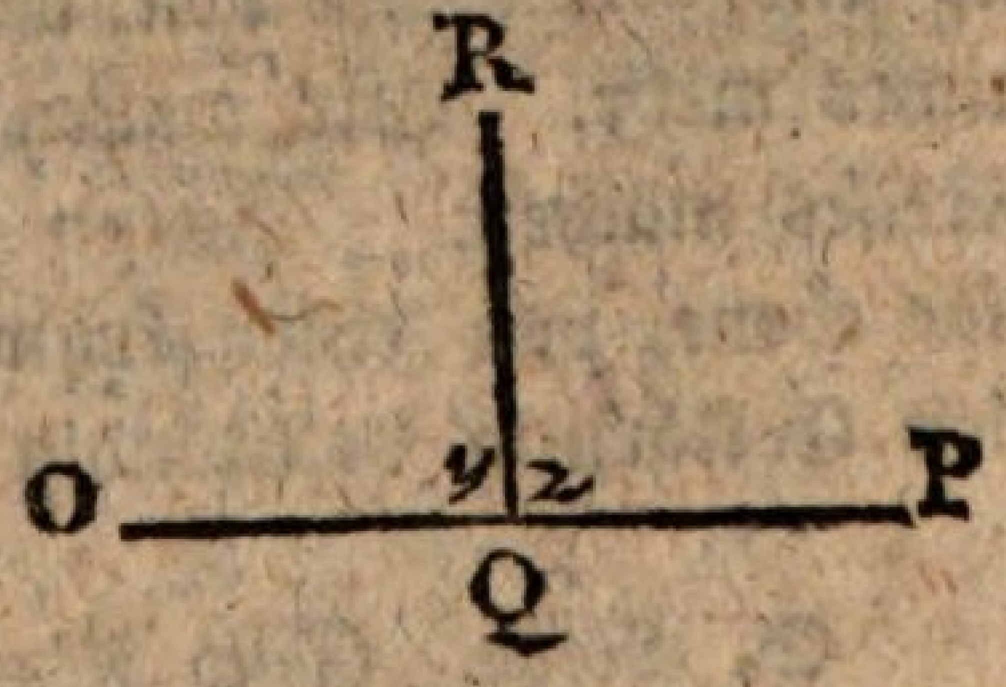


S. Ich dürfte ja die fehlenden Linien nur ziehn; den Schenkel KM, nach L, und den PQ nach O, verlängern (§ 7); so ist alles wie vorhin.

L. Das ist wahr. Nun können wir also mit Ueberzeugung behaupten: **Alle rechte Winkel sind gleich.**

§ 50.

L. In voriger Zeichnung stehe RQ senkrecht auf OP; so ist y + z = 2 ∟ (§ 47.). Nun stelle man sich vor daß RQ um den festen Punkt Q gedreht werde, bis sie in die Lage von QO kömt; so wächst z immer fort, und nimt endlich den ganzen Raum von z + y 2 ∟ ein. Da nun QO und QP eine gerade Linie bilden (§ 50); so kan die gerade Linie als ein Winkel betrachtet werden, dessen Schenkel QO und QP



in gerader Richtung liegen, und dessen Grösse zwei rechten Winkeln gleich ist. Der Name eines solchen Winkels OQP heisst ein gerader Winkel.

Von der geometrischen LehrArt.

---

§ 51.

Wir müssen uns nach und nach mit der geometrischen LehrArt bekant machen. — Die Geometrie ist eine praktische VernunftKunst, und ihre Bestimmung ist, durch Muster und Beispiele den rechten Gebrauch des Verstandes in Erkentniß der Wahrheit zu lehren. Die Geometer fangen daher von Erklärungen, das heisst, Bestimmung in welcher Bedeutung sie gewisse Wörter nehmen wollen, an. Diese Erklärungen müssen die gröste Bestimtheit haben. Das heisst, sie müssen alle die MerkMale angeben, welche nötig sind, die Sache von der die Rede ist, zu erkennen; aber nichts mehr. Wir wollen einen Versuch mit Erklärung des Kreises machen. Wenn ich sie so fasste: „Der Kreis ist eine ebene, von einer krummen Linie begrenzte Figur:" wäre diese Erklärung vollständig?

S. Nein. Eine Figur kan von einer krummen Linie eingeschlossen werden, ohne ein Kreis zu seyn. Dieser Erklärung fehlt zur Vollständigkeit also noch der Umstand, daß die krumme Linie, welche den Kreis begrenzt, von dem MittelPunkte überall gleich weit entfernt seyn muß (§ 19).

L. Das ist richtig! Wie würde also die vollständige Erklärung lauten?

S. „Der Kreis ist eine von einer einzigen Linie, die von einem Punkte innerhalb überall gleich weit entfernt ist, beschlossene ebene Figur."

L. Fehlt in dieser Erklärung nicht das Wort **krumm**? „Ein Kreis ist eine von einer einzigen **krummen** Linie u. s. w.

S. Nein. Das Wort **krumm** ist überflüssig, weil eine **gerade** Linie keinen Raum einschliessen, oder keine Figur begrenzen kan (§ 10).

L. Auch richtig! Zur völligen Erklärung der Erklärungen gehört noch, daß es deren zweierlei gibt: nemlich **WortErklärungen** und **SachErklärungen**. Der Kreis liefert uns von beiden Arten ein Muster und Beispiel. Die eben angeführte war eine WortErklärung. Wenn man aber sagt: „der Kreis entsteht, wenn eine gerade Linie sich um einen ihrer EndPunkte bewegt, bis sie wieder in ihre erste Lage kömt;" so ist das eine SachErklärung; weil man daraus die Entstehung, oder die Möglichkeit der Sache erkennt, welches bei WortErklärungen nicht immer der Fall ist. Wo er das nicht ist, da müssen die Erklärungen erwiesen, das heisst, ihre Möglichkeit muß gezeigt werden. So wird z. B. die Möglichkeit eines Winkels, und einer Figur, sehr leicht eingesehn, und zugestanden; aber nicht so die Möglichkeit einer von drei gleichen Seiten eingeschlossenen.

§ 52.

L. Aus der Erklärung des Kreises haben wir den Satz gefolgert, daß alle HalbMesser eines Kreises einander gleich sind (§ 20). Solche Sätze nun, **die unmittelbar aus den Erklärungen fliessen**, wie dieser, **nennt man Grund Sätze**. Ihrer gibt es wiederum mehr als eine Art. Einige, nämlich, besagen daß etwas geschehn, oder ver-

verrichtet werden könne. Kanst du dich auf Beispiele davon besinnen?

S. Man kan eine gerade Linie ziehn, und sie willkührlich verlängern (§ 7); es kan ein Kreis beschrieben werden (§ 22).

L. Recht! Mehr als diese dreie nimt man gewöhnlich nicht an; und man nennt sie Foderung. Die andern Sätze, welche nicht behaupten, daß etwas geschehn könne, sondern, daß etwas so sei, wie der, z. B., daß alle HalbMesser eines Kreises gleich seien, behalten den Namen GrundSätze im engern und eigentlichen Verstande.

§ 53.

L. Sätze welche nicht unmittelbar aus den Erklärungen fliessen; sondern sich auf andre schon für wahr erkante Sätze stützen, und durch Hülfe derselben erwiesen werden, heissen entweder Aufgaben, oder LehrSätze. Von lezten haben wir schon einen Vorschmakk gehabt an § 32, 43, 44, 49. Weil aber andre Geometer sie als GrundSätze, ohne Beweis, annehmen, so mögen sie auch hier diesen Namen behalten. Von nun aber folgen Aufgaben und allgemein anerkante LehrSätze. Doch werden noch Erklärungen und GrundSätze, die wohlbedächtig bisher übergangen sind, gelegentlich nachgeholt werden.

Von DreiEkken, Winkeln und Linien.

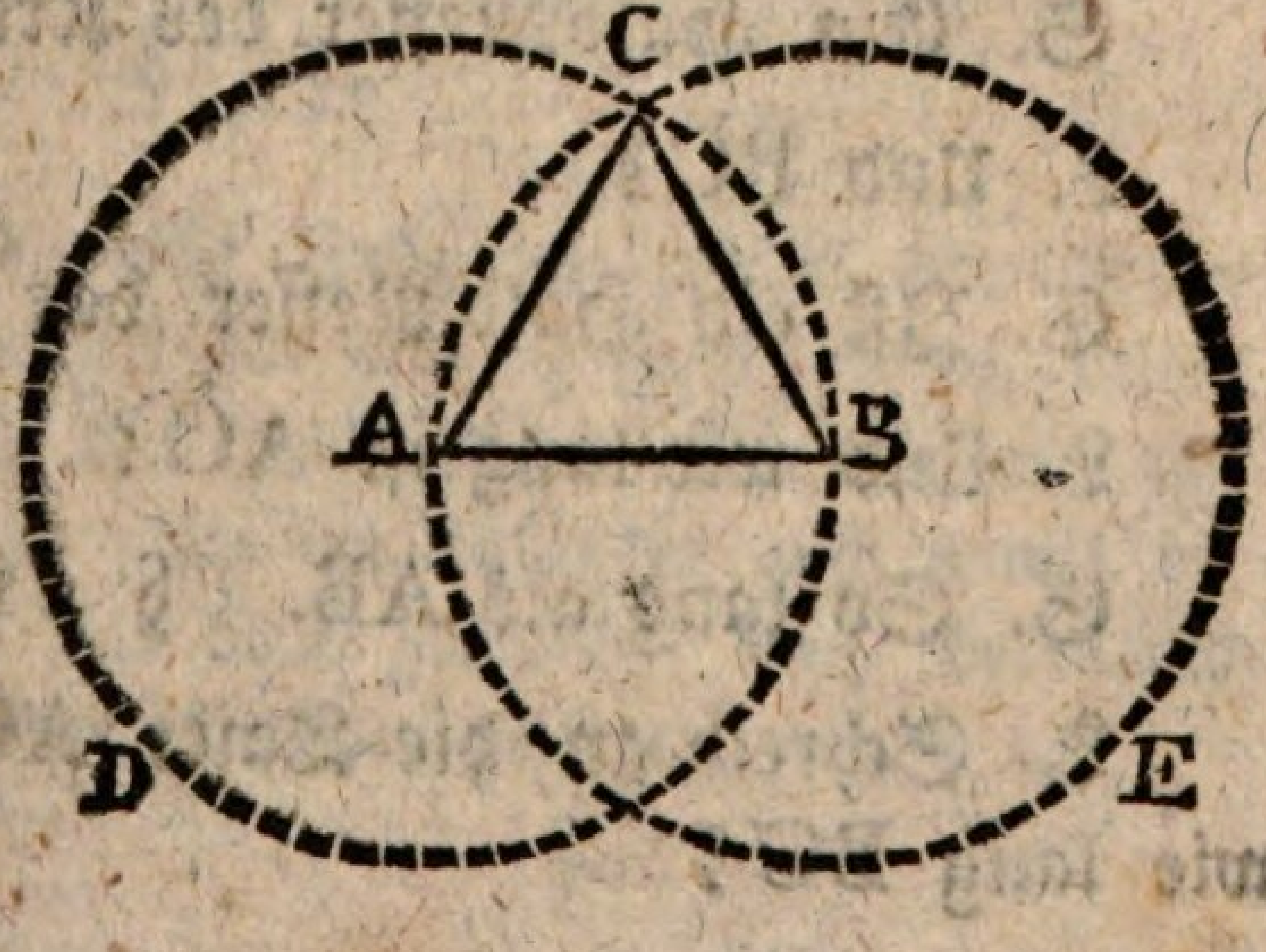
Der erste Satz.

§ 54.

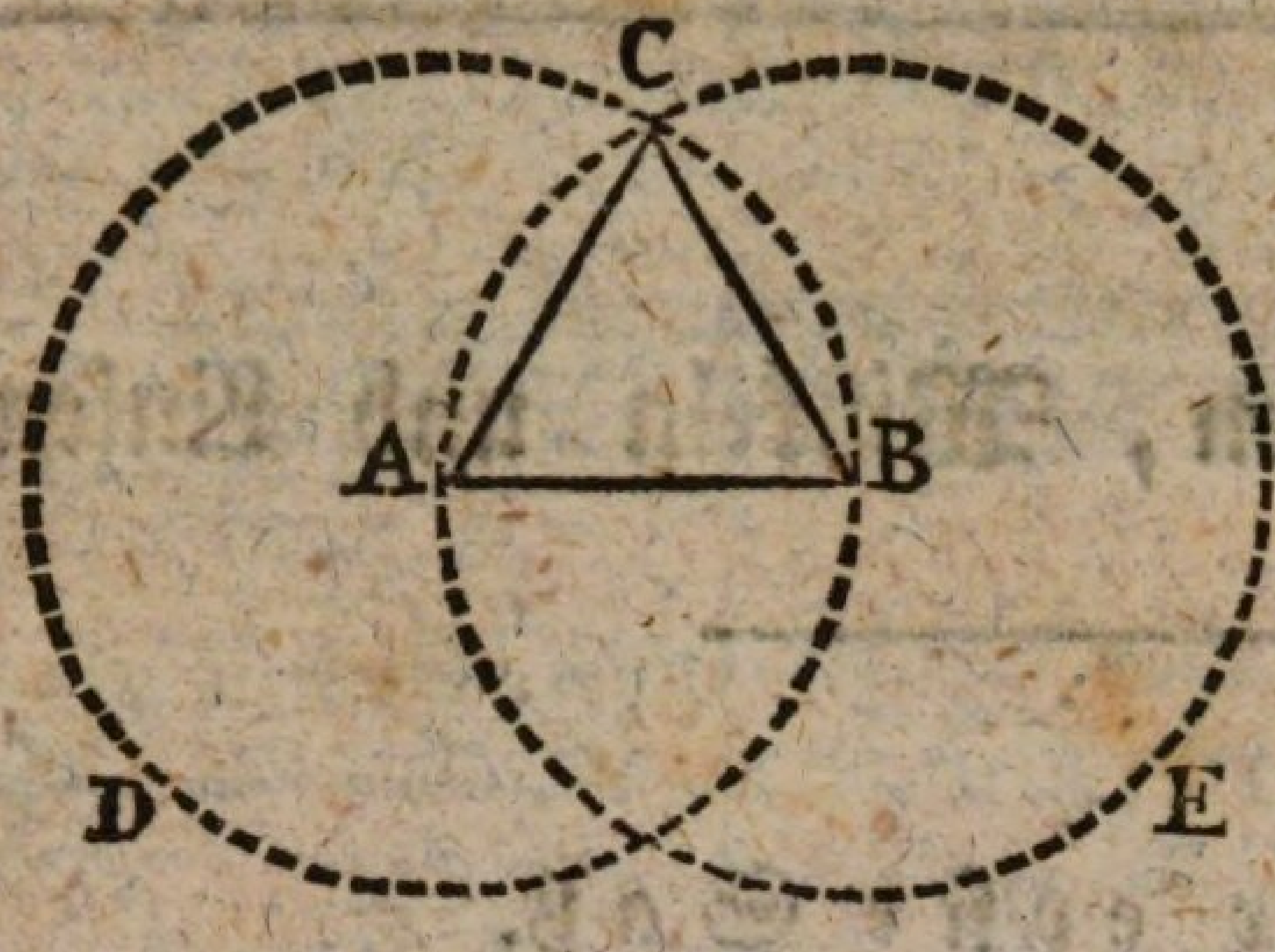
L. Das DreiEkke überhaupt möglich sind, ist noch zugestanden (§ 18): aber die Möglichkeit der verschiedenen Arten derselben ist noch zu erweisen. Solte, z. B., wol ein gleichseitiges DreiEkk, das heisst, eins von lauter gleichen Seiten, möglich seyn?

S. Ich solte meynen.

L. Aber kanst du eins verfertigen, wenn eine Seite AB gegeben wird? — (Da die Versuche vermutlich fruchtlos ausfallen werden; so fährt der Lehrer fort:) Aus A wird, mit dem HalbMesser AB, ein Kreis BCD beschrieben (§ 21). Auf gleiche Art wird aus B, mit eben dem Halb-



Messer,



Messer, ein zweiter Kreis ACE gezeichnet. — Welches Kreises HalbMesser ist nun AB? Des ersten um A, oder des zweiten um B beschriebenen?

S. AB ist HalbMesser beider Kreise, denn sie reicht von jedes Kreises MittelPunkte bis an seinen Umfang (§ 19.)

L. Nun solte ich meynen, müste sich das fernere Verfahren schon ergeben. Was ist nun weiter zu tuhn?

S. Ich ziehe von beiden MittelPunkten, A und B, nach einem der beiden DurchschnittsPunkte C, gerade Linien AC und BC (§ 7).

L. Das ist recht: nur muß bewiesen werden daß die Linien AC und BC eben so lang sind als AB. — Was ist AC für eine Linie?

S. Ein HalbMesser des Kreises BCD (§ 19).

L. Und BC?

S. Ist ein HalbMesser des Kreises ACE.

L. Und wie lang ist AC?

S. So lang als AB. (§ 21).

L. Schreib an die Tafel AC = AB — Und wie lang BC?

S.

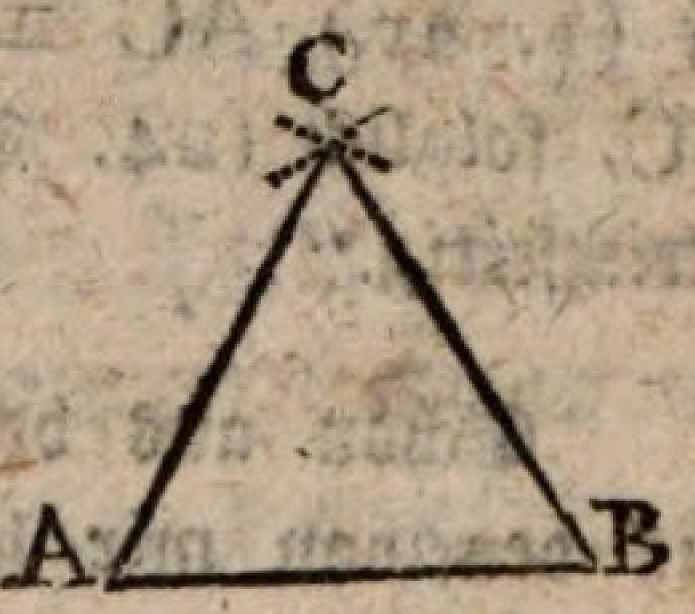
S. Auch als AB. (§ 21)

L. Schreib wieder an: BC = AB

Also AC = AB
und BC = AB } (§ 21).

S. folglich AC = BC (§ 31).

L. Also AB = AC = BC. Alle drei Seiten sind gleich lang. Es ist also nicht nur die Möglichkeit eines gleichseitigen DreiEkks erwiesen, sondern zugleich die Aufgabe aufgelöst: Ein gleichseitiges DreiEkk zu verfertigen, zu welchem eine Seite gegeben ist. — Es ist übrigens zu merken, daß die beiden Kreise nur zur Deutlichkeit des Beweises dienen; und daß zur blossen Ausübung, wo es auf Beweis nicht ankömt, ein Par Bögen, oder Stükke von



KreisLinien, um den DurchschnittsPunkt C zu finden hinlänglich sind. — Dieses gilt für gegenwärtigen und alle ähnliche Fälle.

§ 55.

L. Das war also eine Aufgabe, welche ein gleichseitiges DreiEkk zu verfertigen lehrte, und dadurch dessen Möglichkeit bewies. In den gewöhnlichen LehrBüchern siht der Vortrag anders aus. Um die Anfänger auch damit bekant zu machen, wollen wir diese Aufgabe nach Lorenzens Ausgabe der Elemente des Euklides hersetzen.

Auf-

Aufgabe.

„Auf einer gegebenen begrenzten geraden Linie, AB, einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben."

Auflösung.

„Aus dem Punkte A beschreibe (3. Post.) mit AB, den Cirkel BCD, und aus dem Punkte B mit BA, den Cirkel ACE. Vom Punkte C, in dem sich beide Cirkel schneiden, ziehe, (1. Post.) nach A, B, die geraden Linien CA, CB."

Beweis.

„Da (15. Def.) AC = AB, und BC = BA, so ist (1. Ax.) AC = BC. Demnach ist AC = AB = BC, folglich (24. Def.) der auf AB beschriebene △ CAB gleichseitig."

Schon aus dem Vortrage, und noch augenscheinlicher aus den von mir hinzugefügten UeberSchriften, ersiht man, daß die Aufgabe aus drei Stükken besteht: nämlich

1) der eigentlichen Aufgabe oder Foderung, welche etwas gibt, (hier eine gerade Linie) und daraus etwas zu finden, oder zu verfertigen begehrt; (hier ein gleichseitiges DreiEkk.)

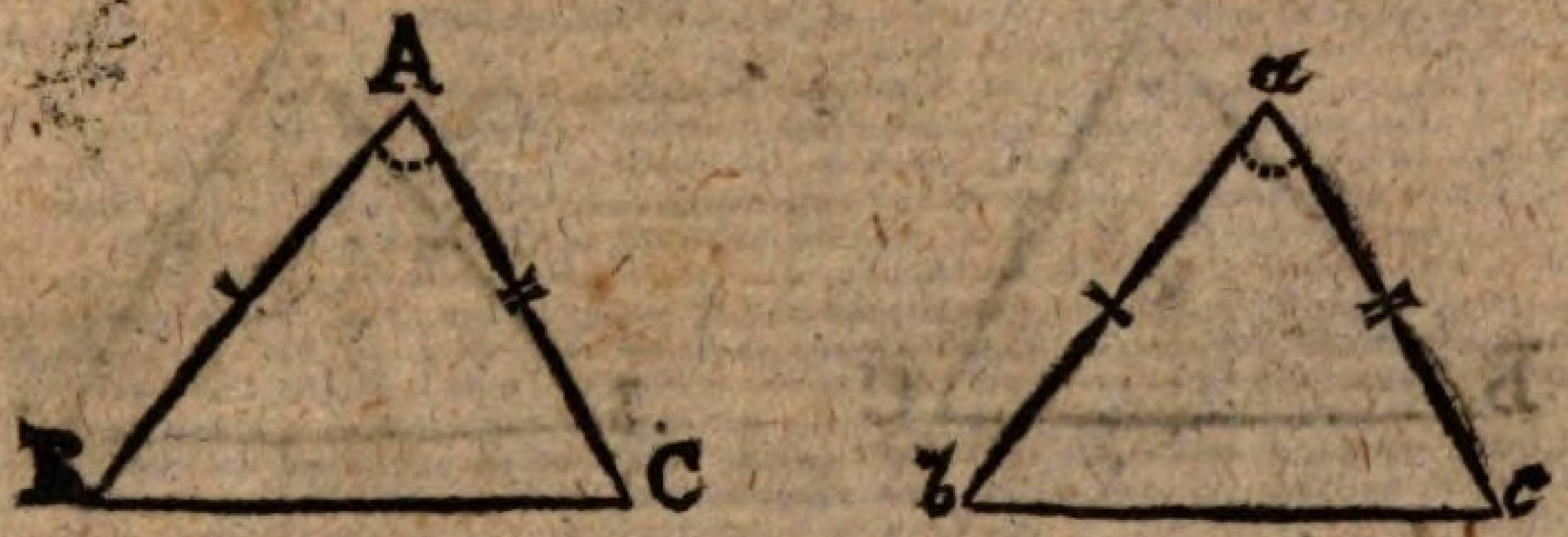
2) Der Auflösung, welche das Gesuchte aus dem Gegebenen finden lehrt.

3) Der Beweis welcher die Richtigkeit der Auflösung zeigt; das heisst, überzeugend dartuht, daß man wenn der Auflösung gemäß verfährt, man das Verlangte erhält.

Der

Der zweite Saz.

§ 56.



L. Hier sind zwei DreiEkke, ABC und abc, in denen

AB = ab,
AC = ac,
und ∠A = ∠a.

Wir schreiben das nicht nur an die Tafel, sondern bezeichnen noch überdis in den Figuren AB und ab mit einem QuerStriche, AC und ac mit zwei QuerStrichen, und die Winkel A und a mit kleinen Bögen. (Und so wollen wirs künftig immer halten). Wenn man nun den Punkt A auf den Punkt a, und die Linie AB auf ab legt, wo wird dan der Punkt B zu liegen kommen?

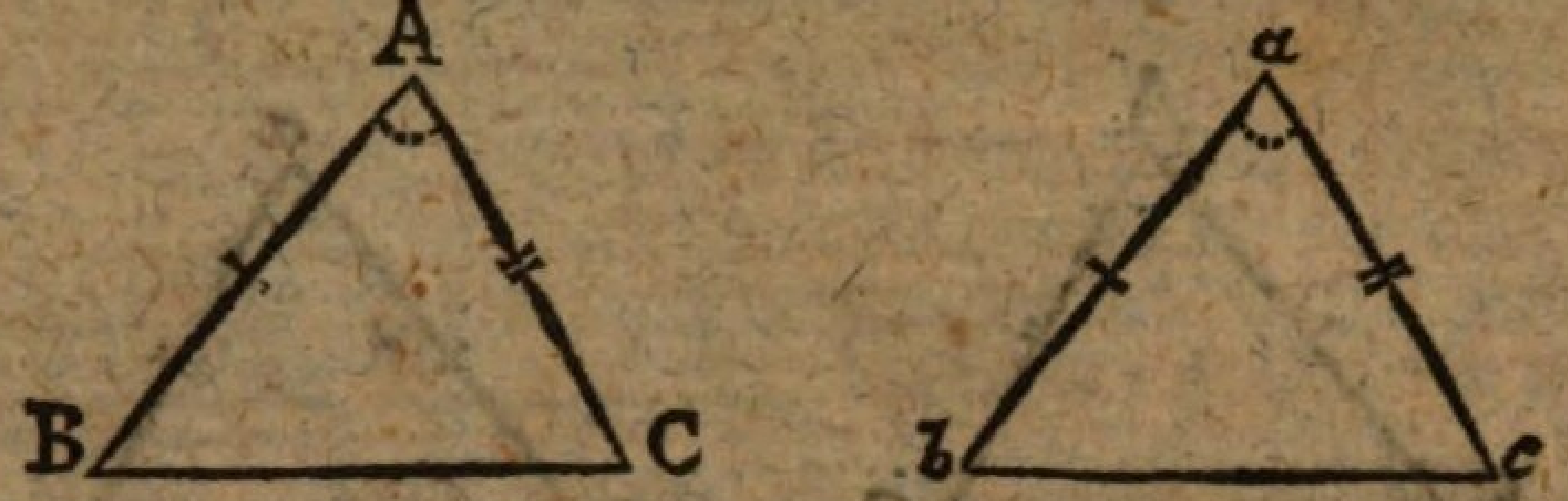
S. Auf b.

L. Woher das?

S. Weil AB und ab gleich lang sind, und gleich lange Linien sich dekken (§ 26).

L. Wo aber wird AC hinfallen?

S. Auf ac, weil die Winkel A und a gleich groß sind, und gleich grosse Winkel sich dekken (§ 30).



L. Und der Punkt C, wo wird der zu liegen kommen?

S. Auf c (§ 26).

L. Aber die Linie BC?

S. Da ihre EndPunkte B und C, wie schon erwiesen ist, auf b und c fallen; und gerade Linien die in zwei Punkten zusammen treffen, überall zusammen treffen (§ 12); so kan BC nicht anders als auf bc zu liegen kommen.

L. Also BC und bc dekken einander. Was folgt daraus?

S. Daß sie gleich lang sind (§ 26).

L. Wie ist es aber mit den Winkeln B und b, C und c?

S. Da alle Seiten beider DreiEkke, und deren EndPunkte auf einander fallen, oder einander dekken, so dekken sich auch die Winkel, und sind folglich einander gleich, nämlich B = b, und C = c, (§ 26)

L.

L. Also
$$\begin{aligned} AB &= ab \\ AC &= ac \\ BC &= bc \\ A &= a \\ B &= b \\ C &= c \end{aligned}$$

Das heisst: alle Seiten, und alle Winkel des Drei-Ekks ABC sind denen des DreiEkks abc nicht nur gleich; sondern haben auch, da die DreiEkke einander dekken, einerlei Lage gegen einander. Wodurch unterscheiden sich also beide DreiEkke?

S. Durch nichts.

L. Und wie nennt man das, wenn zwei Figuren sich durch nichts unterscheiden?

S. Sie sind gleich und ähnlich (§ 24).

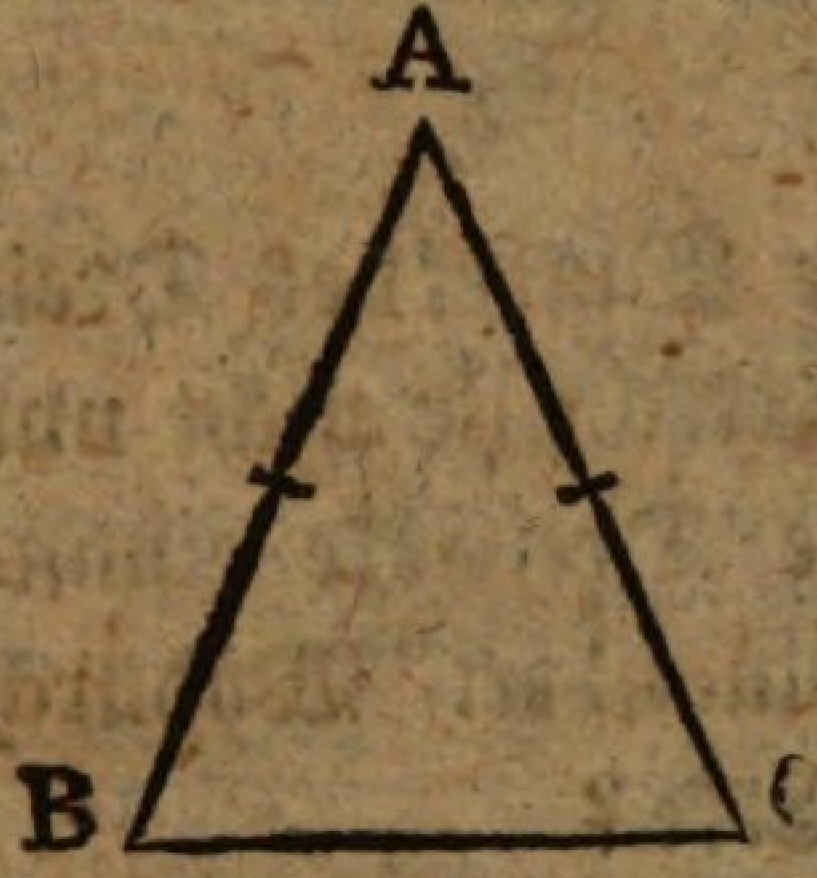
L. Wenn also von einem DreiEkke zwei Seiten einzeln genommen, und der dazwischen liegende Winkel, so groß sind als zwei Seiten mit dem dazwischen liegenden Winkel eines andern DreiEkks, was folgt daraus?

S. Dan sind beide DreiEkke einander gleich und ähnlich.

Der dritte Satz.

§ 57.

L. Es werden zwei unbestimmte gerade Linien gezogen, die in einem Punkte A zusammen stossen, oder einen Winkel bilden. Auf diesen Linien werden, in willkührlicher, aber gleicher Entfernung von A, die Punkte B und C bemerkt, und durch eine gerade Linie BC verbunden. — So entsteht ein DreiEkk ABC. Was wissen wir von dessen Beschaffenheit?



S. Es hat zwei gleiche Seiten, AB und AC.

L. Also AB = AC. Das wollen wir sogleich bemerken, auf der Tafel und an der Figur. — DreiEkke dieser Art, welche zwei gleiche Seiten haben, nennt man gleichschenklige. Die zwei gleiche Seiten heissen seine Schenkel; die dritte, den Schenkeln ungleiche Seite, heisst die Grundlinie. — Das DreiEkk ABC also hat zwei gleiche Seiten: aber hat es auch gleiche Winkel?

S. Die an der GrundLinie scheinen gleich zu seyn.

L. Sie scheinen es: aber sind sie es auch?

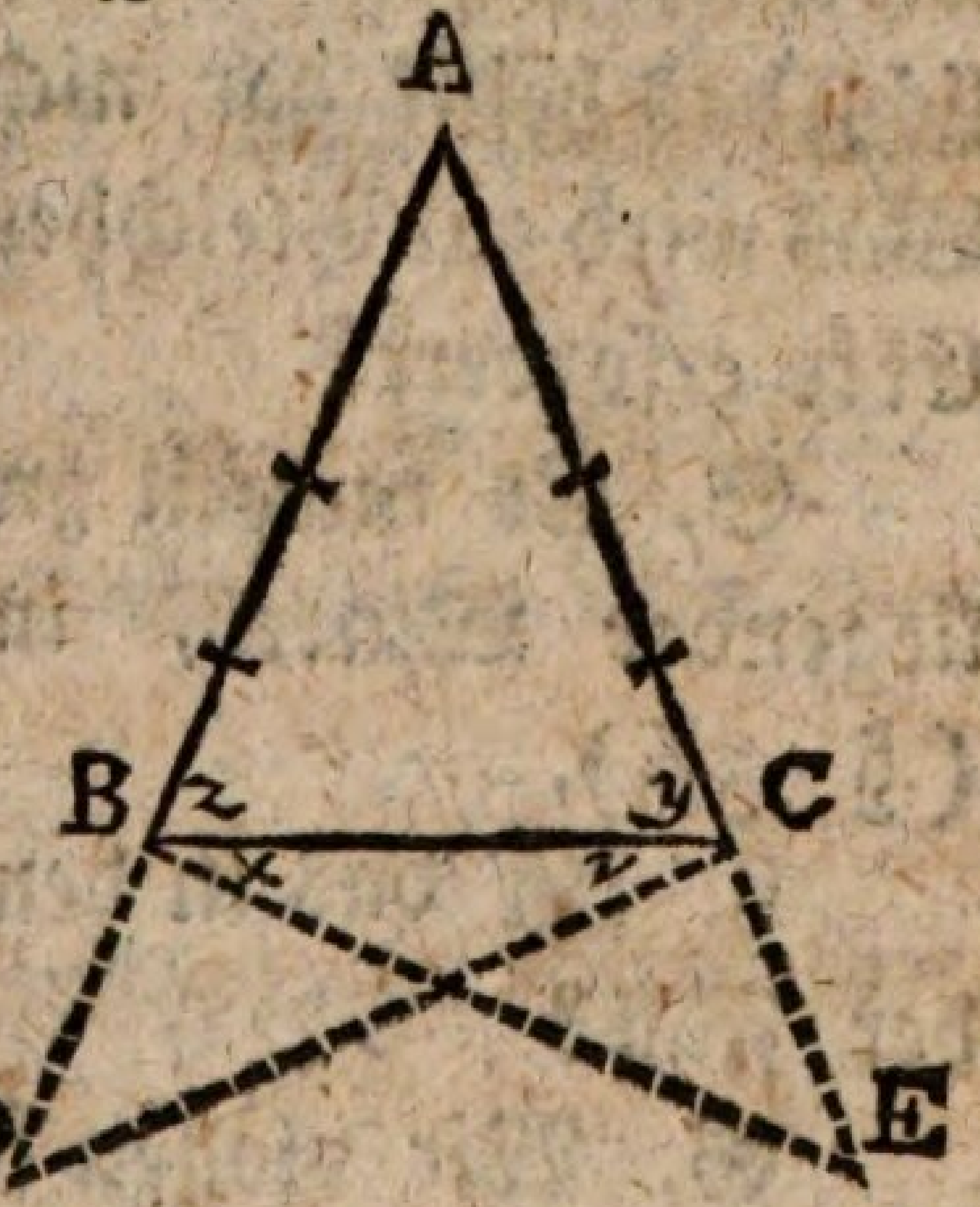
S. Man muß sie messen.

L. Wenn wir auch Winkel zu messen schon verstünden; so würde es uns hier doch nichts helfen,

denn die Geometer wollen nicht die Augen, sondern den Verstand überzeugen; und dazu ist das Messen nicht hinlänglich.

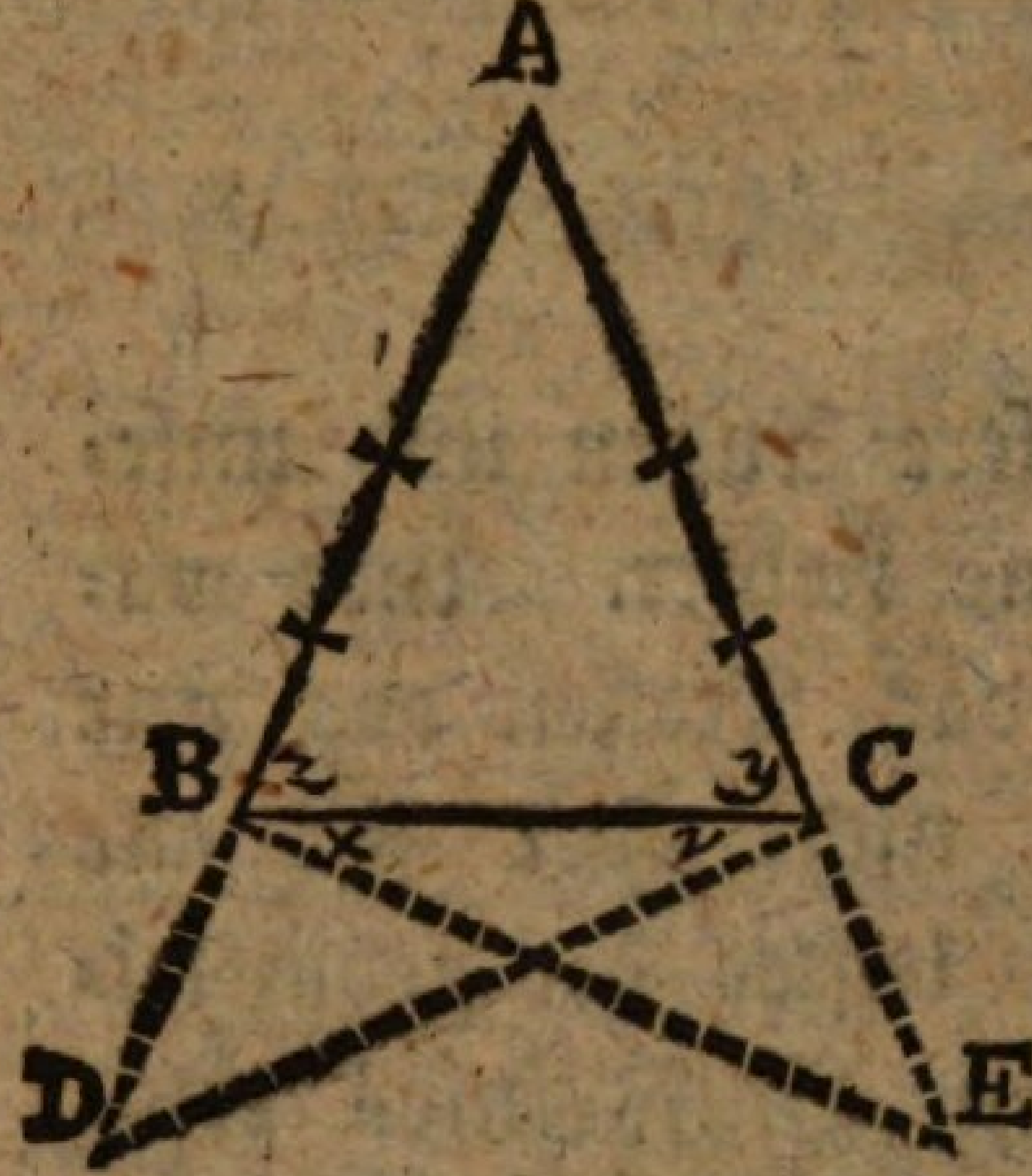
S. Und warum nicht?

L. Erstens sichern uns unsere Augen und unsere Werkzeuge nicht gegen kleine Fehler. Und wäre das auch nicht, so würde das Messen doch nur für den gegenwärtigen Fall, nicht aber für alle ähnliche, beweisen. Dis aber leistet der geometrische Beweis. — Dazu werden Hülfs-Linien erfodert. Zuerst werden die Seiten AB und AC, über B und C hinaus unbestimmt verlängert. Dan wird AD gleich AE gemacht; und zulezt werden die Linien BE und CD gezogen. — Der Bequemlichkeit wegen wollen wir die Winkel über der Grund-Linie mit z und y, und die zunächst darunter liegenden mit x und v bezeichnen. Der Winkel ABE heisst nun z + x und der Winkel ACD heisst y + v. Diese Winkel z + x und y + v müssen wir nun zuerst mit einander vergleichen; und finden wir sie gleich groß, so vergleichen wir auch x und v. Und sind auch die gleich groß, was wird die Folge davon seyn?



S. Daß z und y auch gleich groß sind (§ 37).

L. Richtig! — Aber die Vergleichung der Winkel z + x und y + v mit einander kan nicht anders geschehn, als durch Vergleichung der DreiEkke denen sie gehören. Zuerst der Winkel z + x: welchem DreiEkke gehört der?



S. Dem DreiEkke ABE?

L. Und der Winkel y + v?

S. Dem DreiEkke ACD.

L. Recht! — Nun müssen wir untersuchen, ob diese DreiEkke gleich und ähnlich, das heisst gar nicht zu unterscheiden sind (§ 24). Was wird zur Gleichheit und Aehnlichkeit zweier DreiEkke erfordert?

S. Es müssen zwei Seiten, und ein dazwischen liegender Winkel, in einem wie im andern seyn (§ 56).

L. Ist das in den DreiEkken ABE und ACD der Fall?

S. Wir wollen sehen. — Zuerst ist AC=AB; ferner ist AD=AE, vermöge der Verfertigung.

L. Die gleichen Seiten wären also da; aber wo sind die gleichen Winkel? Welches ist in dem DreiEkke ABE der zwischen den bezeichneten Seiten liegende Winkel?

S. Der Winkel A.

L. Und in dem DreiEkke ACD?

S. Auch der Winkel A.

L. Nun also an die Tafel geschrieben:

$$\begin{array}{l} AC = AB \text{ (VorausSetzung)} \\ AD = AE \text{ (Verfertigung)} \\ \underline{\quad A = A \text{ (§ 29).}} \\ \triangle ABE \cong \triangle ACD \text{ (§ 56)} \end{array}$$

Was folgt noch weiter aus der Gleichheit und Aehnlichkeit der DreiEkke ABE und ACD?

S. Es müssen alle Seiten und Winkel in einem wie im andern seyn; nämlich

$$\left.\begin{array}{r} CD = BE \\ \angle y+v = \angle z+x \\ \text{und } \angle D = \angle E \end{array}\right\} \text{(§ 24, 56).}$$

L. Also $y + v = z + x$! So weit wären wir. Was ist nun weiter zu tuhn?

S. Die Gleichheit von v und x zu beweisen.

L. Welchen DreiEkken gehören diese Winkel v und x?

S. Den DreiEkken BCD und CBE.

L. Haben diese auch die Zeichen der Gleichheit und Aehnlichkeit?

S. $BC = CB$ (§ 29)

$$\left.\begin{array}{r} BE = CD \\ \angle D = \angle E \end{array}\right\} \text{(§ 57).}$$

L. Das ist zwar richtig, aber beweist nichts. Welche Lagen müssen die gleichen Winkel haben, wenn Gleichheit und Aehnlichkeit soll erwiesen werden?

S. Zwischen den gleichen Linien (§ 56).

L. Die Lage aber haben sie hier nicht; sondern der Winkel D ist eingeschlossen von den Seiten CD und DB; und der Winkel E ⸗ ⸗ ?

S. Von den Seiten BE und EC.

L. Was ist nun hier für Rat? — Solten die Linien DB und EC nicht auch gleich seyn?

S. Ich weis es nicht.

L. Wie lang ist AD?

S. So lang wie AE, nach der Verfertigung.

L. Und wie lang AB?

S. So lang als AC.

L. Also $$\left.\begin{array}{l} AD = AE \\ \text{und } AB = AC \end{array}\right\} \text{(Verfert.)}$$

Da die Linien AD und AE jede aus zwei Teilen zusammen gesetzt sind; nämlich

$$\left.\begin{array}{l} AD = AB + BD \\ \text{und } AE = AC + CE \end{array}\right\} (45).$$

so kan man

für AD = AE

setzen AB + BD = AC + CE (§ 27).

Wenn man nun auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die gleichen Grössen AB und AC wegnimmt, was bleibt dan übrig?

S. BD = CE (§ 37).

L. Nun haben wir

BD = CE

CD = BE

und ∠D = ∠E

Was ist die Folge davon?

S.

S. Daß $\triangle BCD \cong \triangle CBE$ (§ 56).

$\angle v = \angle x$ (§ 24).

L. Aber $y + v = z + x$ (§ 57).
Nun zu beiden Seiten des GleichheitsZeichens die gleichen Grössen v und x weggenommen?

S. Bleibt $y = z$ (§ 37).

L. Da haben wir wieder einen LehrSaz. Wie lautet er?

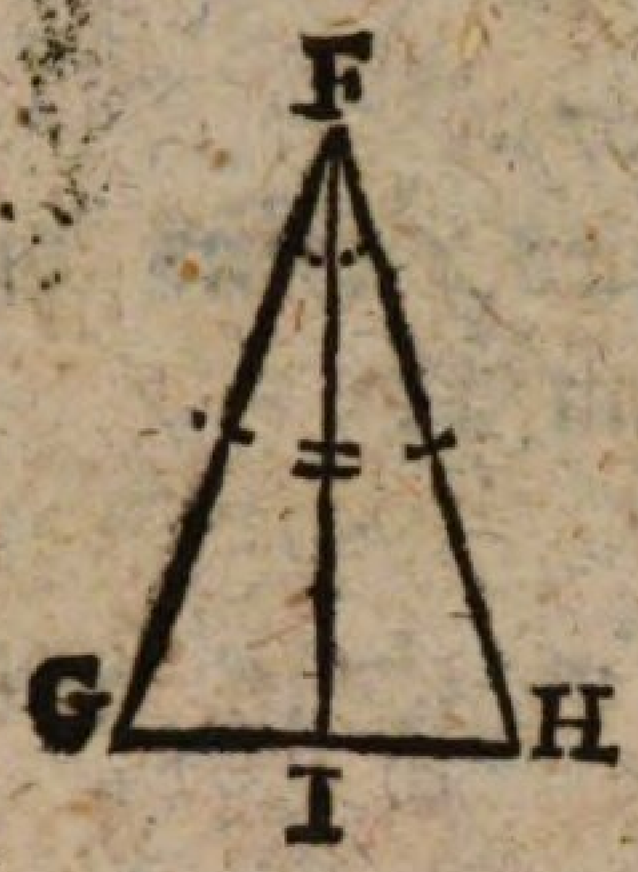
S. **In gleichschenkligen DreiEkken, sind die Winkel an der Grundlinie gleich.**

§ 58.

Der Beweis dieses Sazes hat Schwirigkeiten für im Denken noch ungeübte Anfänger. Man muß sich daher ja nicht übereilen, und ihn mit einem Mal abfertigen wollen. Für die erste Lection wird es hinlänglich seyn, die Zeichnung zu verfertigen, und eine allgemeine Uebersicht des Beweises zu geben. Da die HauptSchwirigkeit darin besteht, daß die DreiEkke ABE und ACD in einander greifen, und verkehrt gegen einander stehn; so wird man wohl tuhn, diese besonders, auf Papier oder Pappe, zu zeichnen, und auszuschneiden. Eben so kan mans mit den DreiEkken BCE und CBD machen.

Sollte das alles vergebens seyn; so sind noch zwei andere Wege. Der erste: sich vorläufig mit der allgemeinen Uebersicht, oder oberflächlichen Kentniß des Beweises zu begnügen, die weitere Ausführung aber, und bessere Einsicht, bis zu einem folgenden Cursus zu verspaDer zweite: den Beweis nach Wolfs, oder Kästners Art zu führen. — Da der wolfische Beweis, (nicht der in den deutschen, sondern in den lateinischen AnfangsGründen der Geometrie) der leichteste und das Werk worin er steht, nicht in jedermanns Händen ist, so will ich ihn hier hersetzen.

Lehr-Satz.



In einem gleichschenkligen Drei-Ekke FGH sind die Winkel G und H an der GrundLinie gleich groß.

Beweis: Eine gerade Linie FI teile den Winkel F in zwei gleiche Teile; so wird, durch eben diese TeilungsLinie F das DreiEkk FGH in zwei gleiche und ähnliche DreiEkke FIG und FIH zerschnitten. Denn es ist

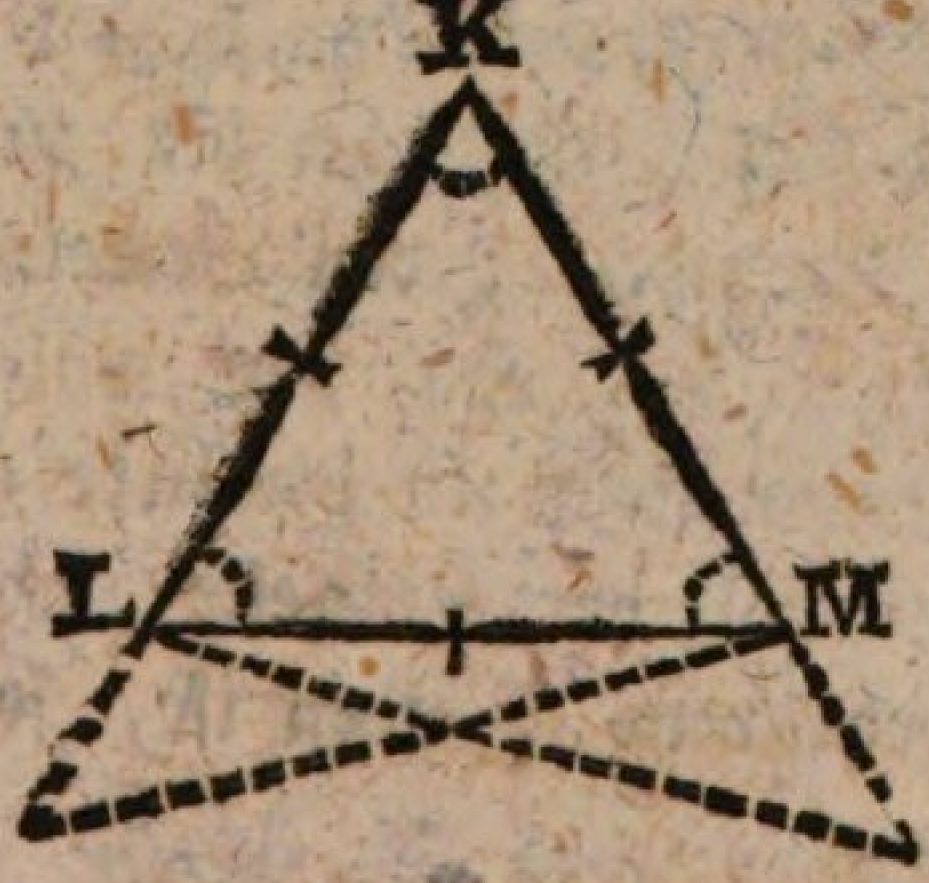
FG = FH (VorausSetzung)
FI = FI (§ 29)
∠IFG = ∠IFH (Verfert.)

△FIG ≌ △FIH (§ 56)

(Wolfii elementa geometriae § 180).

Wenn dieser Beweis einen Fehler hat, so besteht er darin, daß angenommen wird, ein Winkel könne gehalbt, oder in zwei gleiche Teile geteilt werden; welches noch nicht erwiesen ist. Aber auch wir haben ja, und zwar mit dem Euklides, angenommen, daß eine gerade Linie senkrecht auf der andern stehn, oder zu beiden Seiten rechte Winkel machen könne, (§ 49), ohne die Möglichkeit gezeigt zu haben.

§ 59.



L. Da ein gleichseitiges DreiEkk KLM auch zwei gleiche Seiten hat, und also als gleichschenklig kan betrachtet werden; so passt der ganze von dem gleichschenkligen geführte Beweis auch auf das gleich-

gleichseitige. Da nämlich KL = KM, so folgt daraus?

S. Daß ∠L = ∠M.

L. Aber nicht genug daß KL = KM, es ist auch KL = LM (§ 54) Was folgt daraus?

S. Daß auch ∠K = ∠M.

L. Also ∠K = ∠M = ∠L. Wir haben also noch einen Zusatz zu obigem LehrSatze: der heisst = = ?

S. In einem gleichseitigen DreiEkke sind alle Winkel gleich groß.

Der vierte Saz.

§ 60.

L. Daß ein gleichschenkliges DreiEkk zwei gleiche Winkel hat, davon sind wir also überzeugt (§ 57): aber sind wirs auch von dem GegenSatze? Sind wir [redacted] auch überzeugt daß ein DreiEkk von zwei gleichen Winkeln gleichschenklig sei?

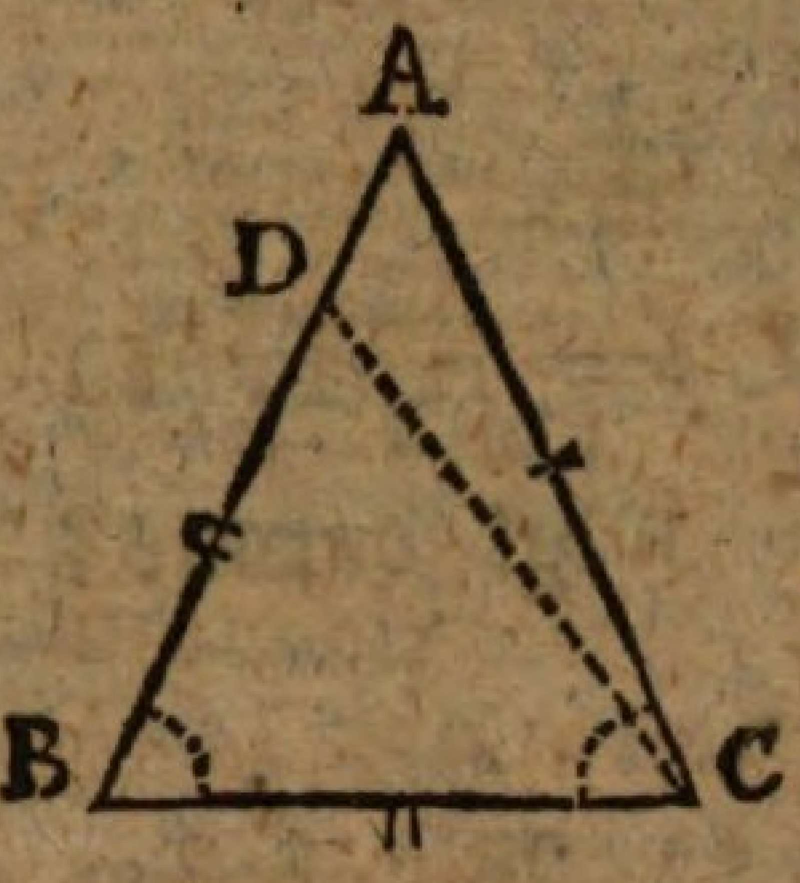
S. Ich weis es nicht.

L. Alles Stroh ist brenbar; aber folgt daraus daß alles was brenbar ist Stroh sei?

S. Nein.

L. Also lässt sich nicht jeder Saz umkehren; sondern der GegenSaz erfodert, um Ueberzeugung zu

bewirken, ſeinen eigenen Beweis. — Hier iſt ein DreiEkk ABC mit zwei gleichen Winkeln B und C. Wie erforſchen wir nun die Gleichheit der Seiten AB und AC?



S. Wenn das Meſſer erlaubt wäre, ſo könte mans bald erfahren.

L. Nein, das gilt nicht (§ 57) — Wir wollen einmal annehmen AB und AC wären ungleich, und ſehn was daraus folgt. Kommen Unmöglichkeiten, das heiſſt, Dinge zum Vorſchein, die anerkanten und erwieſenen Wahrheiten widerſprechen, was können wir dan überzeugt ſeyn?

S. Daß wir etwas Falſches angenommen, oder zum Grunde gelegt haben.

L. Richtig! — Sind AB und AC ungleich, ſo iſt die erſte Folge davon = =?

S. Daß eine länger, die andre kürzer ſeyn müſſe, als die andre.

L. Recht! — Wir wollen alſo annehmen AB ſei länger als AC, und um beide gleich zu machen, wollen wir von AB den Ueberſchuß AD abſchneiden, ſo daß nun

DB = AC;

gelte; und wollen die Linie DC ziehn. — Nach dieſen Vorbereitungen wollen wir die DreiEkke ABC und DCB mit einander vergleichen, und ſehn

ob

ob wir die KennZeichen der Gleichheit und Aehnlichkeit an ihnen finden.

S. Sie können unmöglich gleich seyn, denn DCB ist ja nur ein Teil von ABC, und das Ganze ist grösser als sein Teil (§ 51).

L. Darin eben wird die Ungereimtheit und Unmöglichkeit bestehn, wenn wir das Teil dem Ganzen gleich finden. — Zuerst also die dem DreiEkke DCB gehörige Seite DB. Ist in dem grössern DreiEkke ABC keine zu finden die ihr gleich wäre?

S. Wir haben wenigstens angenommen daß
DB = AC.

L. Haben beide DreiEkke sonst nichts gleich, oder gemein, es sei an Winkeln, oder an Seiten?

S. Ja, die Seite BC, und der Winkel B sind beiden gemein.

L. Das ist zwar richtig; nur in dem DreiEkke ACB hat der Winkel B nicht die erfoderliche Lage, zwischen den beiden bekanten Seiten AC und CB (§ 56). Dem Winkel B muß ein andrer Winkel des DreiEkks ACB gleich seyn.

S. $\angle B = \angle C$, nach der VorausSezung.

L. In den DreiEkken DBC und ACB also ist:
DB = AC (Annehm.)
BC = CB (§ 29).
$\angle B = \angle C$ (VorausS.)
Folglich = = ?

S. $\triangle DBC \cong \triangle ACB$ (§ 56)

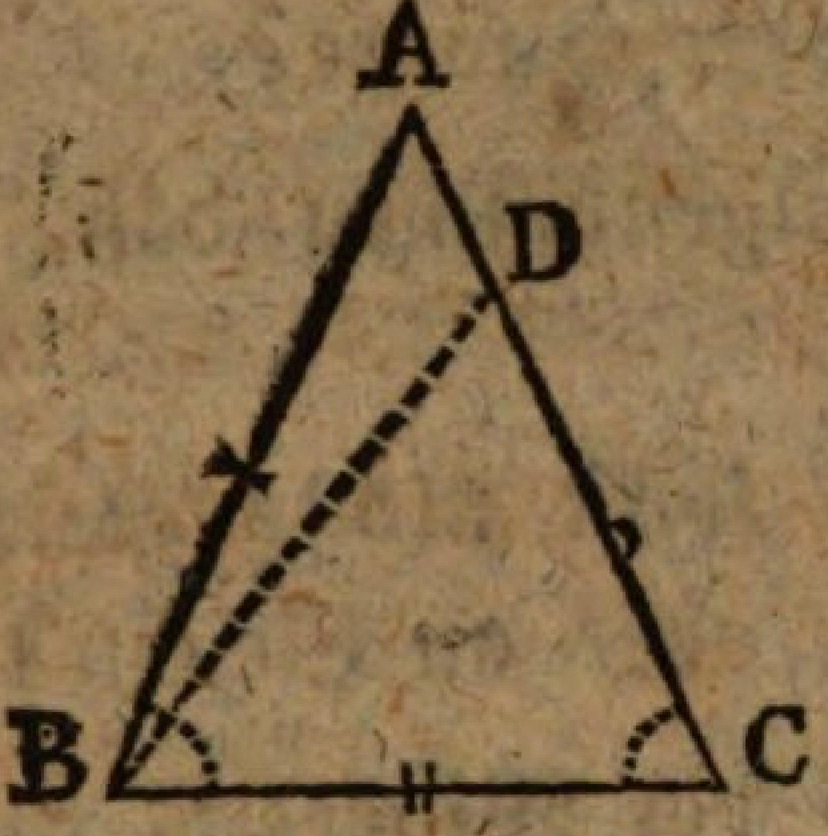
L.

L. Also der Teil DBC ist dem Ganzen ACB gleich! Woher diese Ungereimtheit?

S. Weil wir angenommen haben AB wäre länger als AC.

L. Das also ist unmöglich. Aber könte nicht AB kürzer seyn als AC?

S. Dan machte ich es mit AC wie vorhin mit AB; schnitte den Ueberschuß AD ab.



L. Ganz recht! Und man darf nur in der Zeichnung, die Buchstaben B und C gegen einander vertauschen, so passt der ganze vorige Beweis, und es kömt die vorige Ungereimtheit zum Vorschein. Und woher das?

S. Weil wir AC länger angenommen als AB?

L. Da also AC weder länger, noch kürzer seyn kan als AB, was bleibt übrig?

S. Daß AC = AB.

L. Wenn also ein DreiEkk zwei gleiche Winkel hat = = ?

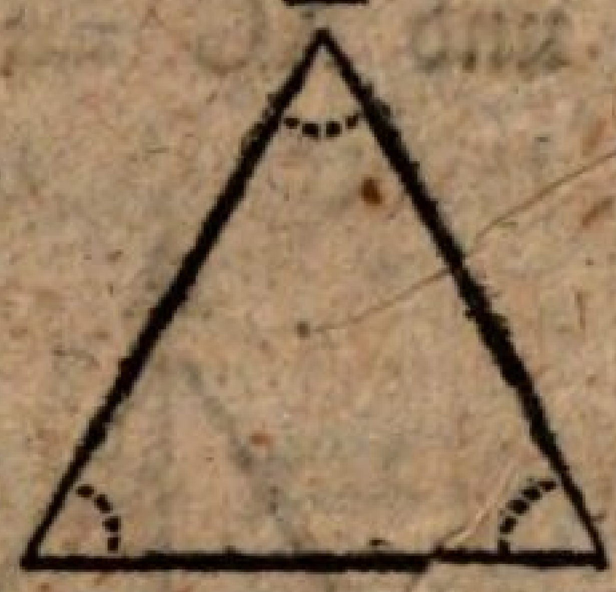
S. So hat es auch zwei gleiche Seiten.

L. Aber welches sind die gleichen Seiten? Welche Lage haben sie?

S. Sie liegen den gleichen Winkeln gegenüber.

§ 61.

L. Wenn aber ein DreiEkk EFG lauter gleiche Winkel hätte? oder $\angle E = \angle F = \angle G$ wäre?



S. 1) $\angle F = \angle G$

$\overline{EF = EG}$ (§ 60)

2) $E = \angle G$

$\overline{GF = EG}$ (§ 60)

$\overline{GF = EG (2) = EF}$ (1)

L. Ein DreiEkk, als was lauter gleiche Winkel hat , , ?

S. Ist gleichseitig

§ 62.

Die in dieser LehrSatze gebrauchte BeweisArt, welche nicht geradezu beweiset daß die Sache so ist; sondern zeigt das GegenTeil , unmöglich, heisst die apagogische BeweisArt. Sie findet Stat wo die directe BeweisArt keine Anwendung findet, welches bei umgekehrten Sätzen, wie der gegenwärtige, gewöhnlich der Fall zu seyn pflegt; zuweilen aber auch bei andern.

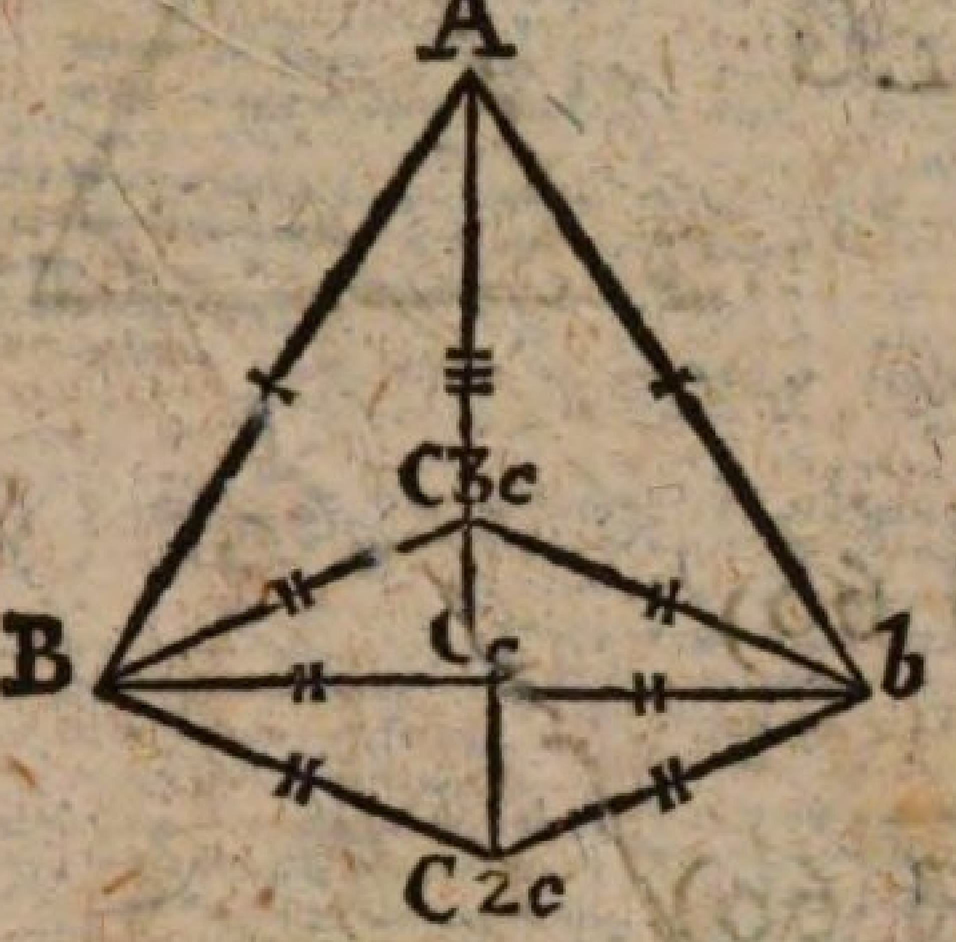
Der fünfte Satz.

§ 63.

L. Zwei DreiEkke ABC und abc von ähnlich-gleichem Umfange; das heisst in welchen

AB

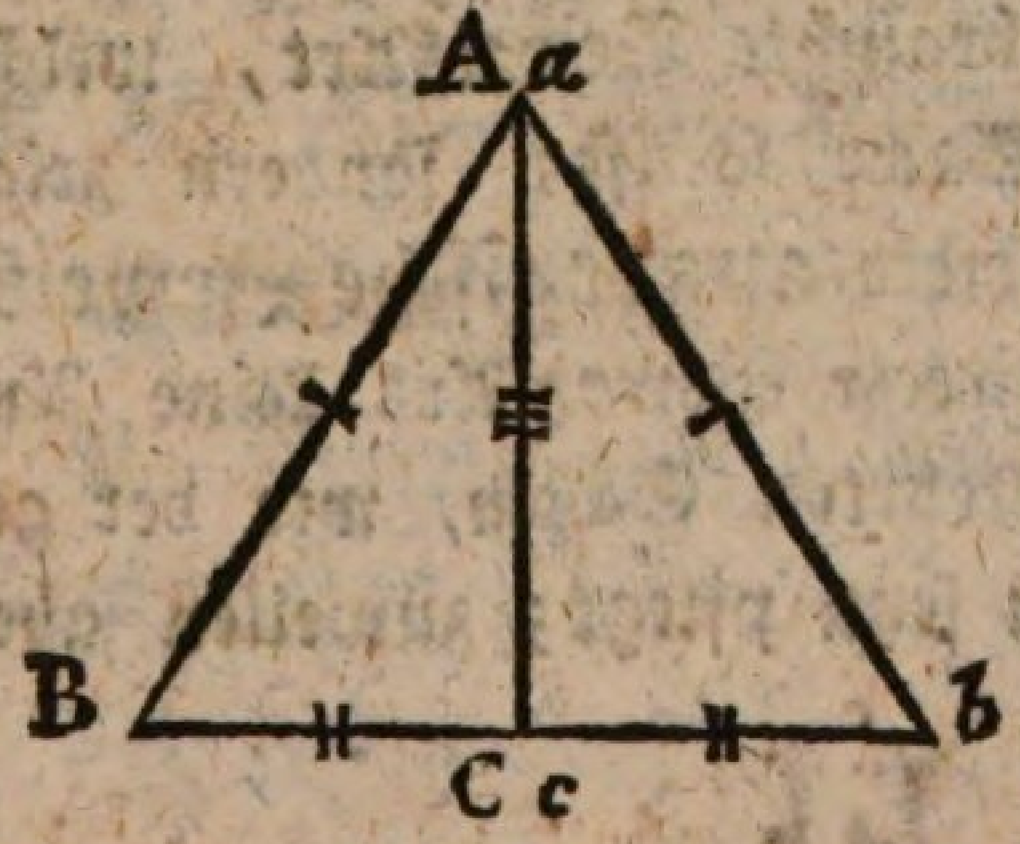
AB = ab
BC = bc
und AC = ac;



werden so gestellt, daß zwei gleiche Seiten, AC und ac, einander dekken (§ 26) die ihnen gegenüber stehenden Winkel B und b aber, nach entgegengesetzten Seiten zu liegen kommen. So sind für Cc dreierlei Lagen, oder Stellungen möglich. Welches sind die?

S. Die erste mit B und b in gerader Linie, ist die mittelste. Die zweite unter Bb; und die dritte über Bb.

L. Wir wollen nun untersuchen ob die DreiEkke ABC und abc in allen drei Stellungen gleich und ähnlich sind, und bei der mittelsten, da Cc mit B und b in gerader Linie liegt, anfangen. — Die beiden DreiEkke ABC und abc können in dieser Lage als ein einziges DreiEkk ABb angesehen werden (§ 19). Was ist uns von diesem DreiEkke ABb bekant?



S. Es hat zwei gleiche Seiten, AB = Ab.

L. Das heisst es ist gleichschenklig (§ 57). Und was haben DreiEkke dieser Art sonst noch für Eigenschaften?

S. Die Winkel an der GrundLinie, B und b, sind gleich.

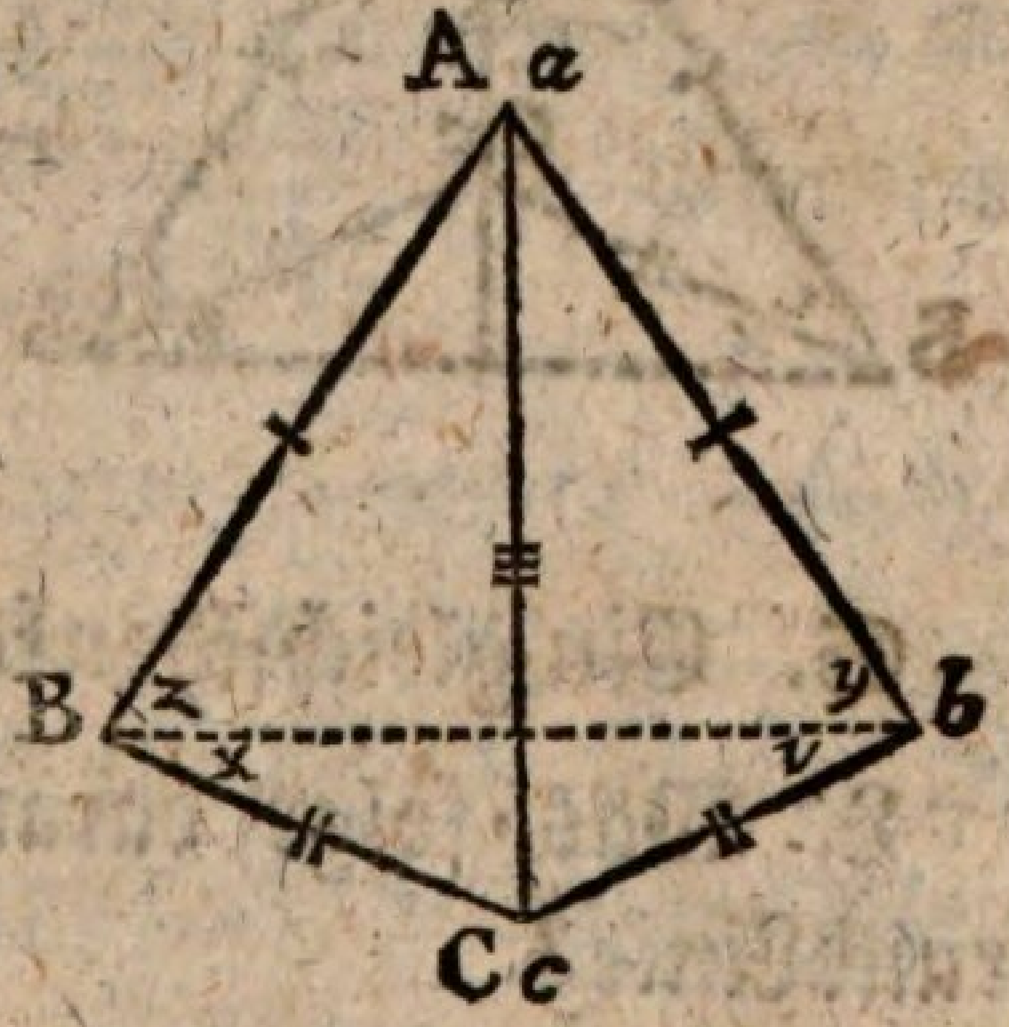
L. Nun wollen wir die DreiEkke ABC und abc wieder trennen, und jedes für sich betrachten. Was haben sie Gleiches?

S. $\left.\begin{array}{l} AB = ab \\ BC = bc \end{array}\right\}$ (VorausS.)

$B = b$ (§ 63).

$\triangle ABC \cong \triangle abc$ (§ 56).

L. Mit der ersten Lage wären wir also fertig. Nun zur zweiten! — Die Linie Bb dient hier als Hülfs-Linie, denn sie macht eine zum Beweise nötige Abteilung, nämlich die DreiEkke BbA und BbC. — Was für ein DreiEkk ist BbA?



S. Ein gleichschenkliges (§ 57), denn AB = ab.

L. Und das DreiEkk BbC?

S. Auch ein gleichschenkliges, weil BC = bc.

L. Was folgt daraus daß BbA gleichschenklig ist?

S. Daß z = y (§ 57).

L. Und daraus daß BbC gleichschenklig ist?

S. Folgt daß $x = v$.

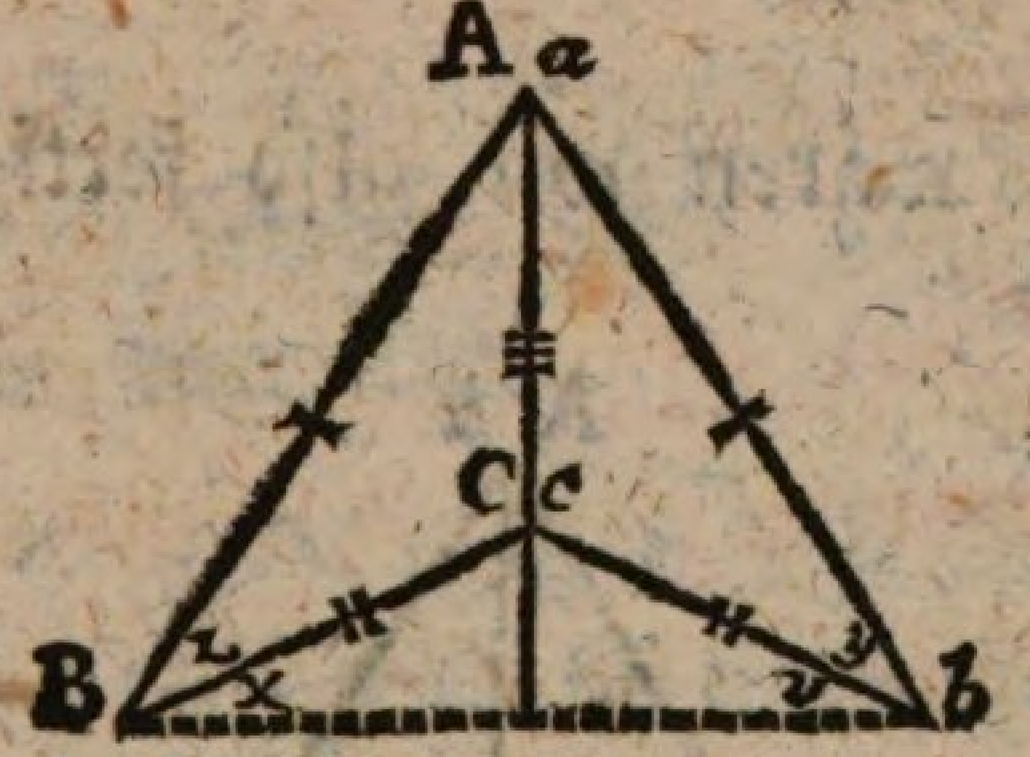
L. Also $z = y$,
und $x = v$.
Was ist nun mehr: $z + x$, oder $y + v$?

S. $z + v = y + v$ (§ 36).

L. In den DreiEkken ABC und abc ist also:

$$\left.\begin{array}{l} AB = ab \\ BC = bc \end{array}\right\} \text{(VorausS.)}$$
$$\underline{z+x = y+v} \text{ (§ 63)}$$

S. $\triangle ABC \cong \triangle abc$ (§ 56).



L. Nun zur dritten Lage! Welches ist die?

S. Wo C zwischen A und Bb liegt.

L. Die Linie Bb ist hier wieder als HülfsLinie nötig. — Was für ein DreiEkk ist ABb?

S. Ein gleichschenkliges (§ 57).

L. Was folgt daraus für die Winkel an der GrundLinie?

S. $z+x = y+v$ (§ 57).

L. Welcher von den Winkeln x und v ist wol der gröste?

S. Das DreiEkk CBb, dessen Winkel an der GrundLinie sie sind, ist auch gleichschenklig; folglich $x = v$.

L.

L. Also $z + x = y + v$
und $x = v$

S. Folglich $z = y$ (§ 37).

L. Haben wir nun in den DreiEkken ABC und abc alle KennZeichen der Gleichheit und Aehnlichkeit?

S. Ja. Denn $\left.\begin{array}{l} AB = ab \\ AC = ac \end{array}\right\}$ (VorausS.)
$z = y$ (§ 63)

$$\triangle ABC \cong \triangle abc.$$

L. Nun sind wir also auch mit der dritten Lage fertig; und da unter der vorausgesetzten Bedingung mehr Lagen für C und c nicht möglich sind; so wollen wir nun alle einzelne Fälle noch ein Mal betrachten, um zu sehn, was für ein allgemeiner Schluß sich daraus ziehn läßt.

S. Alle drei Fälle besagen einerlei; nämlich: Wenn in zwei DreiEkken jede einzelne Seite des einen gleich ist einer einzelnen Seite des andern; so sind beide DreiEkke einander gleich und ähnlich.

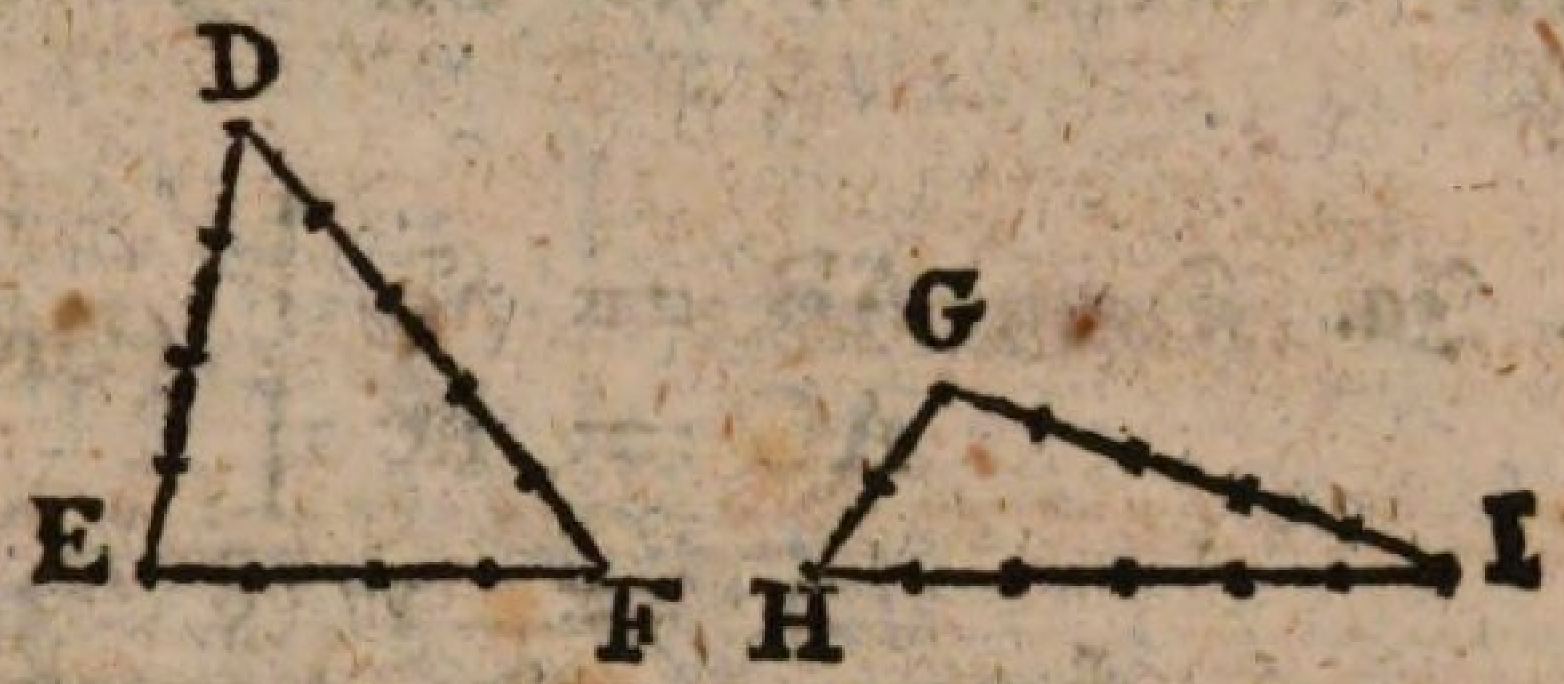
L. Wir haben also nun ein zweites MerkMal der Gleichheit und Aehnlichkeit der DreiEkke, welches wir uns wohl einprägen müssen, um gelegentlich Gebrauch davon machen zu können.

(Solte der Lehrling, wie zu vermuten ist, den Umstand, daß jede einzelne Seite einer einzelnen gleich seyn müsse, übersehn; so kan man ihn seiner UeberEilung leicht überfüh-

ren, wenn man zwei DreiEkke, DEF und GHI zeichnet, wo alle Seiten des einen zusammen genommen gleich sind den Seiten des andern auch zusammen genommen; oder

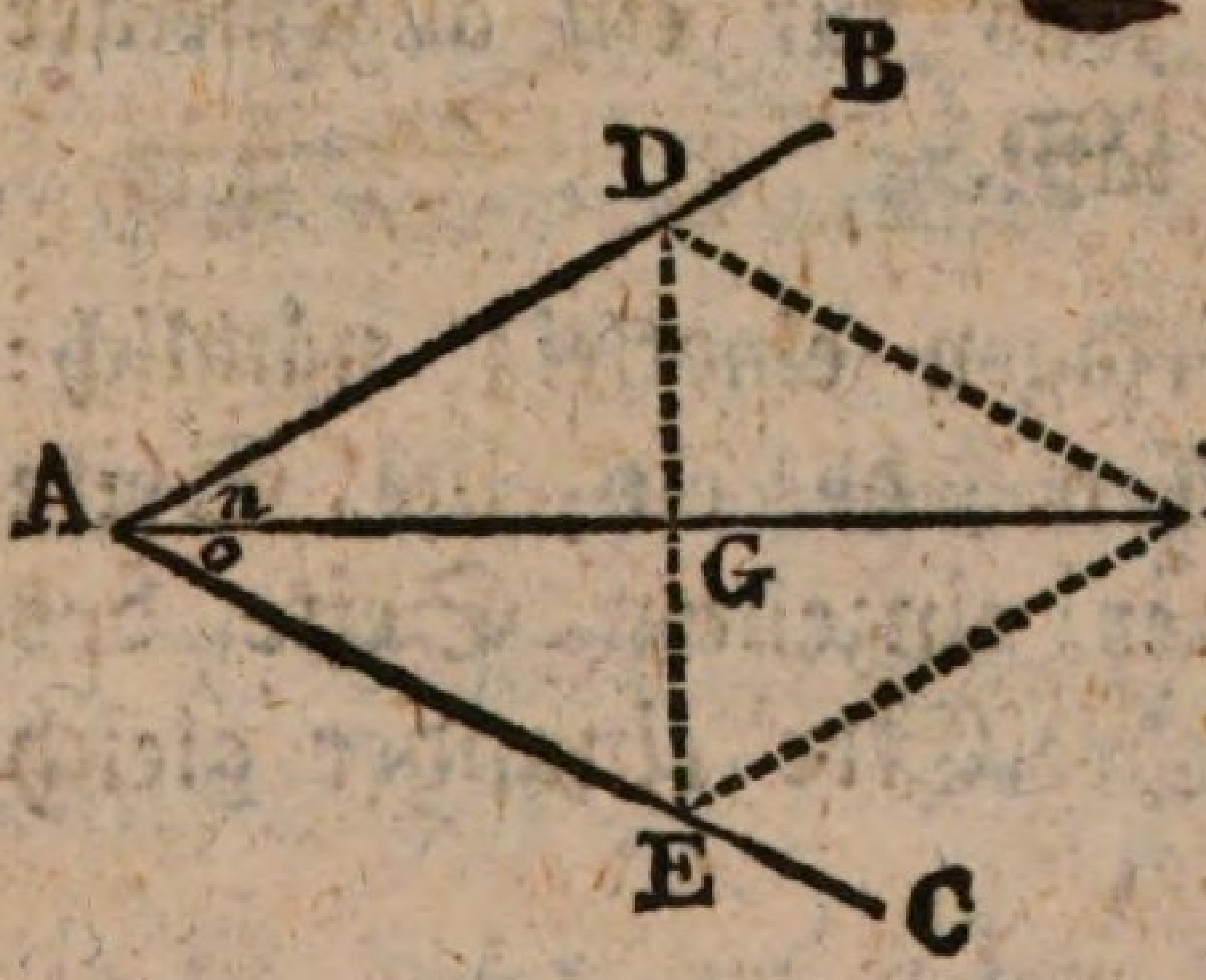
DE + DF + EF = GH + GI + HI.

ohne daß die beiden DreiEkke gleich und ähnlich seien).



Der ~~fünfte~~ Sechste Satz.

§ 64.



L. Hier ist ein Winkel BAC der soll gehalbt, das heisst, in zwei Hälften, oder gleiche Teile geteilt werden. Wie ist das wol zu bewerkstelligen?

S. Man muß von der Spitze A eine gerade Linie mitten durch ziehn.

L. Sehr gut: aber wird man auch die Mitte genau treffen? Mit Versuchen und mit Ohngefähr kömt man in der Geometrie nicht durch: man muß gewiß und sicher das Ziel zu erreichen wissen, wenn gleich durch Umwege. Also auf beiden Schenkeln AB und

und AC werden in willkührlicher, aber gleicher Entfernung von A, die Punkte D und E bemerkt. Hierauf wird die Linie DE gezogen; so entsteht ein DreiEkk ADE. Was für eins ist das?

S. Ein gleichschenkliges, da AD = AE.

L. Auf DE wird ein gleichseitiges DreiEkk DEF beschrieben (§ 54). Das Uebrige ergibt sich nun von selbst. Was ist noch zu tuhn.

S. Ich ziehe eine gerade Linie von A nach F.

L. Die Aufgabe ist aufgelöst. Was fehlt nun noch?

S. Der Beweis der Richtigkeit des Verfahrens, oder daß der Winkel A wirklich gehalbt sei.

L. Der Bequemlichkeit wegen wollen wir seine beiden Abteilungen oder ~~Hälften~~ angeblichen Hälften, n und o nennen. — Wie beweist man nun die Gleichheit der Winkel n und o?

S. Man muß ein Par DreiEkke aufsuchen, denen diese Winkel gehören, und deren Gleichheit und Aehnlichkeit zu beweisen suchen.

L. Welchen DreiEkken gehören denn die Winkel n und o?

S. Ein jeder derselben gehört zwei DreiEkken; nämlich n den DreiEkken ADG und ADF; und o den DreiEkken AEG und AEF.

L. Es kömt nun darauf an, aus diesen vier DreiEkken ein Par herauszufinden, welches gleich

und ähnlich wäre. Wohl zu merken daß wir der Kennzeichen jezt zwei haben. Welches sind sie?

S. Zwei Seiten mit einem dazwischen liegenden Winkel (§ 56), und drei Seiten (§ 63).

L. Findet sich eins davon an den DreiEkken die wir vor uns haben?

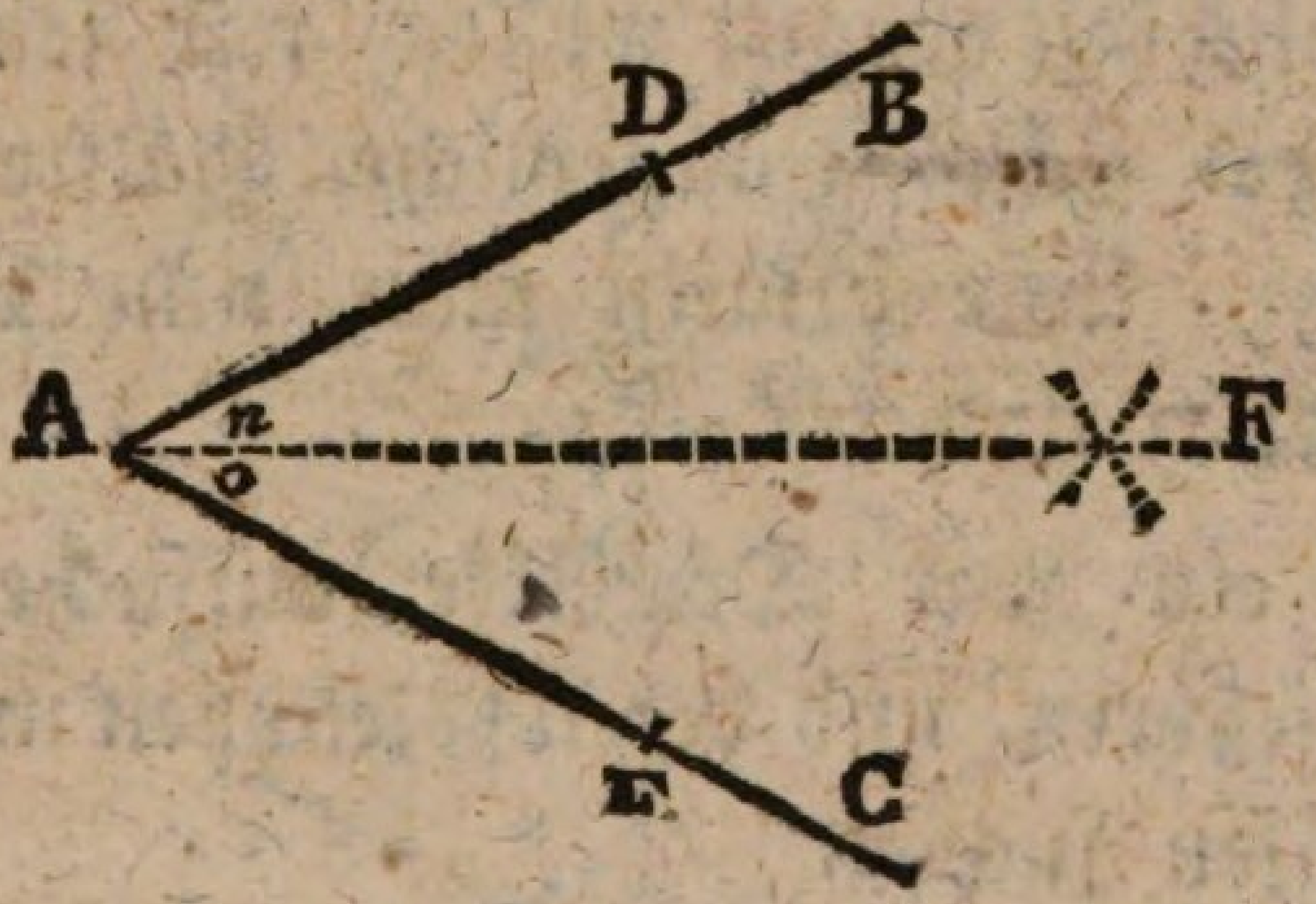
S. Ja. In den DreiEkken ADF und AEF ist

$$\left.\begin{array}{l} AD = AE \\ DF = EF \end{array}\right\} \text{(Verfert.)}$$

$$AF = AF \ (\S\ 29)$$

$$\triangle ADF \cong \triangle AEF \ (\S\ 63)$$

$$n = o \ (\S\ 24).$$

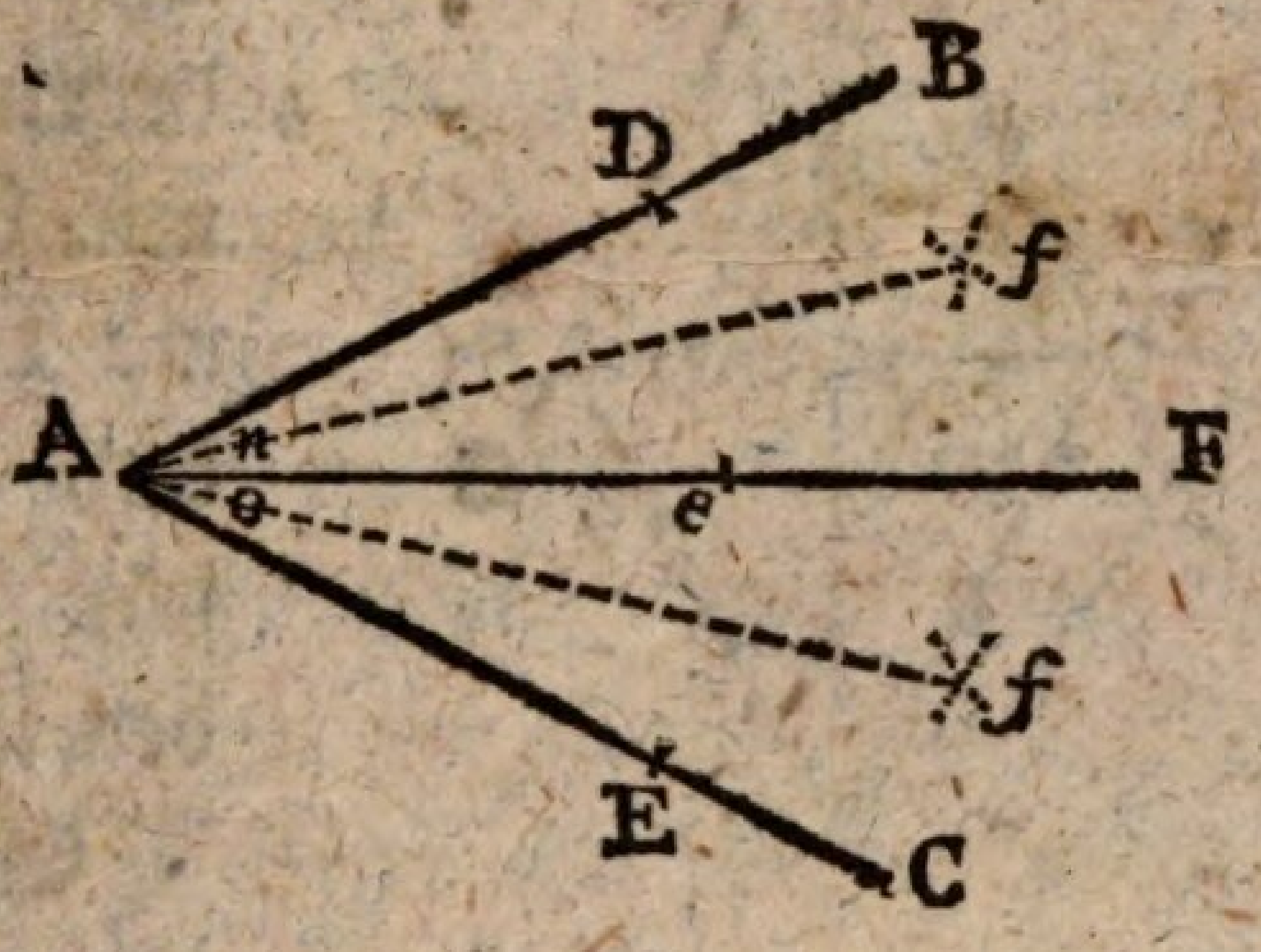


L. Wir wissen also nun einen gegebenen Winkel zu halben. — Daß nicht nur die Linie DE, sondern das ganze DreiEkk DEF bloß zu Erleichterung des Beweises dient, ist eine Sache die sich von selbst versteht. Für die Ausübung ist es hinlänglich den Punkt F zu wissen, den zwei sich kreuzende Bögen schon bestimmen.

§ 65.

§ 65.

L. Solten die Hälften n und o des Winkels BAC sich nicht von neuem halben lassen?



S. Ohne Zweifel, man darf nur mit der Hälfte verfahren, wie vorher mit dem Ganzen.

L. In wie viel Teile wird der Winkel BAC durch dieses wiederholte Halben geteilt?

S. In viere.

L. Und wenn man jedes Viertel noch ein Mal halbte?

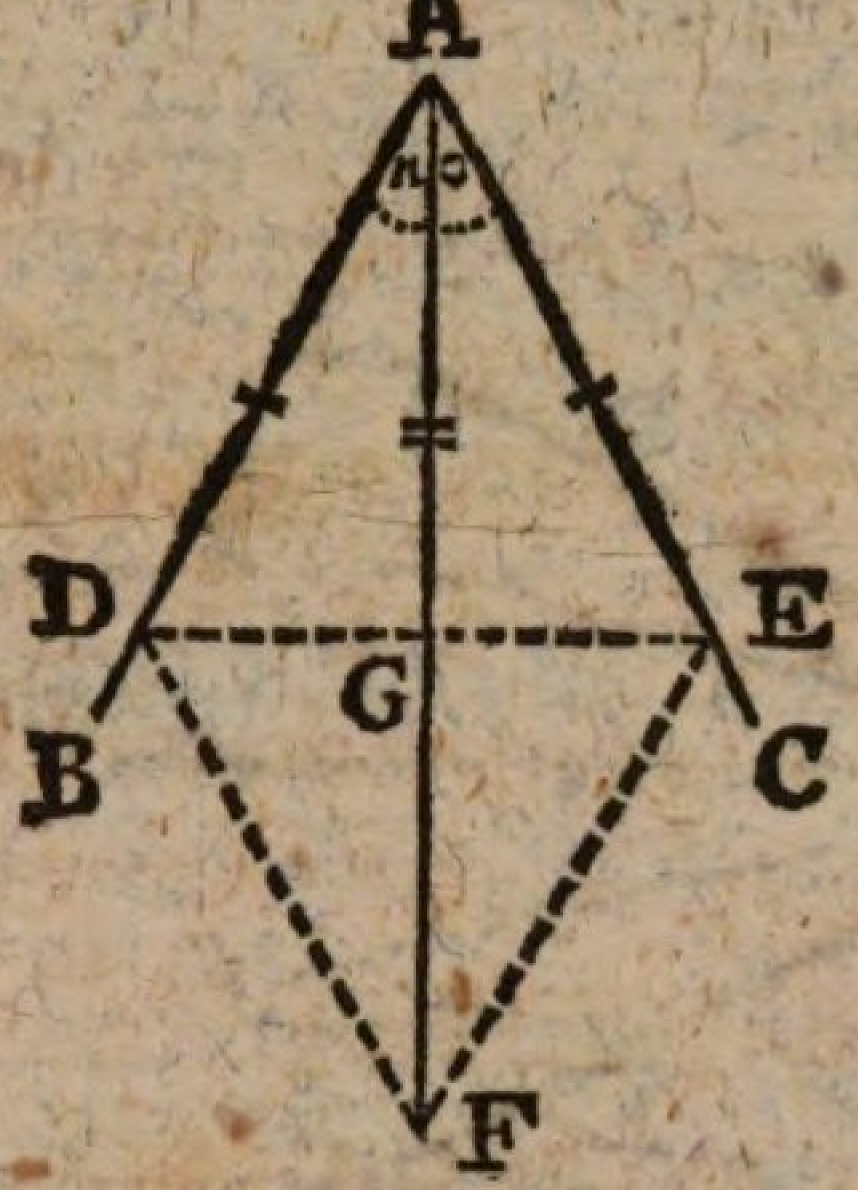
S. So würde das Ganze in acht gleiche Teile zerschnitten.

L. Es ist klar daß man dieses Halben fortsetzen kan, so weit man will, und ein Winkel folglich sich nicht bloß in zwei, sondern in vier, in acht, in sechzehn u. s. w. gleiche Teile zerlegen lässt.

Der ~~sechste~~ 7 Satz.

§ 66.

L. Wir wollen die erste Zeichnung, des vorigen §s noch ein Mal mit Aufmerksamkeit betrachten,



um daraus zu lernen eine gerade Linie zu halben. Der Durchschnitts-Punkt der Linien AF und DE wird mit G bezeichnet. Die Linie DE ist in zwei Stükken, GD und GE, zerschnitten. Welches von beiden ist wol das gröste?

S. Sie scheinen gleich groß zu seyn.

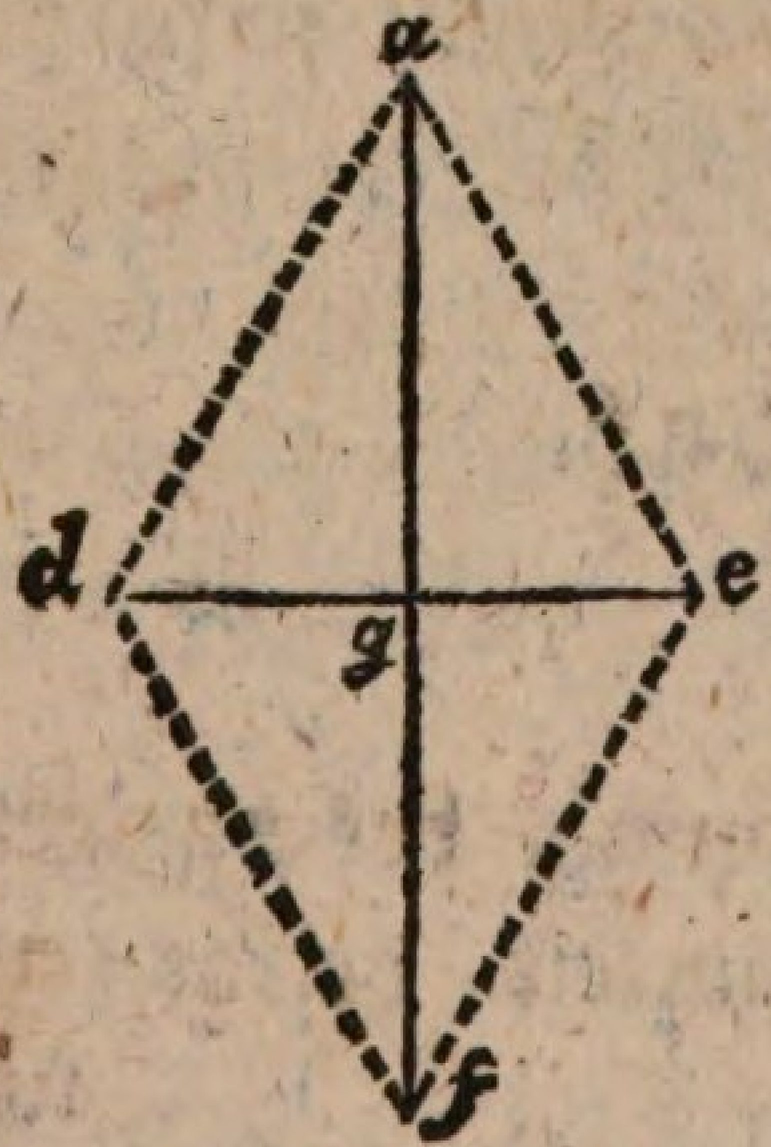
L. GD und GE sind Seiten der DreiEkke AGD und AGE. Sind diese gleich und ähnlich, so ist die Folge davon = = ?

S. Daß GD und GE gleich lang sind (§ 24).

L. Wir müssen also die Gleichheit und Aehnlichkeit dieser beiden DreiEkke untersuchen.

AD = AE (Verfert.)
AG = AG (§ 29)
n = o (§ 64)
△AGD ≌ AGE (§ 56)

GD = GE (§ 24).



L. Wenn also eine Linie de zu halben gegeben würde, was hätte man zu tuhn?

S. Nachzuahmen was bei Halbung des Winkels (§ 64) geschah. Auf einer Seite von de ein gleichschenkliges DreiEkk

Ekk ade, und auf der andern ein gleichseitiges fde, zu beschreiben.

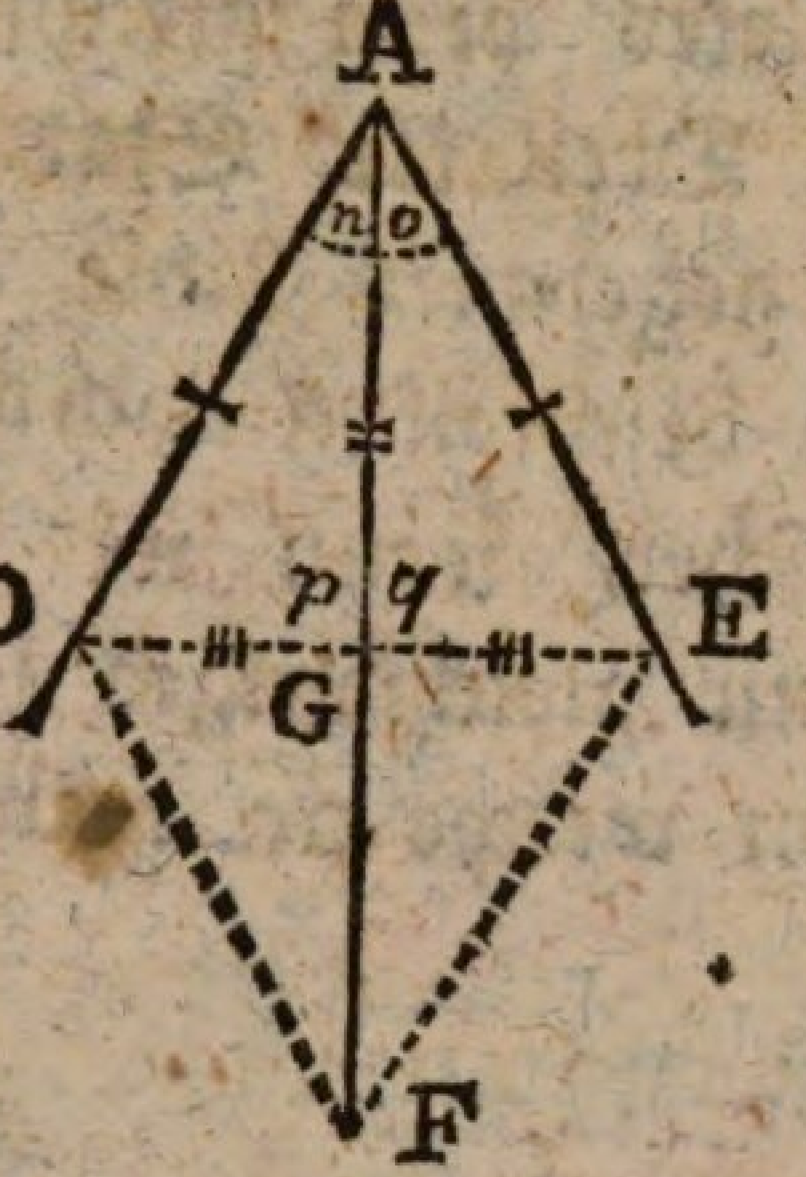
L. Da es hier nur darauf ankömt daß ad = ae, und fd = fe sei, und dieses beim gleichseitigen und beim gleichschenkligen DreiEkke Stat findet (§ 54, 57); auf einer gegebenen Linie aber ein gleichschenkliges DreiEkk zu beschreiben noch nicht gelehrt ist; so ist es methodischer, wenn wir hier auf beiden Seiten von de ein gleichseitiges setzen (§ 54), und die Linie af ziehn welche de halbt in g, wie schon bewiesen ist.

§ 67.

L. Daß die Hälfte der Linie, so wie die Hälfte des Winkels, (§ 65) von neuem gehalbt, folglich eine gegebene gerade Linie in vier, acht, sechzehn u. s. w. gleiche Teile geteilt werden könne, ist eine Sache die braucht kaum erinnert zu werden. Da es eigentlich auch nur auf die Durchschnitts-Punkte a und f ankömt, so versteht es sich eben so von selbst, daß in der Ausübung die Linien AD, AE, FD, FE, wegbleiben können.

Der ~~siebente~~ 8 Satz.

§ 68.



L. Wir müssen die Zeichnung § 66 noch ein Mal betrachten, um noch mehr daraus zu lernen. Daraus daß △AGD ≌ △AGE haben wir schon gefolgert daß GD = GE war; aber es lässt sich noch mehr heraus ziehn.

S. Auch die Winkel ADG und AEG, desgleichen die Winkel beim Durchschnitt G, sind gleich groß (§ 24).

L. Das ist richtig. Und wir wollen, der Bequemlichkeit wegen, diese DurchschnittsWinkel, p und q nennen: — Wie heissen nun solche Winkel wie p und q, die einen Schenkel AG gemein haben, und deren andre Schenkel GD und GE in gerader Richtung liegen?

S. NebenWinkel (§ 46).

L. Und NebenWinkel die gleich groß sind, wie heissen die?

S. Rechte Winkel (§ 42).

L. Und wie steht die Linie AG, wan sie gleichgrosse NebenWinkel, das ist rechte Winkel bildet?

S. Senkrecht (§ 47).

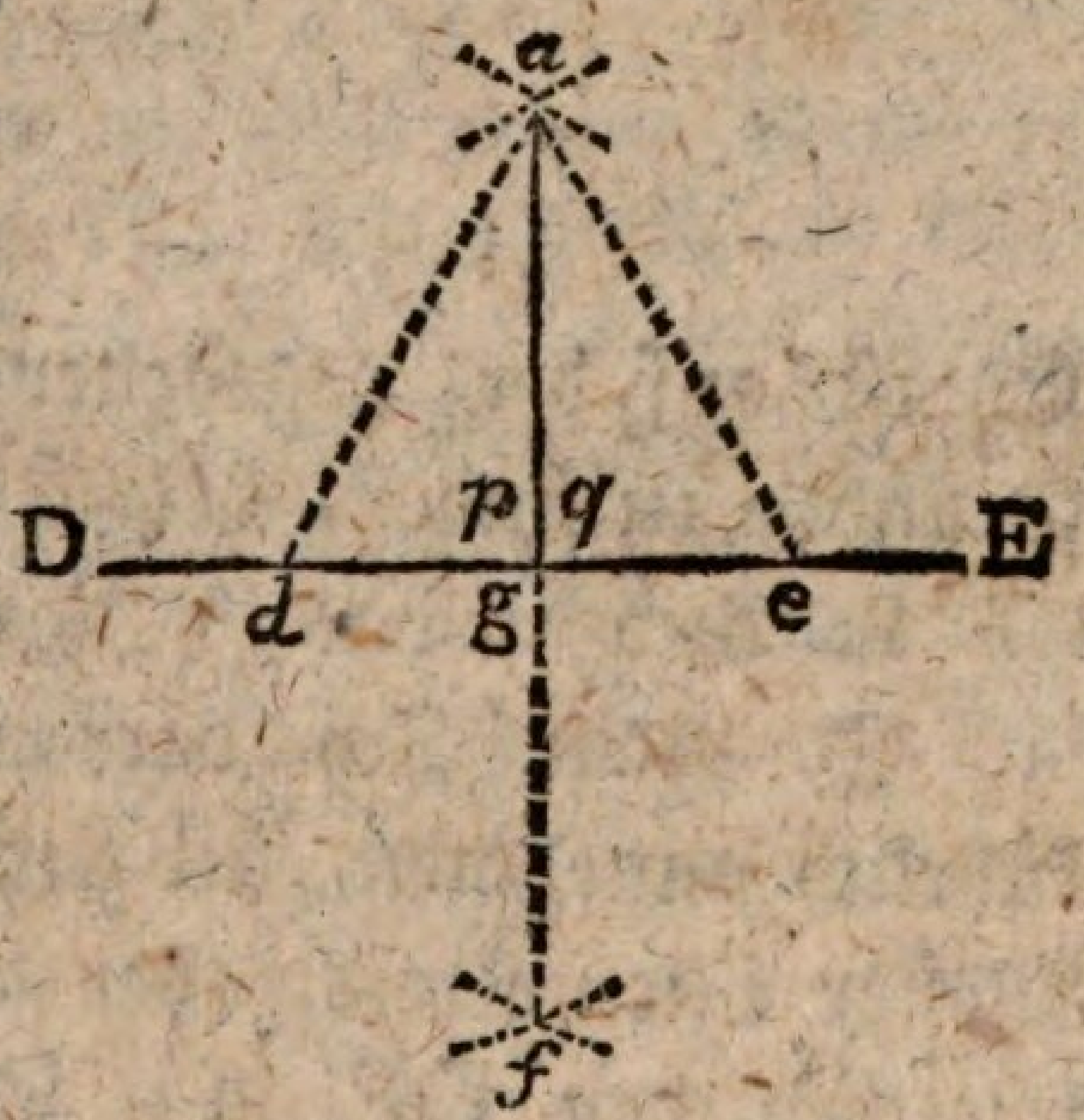
L.

L. AG also steht senkrecht, und zwar auf der Mitte von DE. Wenn also eine gerade Linie DE gegeben ist, so lässt sich auf ihre Mitte eine gerade Linie senkrecht stellen. Wie verfährt man dabei?

S. Genau so als ob man die gegebene Linie halben wolte (§ 66).

L. Wenn aber der Punkt G, durch welchen die senkrechte Linie gehn solte, nicht in der Mitte von DE läge?

S. Dan kan man sich ja zu beiden Seiten, und in gleicher Entfernung von G, auf der Linie DE, zwei Punkte d und e wählen, und nun verfahren als ob de solte gehalbt werden; nämlich auf beiden Seiten von de gleichseitige DreiEkke beschreiben; oder auch nur die DurchschnittsPunkte a und f bemerken, und durch diese die Linie af ziehn.

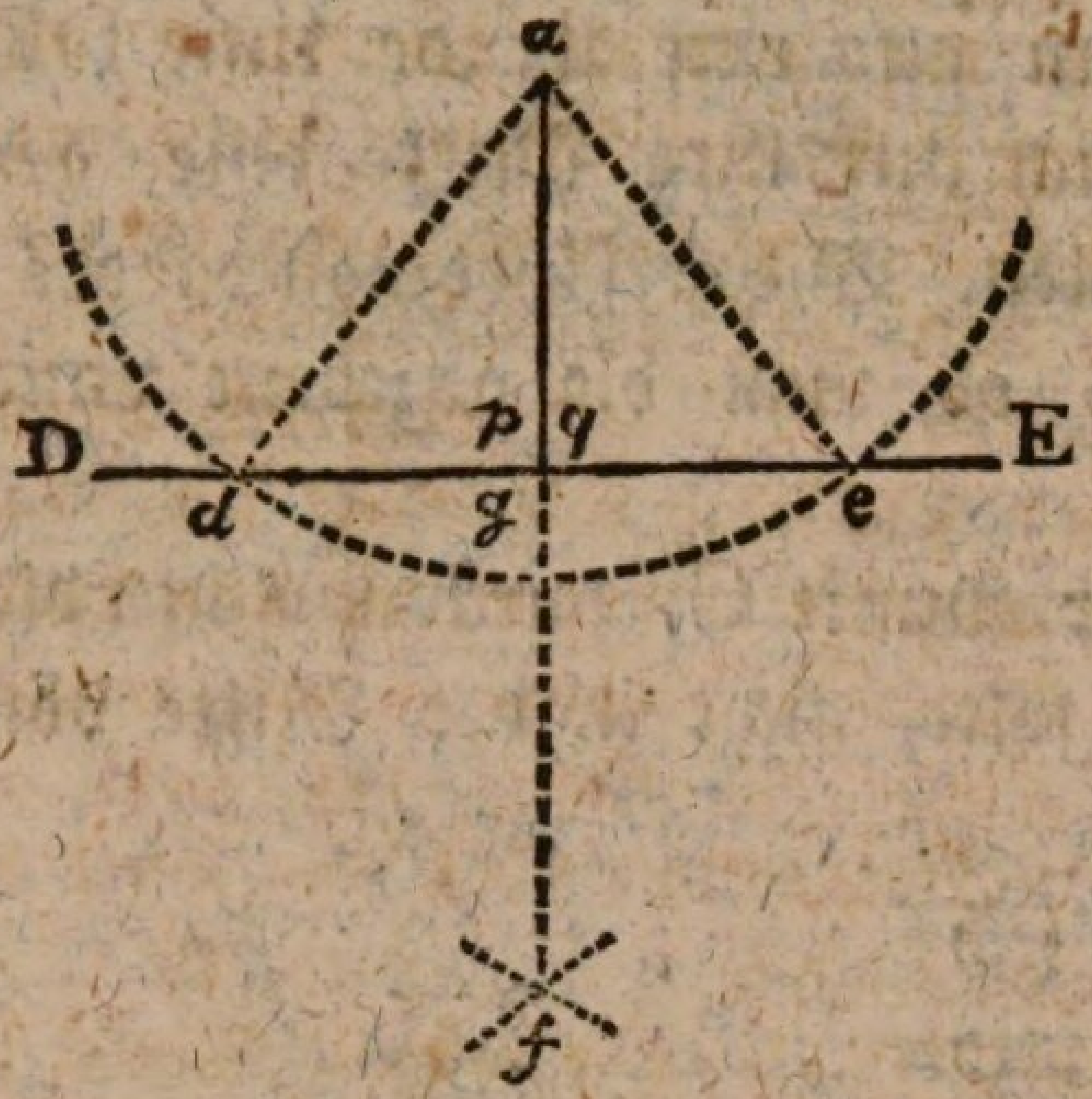


L. Daß war also die Aufgabe: Auf eine gegebene gerade Linie, aus einem derselben gegebenen Punkt, eine senkrechte Linie zu errichten.

Der ~~achte~~ Satz.

§ 69.

L. Es wird wiederum gegeben eine gerade Linie DE und ein Punkt A über oder unter



derselben, und verlangt, von diesem Punkte A, auf die gegebene Linie DE, eine senkrechte Linie zu fällen. Die Betrachtung der vorigen Zeichnung wird uns dazu befördelich seyn.

S. Ich sehe wol worauf es ankömt. Es ist auf der gegebenen Linie DE zwei Punkte d und e zu finden, welche von a gleich weit abstehn.

L. Und ist das so schwer?

S. Nein. Ich darf nur einen Punkt d, willkührlich annehmen, ad ziehn, und mit diesem Halbmesser einen Kreis, oder auch nur einen Bogen beschreiben, den DE in e schneidet, so ist ae = ad (§ 21). Verfahre ich nun wie vorhin (§ 68) um den Punkt f zu finden, und ziehe af; so steht ag senkrecht auf DE, wie schon erwiesen ist.

L. Das ist zwar wahr; ich möchte aber doch den Beweis kürzlich wiederholt sehn.

S. ad = ae (§ 21)
gd = ge (§ 66)
ag = ag (§ 29)
△agd ≅ △age (§ 63)
p = q (§ 24)
ag senkrecht auf DE (§ 47)

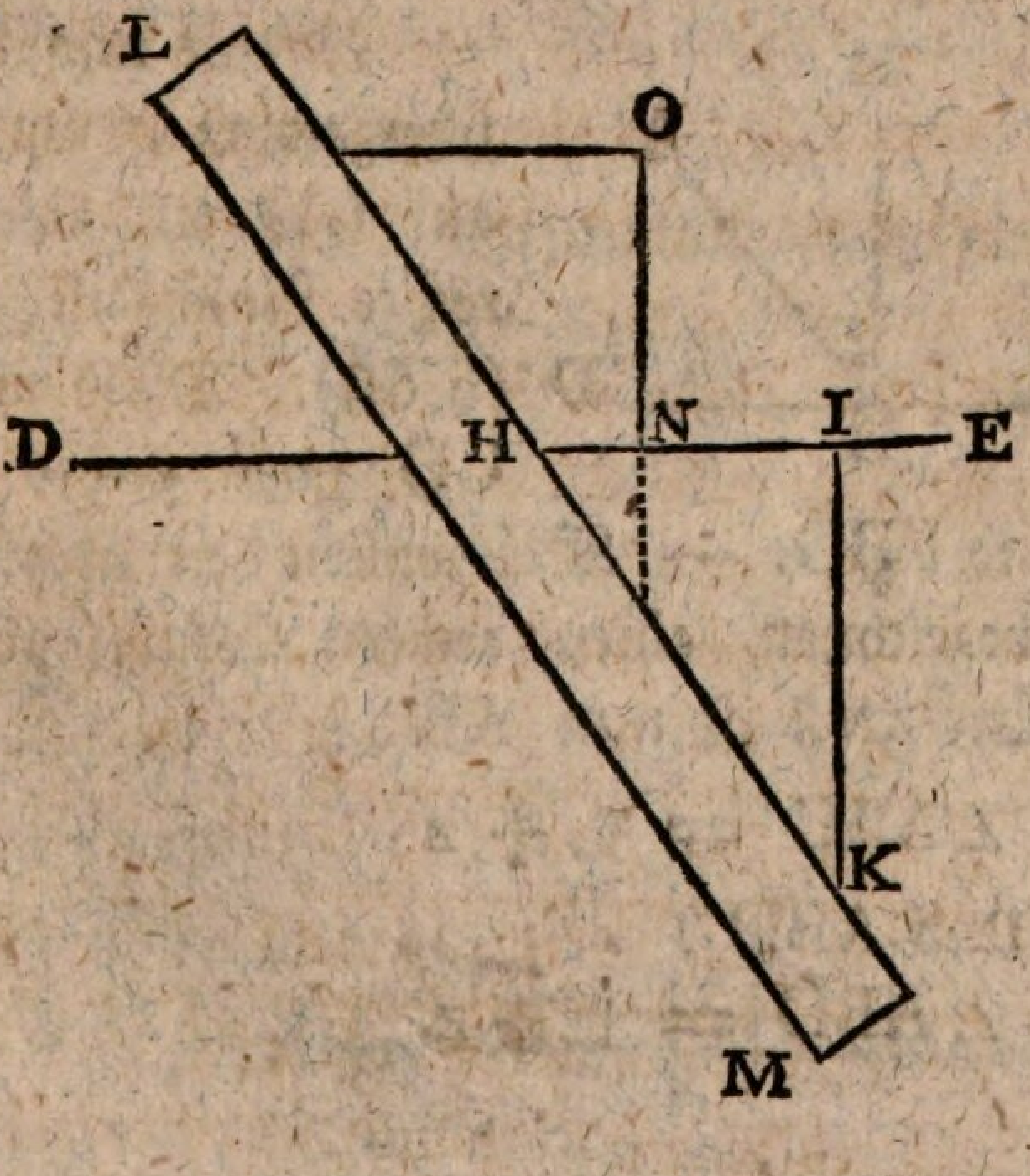
L. Nun bin ich mit Auflösung und Beweis zufrieden.

§ 70.

§ 70.

L. Für die Ausübung hat man ein bequemeres mechanisches Mittel zu Ziehung senkrechter Linien. Ein hölzernes rechtwinkliges DreiEkk HIK, legt man mit einer den rechten Winkel einschliessenden Seite HI, an die gegebene Linie DE, und an die längste Seite HK legt man ein Lineal LM. In dieser Lage nun hält man das Lineal fest, das DreiEkk aber schiebt man an selbigem hinauf, bis seine dritte Seite IK den gegebenen Punkt N berührt, es mag derselbe [redacted] über, oder unter der Linie DE liegen, und zieht an dem Lineal, durch N, die senkrechte Linie NO. — Sihst du die Richtigkeit des Verfahrens ein?

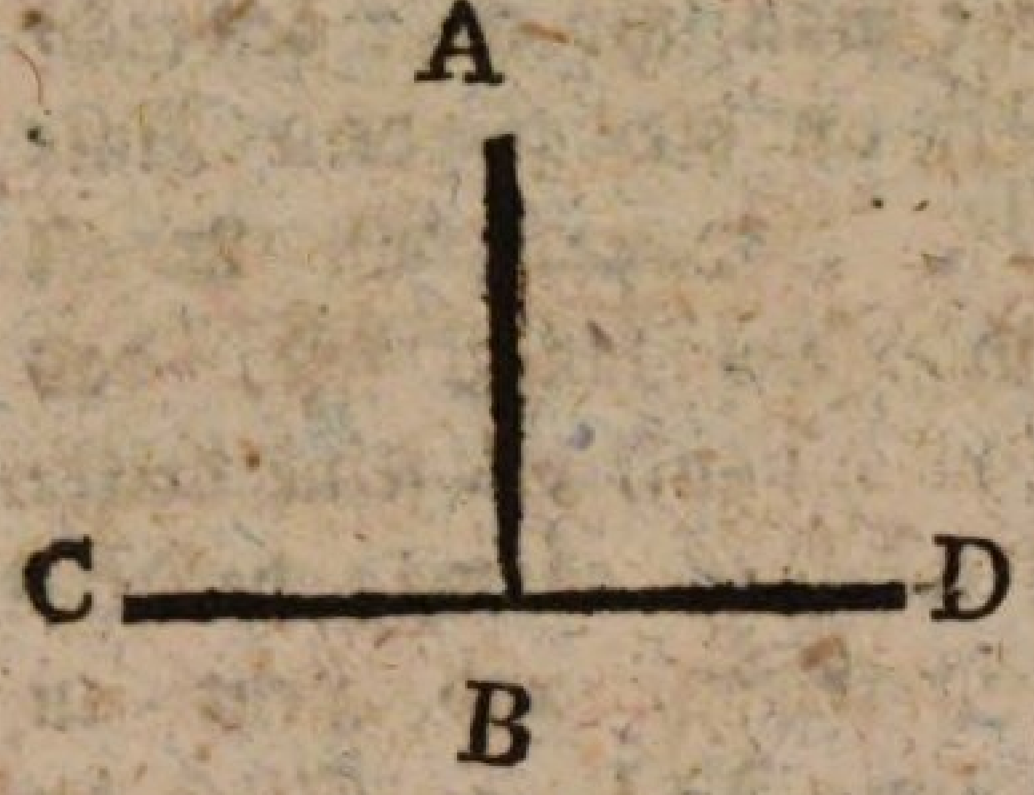
S. Das hölzerne DreiEkk hat einen rechten Winkel I; folglich steht IK senkrecht auf HI, und zugleich auf DE. Wenn man nun das DreiEkk an dem Lineal hinauf schiebt; so kan seine an demselben liegende Seite HK seine Richtung nicht ändern: und da HK ihre Richtung nicht ändert, kan es auch IK nicht. Es wird daher IK, die in ihrer ersten Lage senkrecht auf IH und DE stand, auch in ihrer zweiten NO senkrecht auf beiden stehn.



Der

Der ~~neunte~~ 10. Satz.

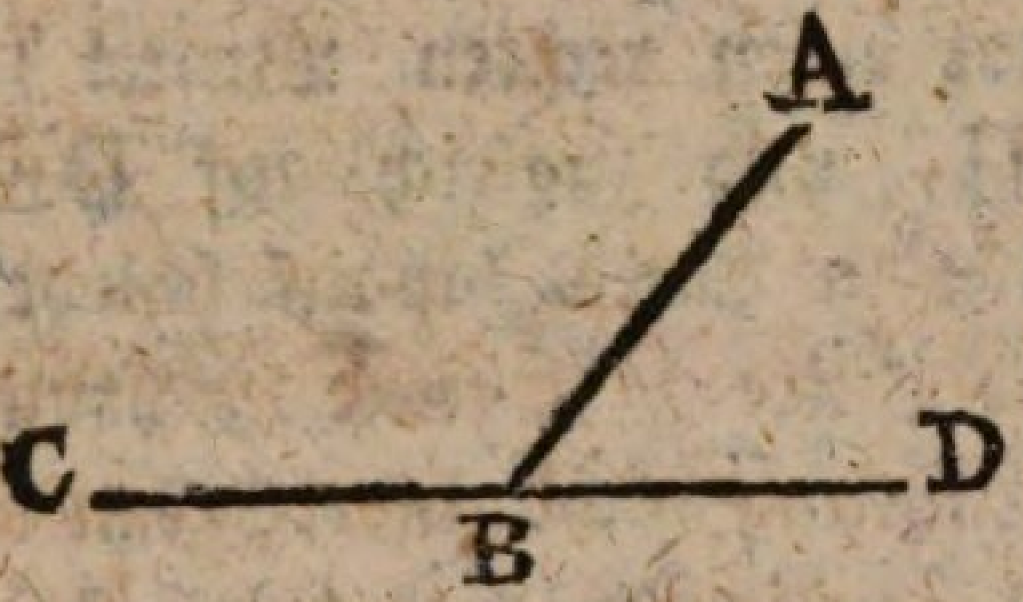
§ 71.



L. Wenn eine gerade Linie AB, auf eine andre CD senkrecht fält, wie viel rechte Winkel macht sie mit CD?

S. Zu jeder Seite einen, zusammen zweie.

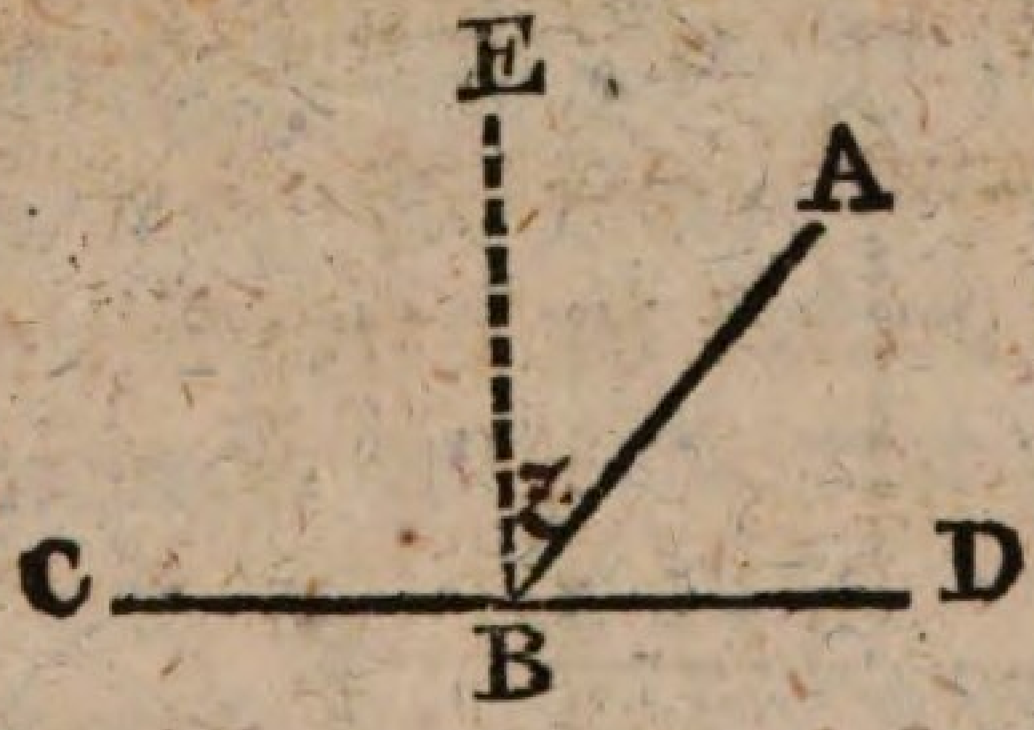
L. Gesetzt aber AB fiele schief auf CD.



S. Dan machte sie zwei schiefe Winkel mit ihn (§ 48).

L. Wie groß aber würden beide zusammen seyn, gegen rechte Winkel gerechnet?

S. Ich denke so groß als zwei rechte.



L. Um uns davon zu überzeugen, wollen wir auf CD, aus B, eine senkrechte Linie BE errichten. (§ 68). Diese macht mit CD zwei rechte Winkel, EBC und EBD. — Wir wollen den Winkel ABE mit z bezeichnen, einen rechten Winkel aber durch ∟. — Wie groß ist nun ABC?

S. $\angle ABC = \llcorner + z$

L. Und ABD?

S. $\angle ABD = \llcorner - z$.

L.

L. Das machen zusammen = = ?

S. Zwei rechte Winkel. ~~Denn ∟ + z~~

$$\left.\begin{array}{l}\text{denn } \llcorner + z \\ \text{und } \llcorner - z\end{array}\right\} = \llcorner + \llcorner = 2\,\llcorner$$

Das z, was der eine rechte Winkel zu viel hat, das fehlt dem andern. + z und − z heben einander auf.

L. Ein par NebenWinkel also sind zusammen zwei rechten Winkeln gleich.

§ 72.

L. Dieser LehrSatz ist fruchtbar an Folgerungen, oder Zusätzen. — Wenn von ein par NebenWinkeln der eine ein rechter ist, was ist der andre für einer?

S. So ist der andre auch ein rechter.

L. Und wenn der eine von beiden stumpf ist.

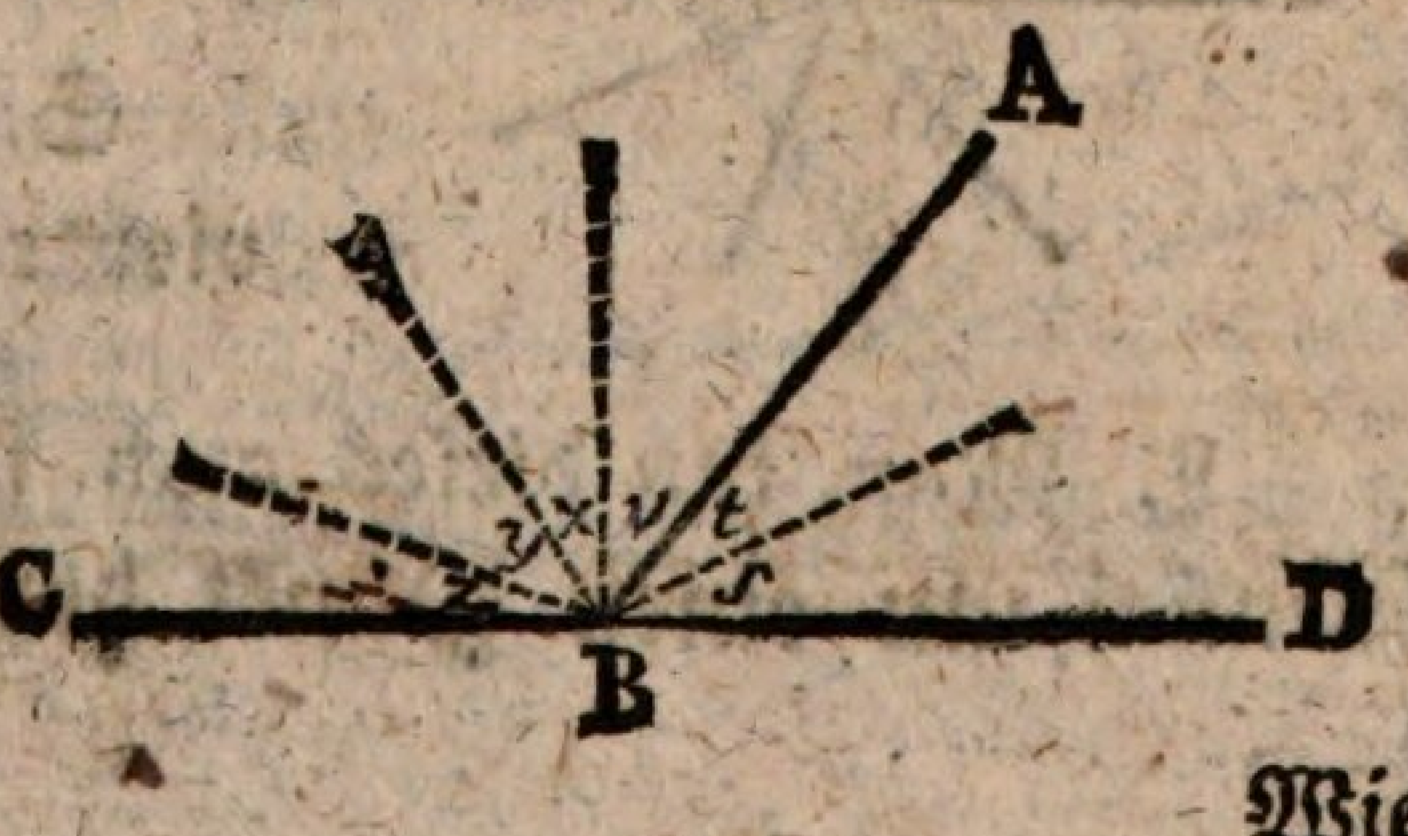
S. So ist der andre spitz.

L. Und umgekehrt: Wenn der eine spitz ist?

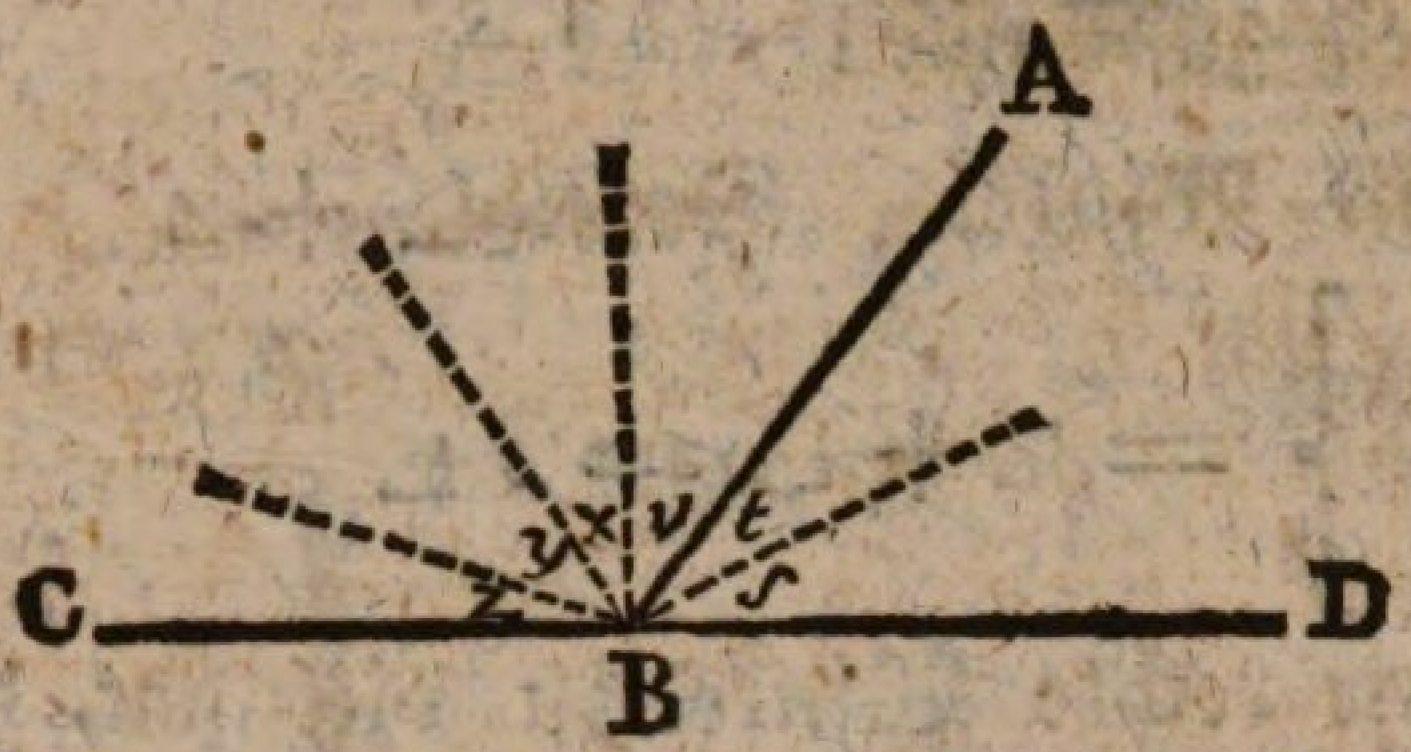
S. So ist der andre stumpf.

§ 73.

L. Zwei NebenWinkel ABC und ABD also sind zwei rechten Winkeln gleich (§ 71).



Wie



Wie aber, wenn noch mehr Winkel über CD, in eben dem Punkte B mit ihren Spitzen zusammen träfen, wie hier die Winkel z, y; x, v, t, s?

S. Die Winkel s und t sind doch nur Teile des Winkels ABD, so wie v, x, y und z, Teile von ABE sind. Alle Teile zusammen genommen aber sind dem Ganzen gleich (§ 45).

Folglich $s + t = \angle ABD$

und $v + x + y + z = \angle ABC$

Nun ist $\angle ABC + \angle ABD = 2 ∟$ (§ 71);

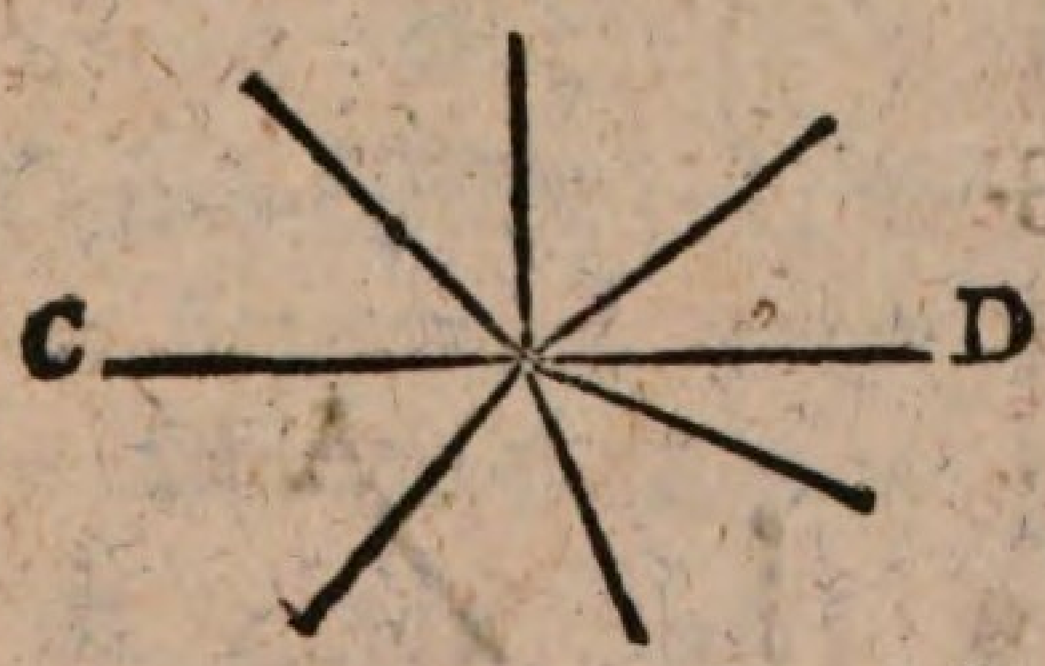
Folglich auch $s + t + v + x + y + z = 2 ∟$ (§ 27).

L. Alle Winkel also, die auf einer Seite einer geraden Linie, mit ihren Spitzen in einem Punkte zusammen stossen, , ?

S. Sind zusammen zwei rechten Winkeln gleich.

L. Und auf der andern Seite?

S. Betragen sie eben so viel.



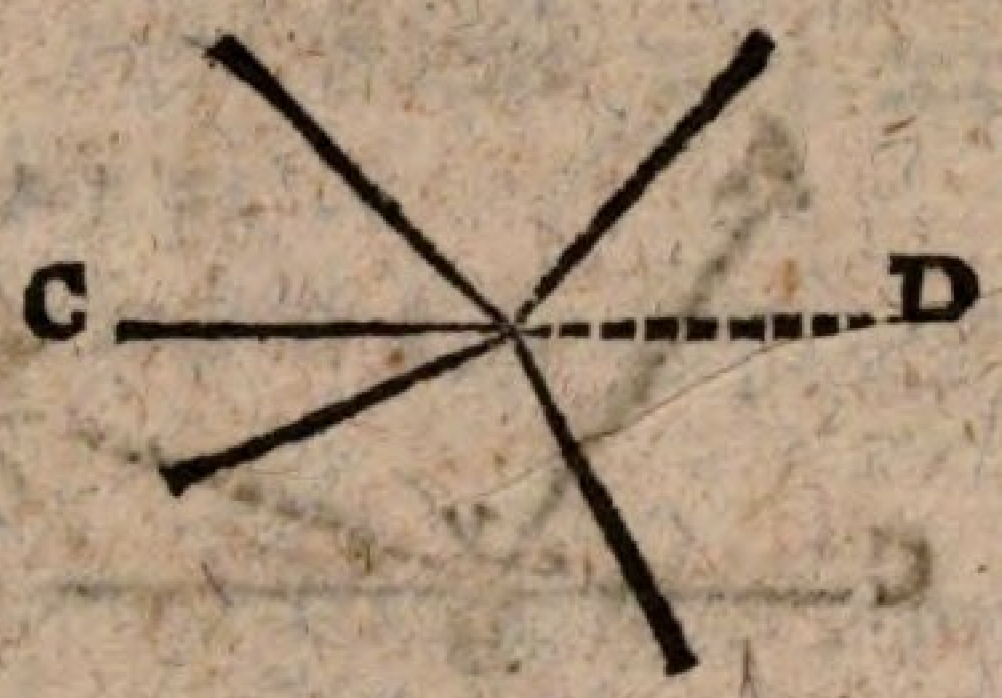
L. Alle Winkel also, zu beiden Seiten einer geraden Linie?

S. Betragen zusammen vier rechte Winkel.

L. Man kan dieses auch so ausdrükken: Alle Winkel um einen Punkt herum sind zusammen

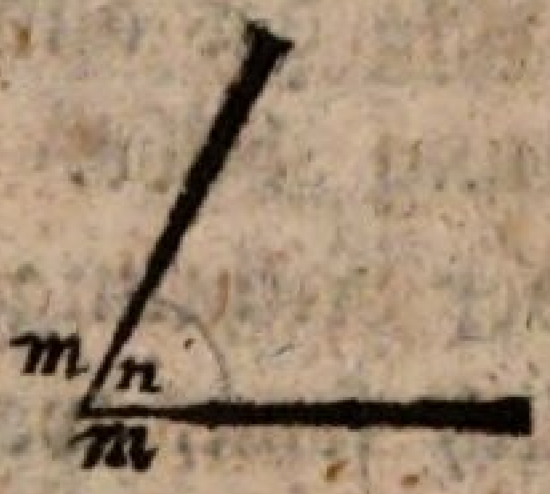
vier

vier rechten Winkeln gleich. Denn gesetzt auch die Linie CD, zu deren beiden Seiten sie liegen, wäre nicht vorhanden; so kan man sie entweder ziehn, oder denken. —



§ 74.

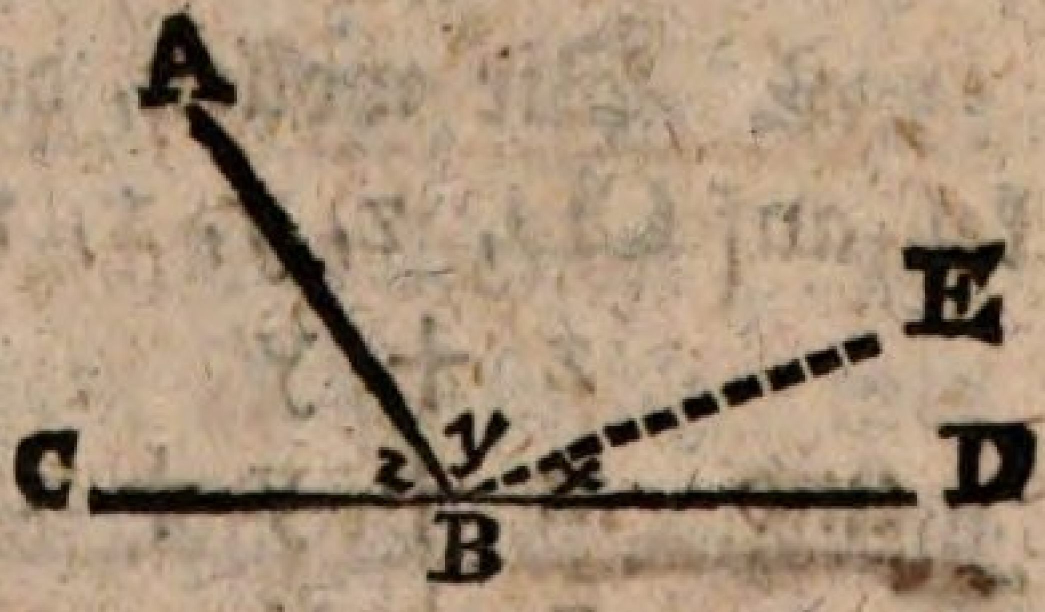
Soll dieser Satz wirklich allgemein seyn; so muß er, sich auf erhabene Winkel (§ 17) erstrekken. Und das ist wirklich der Fall. Denn der hohle Winkel n und der erhabene mm sind zusammen zwei rechten Winkeln gleich; und einer ist des andern Ergänzung zu vier rechten.



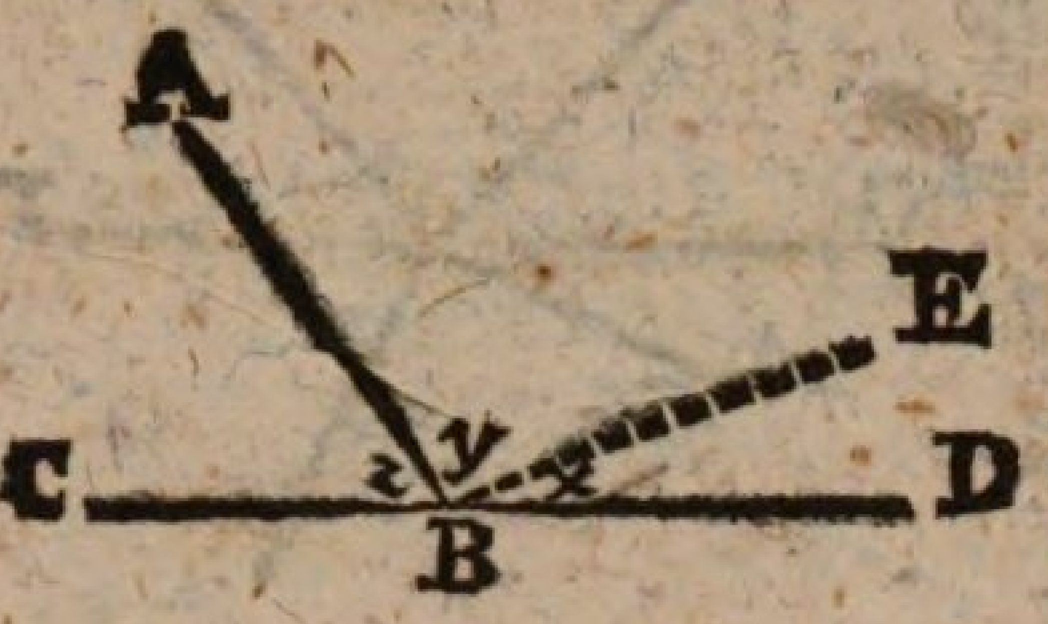
Der ~~zehnte~~ 17. Satz.

§ 75.

L. Im vorigen Satze ist erwiesen, daß wenn eine gerade Linie mit einer andern zwei Winkel macht diese zusammen genommen zwei rechten Winkeln gleich sind (§ 71). Der umgekehrte oder der GegenSatz lautet: Wenn eine gerade Linie AB mit einer andern Linie CD zwei Winkel ABC und ABD macht, die zusammen zwei rechten Winkeln gleich sind, so ist CD auch eine gerade Linie. — Welche BeweisArt findet hier Stat?



S.



S. Die apagogische (§ 62).

L. Was will das sagen?

S. Man nimt an die Linie CD wäre ungerade, oder krumm.

L. Mit krummlinigen Winkeln haben wir noch nichts zu tuhn. Wir nehmen also an CD habe eine Biegung oder Krümmung in B, so daß der Schenkel BD des einen Winkels, nicht die Verlängerung des andern, CB sei; sondern eine andre Richtung habe. Liegt nun BD nicht mit CB in gerader Richtung, so muß doch eine andre Linie möglich seyn, welche mit CB einerlei Richtung hat (§ 7). Eine solche wollen wir also ziehn, und sie mag zwischen BA und BD fallen, und BE heissen.

S. Das ist geschehn.

L. BE also wird für die Verlängerung von CB, und CBE wird für eine gerade Linie angenommen. Was ist die Folge hiervon? Ich mene, wenn CB für eine gerade Linie gilt, was für Winkel macht denn AB mit ihr?

S. Ein par NebenWinkel (§ 49), welche zusammen zwei rechten Winkeln gleich sind (§ 71).

L. Wir wollen, der Kürze wegen, die drei Winkel auf CD, z, y, x, nennen. — Also

$$z + y = 2 \llcorner \text{ (§ 71)}$$
$$\text{und } z + y + x = 2 \llcorner \text{ (VorausS.)}$$
$$z + y = z + y + x \text{ (§ 32)}$$
$$y = y + x \text{ (§ 37).}$$

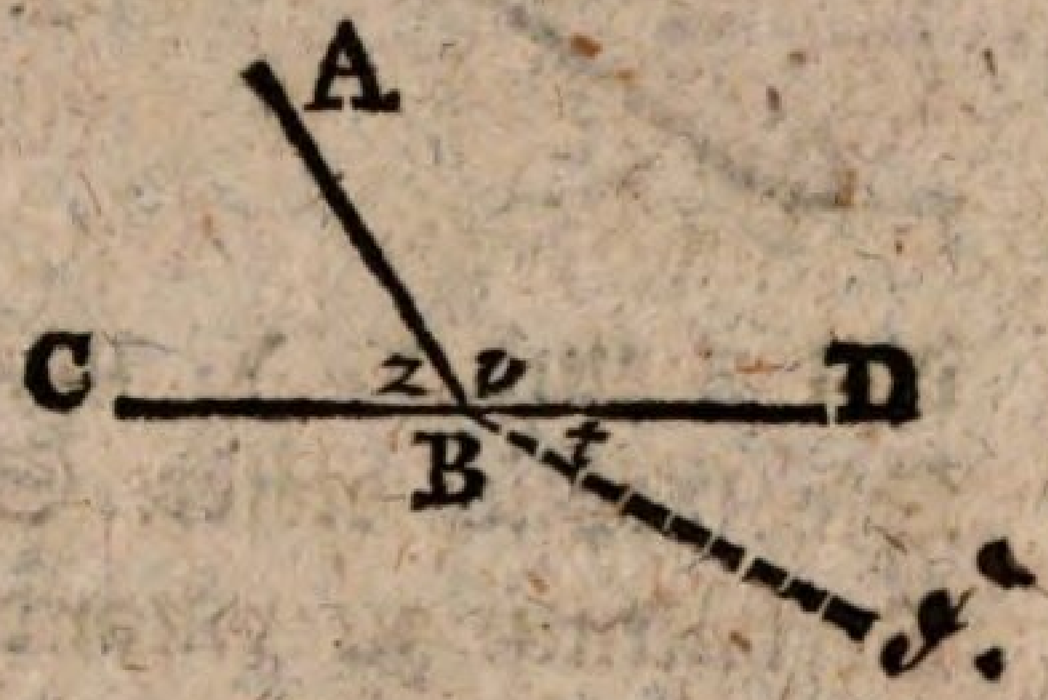
Also

Also der Teil y so groß, als das Ganze y + x! Woher diese Ungereimtheit? (§ 45)

S. Weil wir angenommen haben BE liege mit CB in gerader Richtung.

L. Hat BE die erforderliche Richtung nicht, so lässt sich vielleicht eine andre Linie ziehn, welche sie hat.

S. Ueber BD würde immer der Fall seyn wie mit BE. Unter BD aber wollen wirs, mit einer Linie BF, versuchen. Die Winkel können z, v, t heissen. So ist



$$z + v + t = 2 \llcorner \ (\S\ 71)$$
$$z + v = 2 \llcorner \ (\text{Voraus S.})$$
$$z + v + t = z + v \ (\S\ 32)$$
$$v + t = v \ (\S\ 37)$$

Da ist die vorige Ungereimtheit (§ 45).

L. Da also weder über noch unter BD eine Linie der Verlängerung von CB seyn kan, was bleibt übrig?

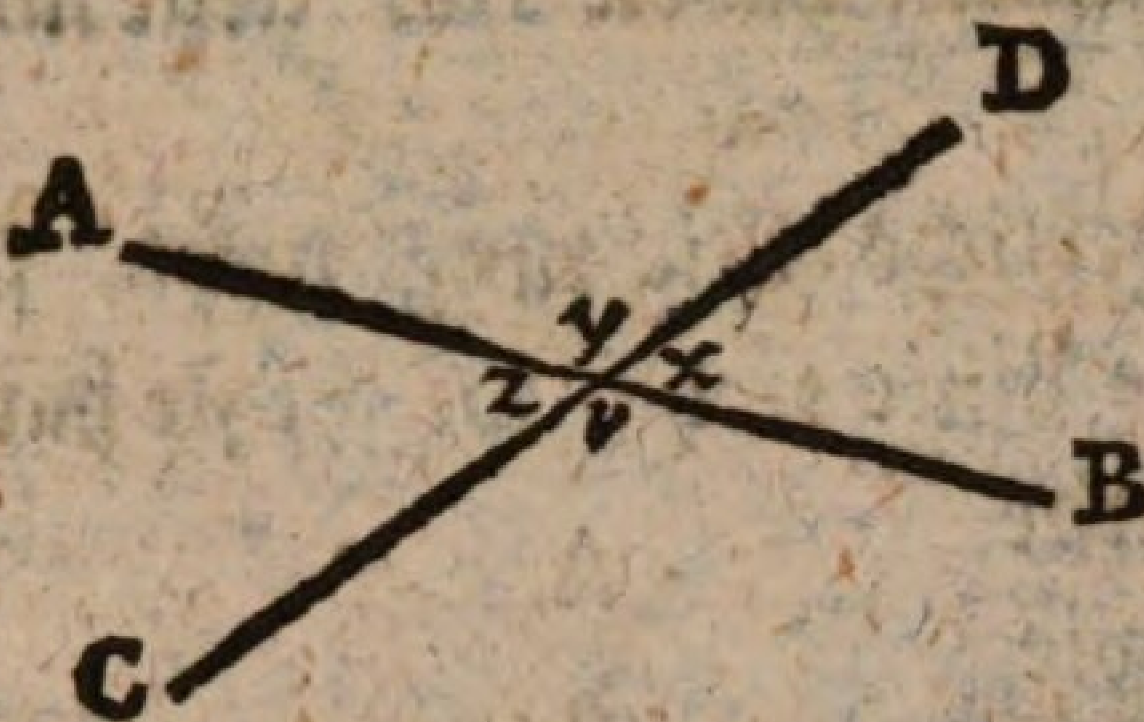
S. Zuzugeben daß BD selbst die Verlängerung von CB sei, und mit ihr eine gerade Linie bilde.

L. Wenn also zwei Winkel ABC und ABD welche einen Schenkel AB gemein haben; zusammen zwei rechten Winkeln gleich sind; wie liegen dan ihre beiden andern Schenkel BC und BD?

S. In gerader Linie CD.

Der ~~eilfte~~ 12. Saz.

§ 76.



L. Wenn zwei gerade Linien AB, CD sich schneiden, so machen sie vier Winkel z, y, x, v von welchen die einander gegenüber stehenden z und x, y, und v, ScheitelWinkel heissen. Die Grösse dieser ScheitelWinkel nun, oder ihr Verhältniß zu einander, ob sie gleich oder ungleich sind, das ist jezt der GegenStand unsrer Untersuchung. — Was sind z und y, oder y und x, für Winkel?

S. NebenWinkel (§ 49).

L. Und wie groß sind nun ein par NebenWinkel?

S. So groß wie zwei rechte Winkel.

L. Also $\left.\begin{array}{l} z + y = 2\llcorner \\ x + y = 2\llcorner \end{array}\right\}$ (§ 71)

$z + y = x + y$ (§ 32)

S. $z = x$ (§ 37).

L. Von z und x also wäre erwiesen daß sie gleich sind: nun fehlt von y und v noch der Beweis.

S. $\left.\begin{array}{l} x + y = 2\llcorner \\ x + v = 2\llcorner \end{array}\right\}$ (§ 71)

$x + y = x + v$ (§ 32)

$y = v$ (§ 37).

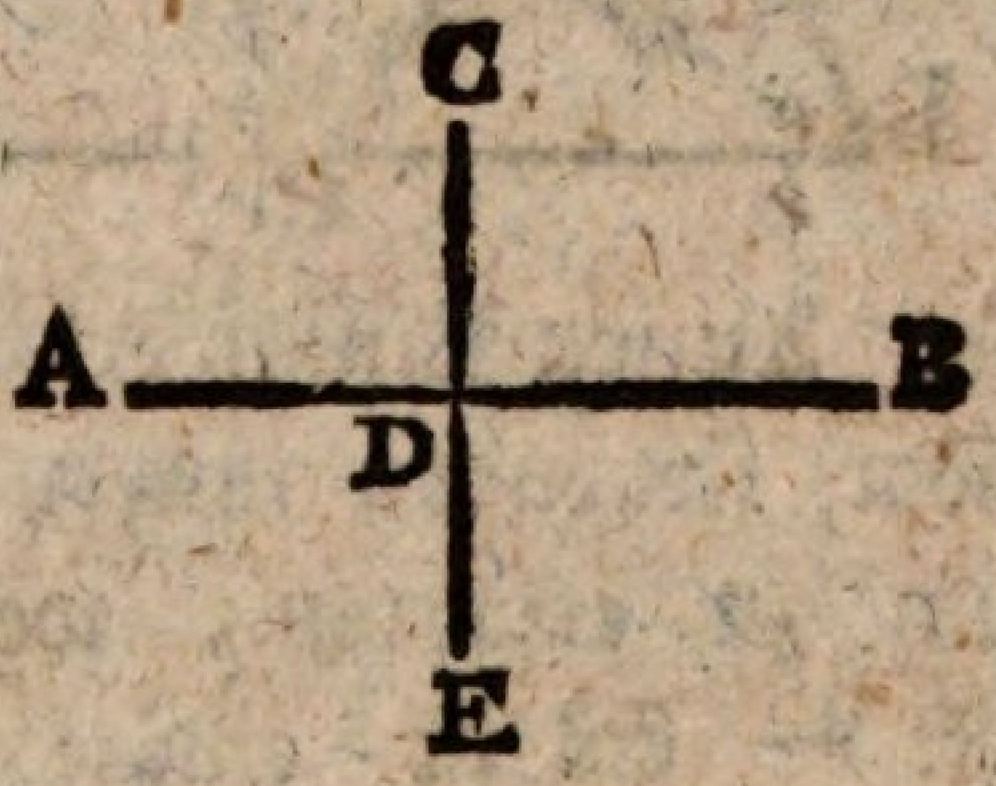
L. Was haben ~~wir nun~~ herausgebracht oder erwiesen?

S. ScheitelWinkel sind gleich.

13.

Der ~~zwölfte~~ Satz.

§77.



L. Auf eine Linie AB wird eine andre CD senkrecht gestellt (§ 68). — Was für Winkel macht CD zu beiden Seiten?

S. Rechte Winkel (§ 47).

L. Wir wollen CD, auf der andern Seite von AB, unbestimmt verlängern bis E. — Was für Winkel macht nun DE, oder die verlängerte Linie CD, mit AB?

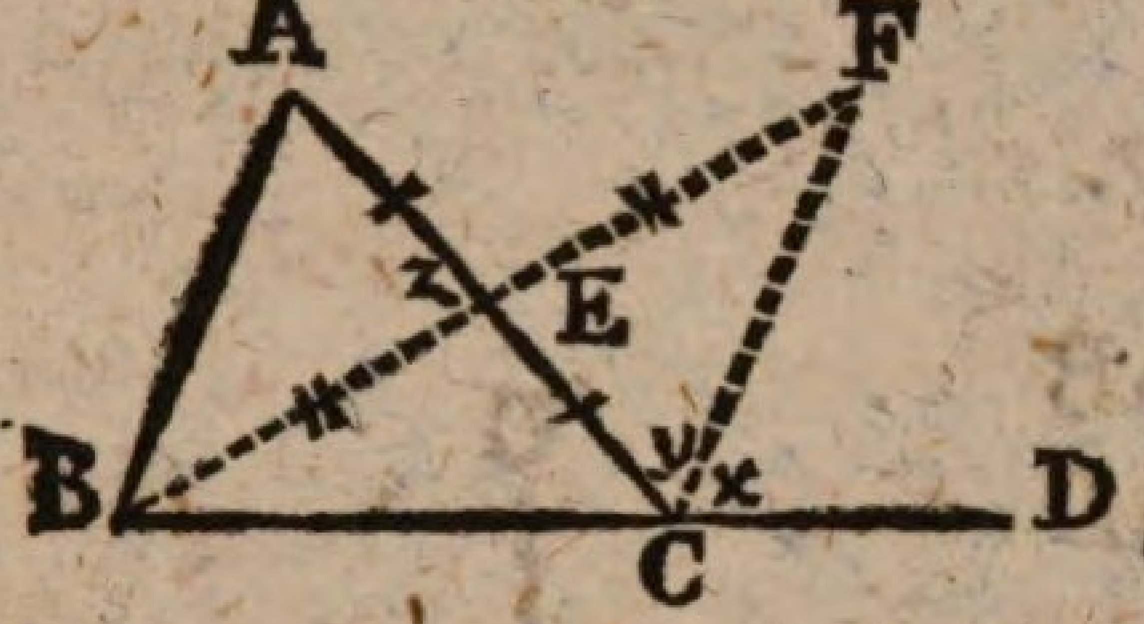
S. Auch rechte Winkel: denn BDE ist ein ScheitelWinkel von ADC, und ADE von BDC. ADC aber, und BDC sind rechte Winkel; folglich auch BDE und ADE (§ 76).

L. Also wenn zwei gerade Linien sich senkrecht schneiden, so machen sie vier rechte Winkel mit einander, und stehn zu beiden Seiten senkrecht auf einander.

Der ~~dreizehnte~~ 14. Satz

§ 78.

L. Wenn eines DreiEkks ABC eine Seite BC verlängert wird; so entsteht ein Winkel ACD, den die verlängerte Seite mit der andern Seite AC macht, welcher der Aussen-Winkel heissen kan.



Dieser AussenWinkel ACD soll mit dem ihm gegenüber stehenden innern Winkel A verglichen werden, um zu erfahren, welcher von beiden der gröste ist. — Es ist einige Vorbereitung dazu nötig. Zuerst wird AC gehalbt in E (§ 66). Darauf wird von B durch E eine unbestimmte gerade Linie gezogen, und EF = EB gemacht. Endlich wird FC gezogen; so entsteht ein DreiEkk ECF, dessen einer Winkel y ein Teil des AussenWinkels ACD ist. Das übrig bleibende Stükk FCD des AussenWinkels soll x heissen. Nun wollen wir den Winkel y mit A vergleichen. Wie kan das geschehn?

S. Durch Vergleichung der DreiEkke ABE und CFE, denen sie gehören.

L. Das ist richtig. Finden sich an ihnen die KennZeichen der Gleichheit und Aehnlichkeit? Welche Seiten sind gleich?

S. AC ist gehalbt, also EA = EC. Dan ist EF so lang gemacht als EB.

L. Recht! Und wir wollen das auf der Tafel bemerken. — Haben die DreiEkke auch gleiche Winkel?

S. Ja. E und z sind ScheitelWinkel, und also gleich (§ 76).

L. Wir haben also

$$\begin{array}{c} EA = EC \\ EB = EF \\ z = E \\ \hline \end{array}$$

Folglich?

S. $\triangle ABE \cong \triangle CFE$ (§ 56).

L. Und daraus folgt weiter?

S. Daß $\underline{A = y}$ (§ 24)

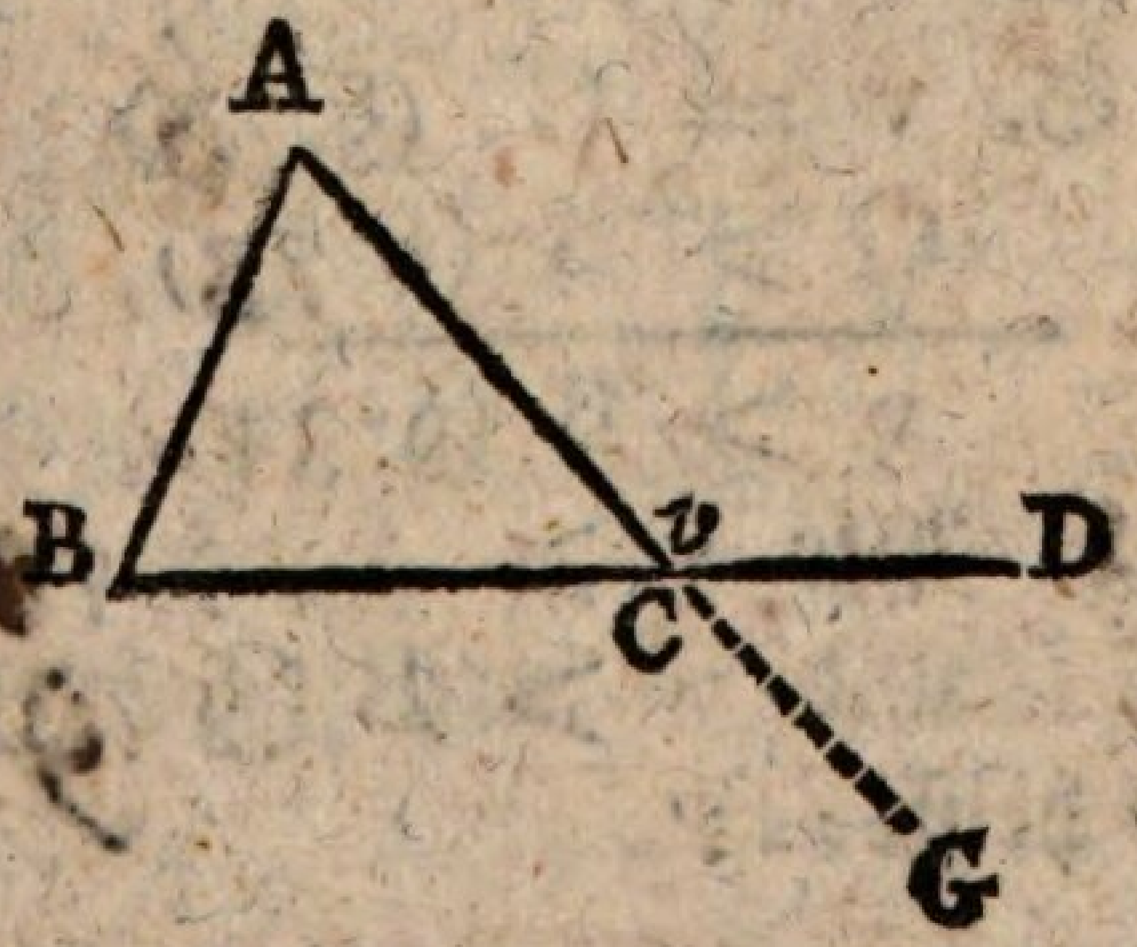
$A < y + x$ (§ 41)

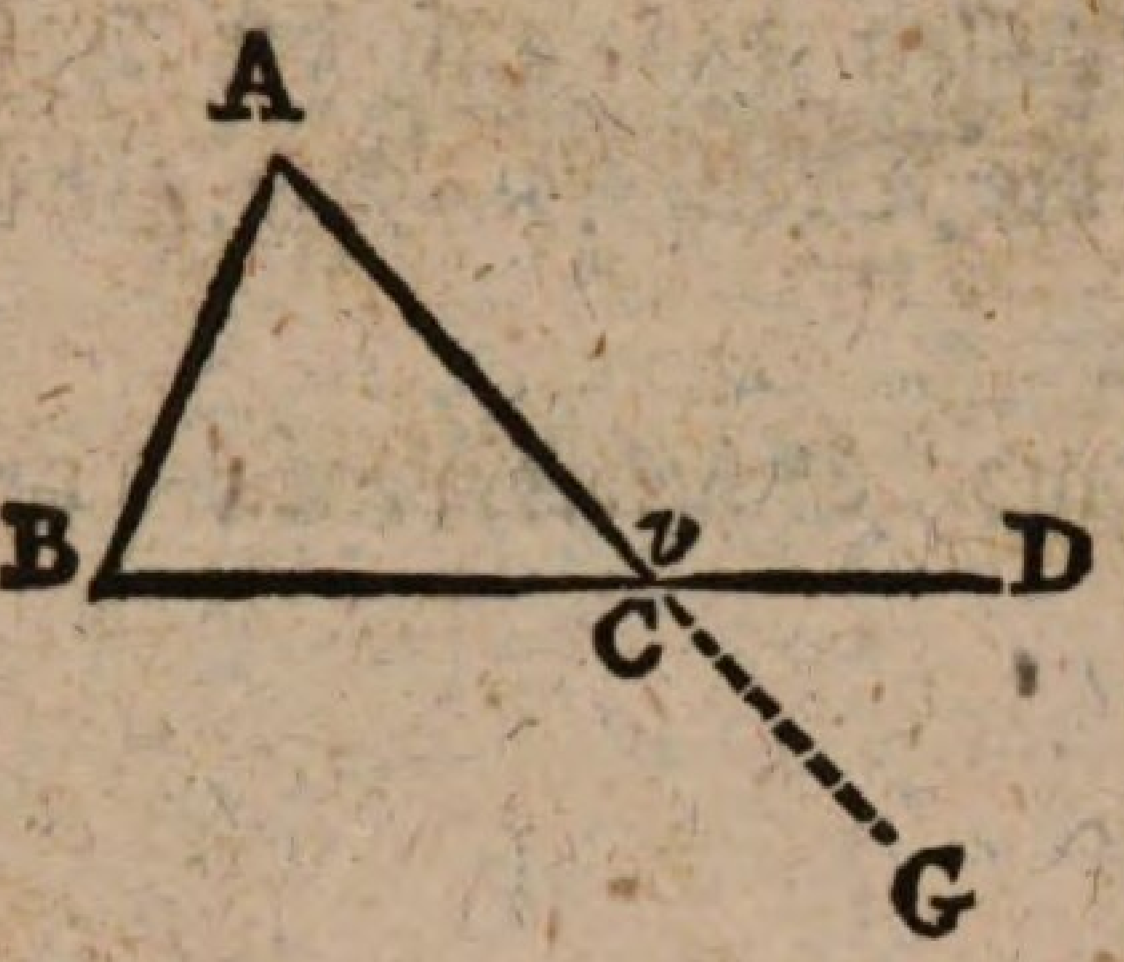
oder $A < ACD$ (§ 27).

L. Es ist also entschieden: Der AussenWinkel eines DreiEkks ist grösser, als der der verlängerten Seite gegenüber stehende innere Winkel.

§ 79.

L. In der vorigen Zeichnung werden die Linien BEF, und FC weggelöscht. — Es ist also $\angle$ ACD, den wir v nennen wollen, grösser als A (§78): aber wie werden v und





B sich zu einander verhalten? Welcher von beiden wird der gröste seyn? — Wir wollen um das mit Ueberzeugung sagen zu können, die dem Winkel B gegenüber stehende Seite AC unbestimmt, über C hinaus, nach G verlängern: so erhalten wir einen neuen AussenWinkel BCG, den wir C nennen wollen. — Welcher von den Winkeln B und C ist nun der gröste?

S. Der Winkel C ist grösser als B (§ 78).

L. Aber von den Winkeln C und v welcher ist da der gröste?

S. Die sind ScheitelWinkel, und also gleich groß (§ 76).

L. Und B und v wie verhalten die sich gegen einander?

S. Da C grösser ist als B; so muß auch v, welchen C gleich ist, grösser seyn, als B.

L. Ganz recht: durch Worte ist der Beweis geführt; wir wollen ihn nun auch durch Zeichen führen.

S. v = C (§ 76)
$\underline{\quad C > B \text{ (§ 78)}}$
v > B (§ 34).

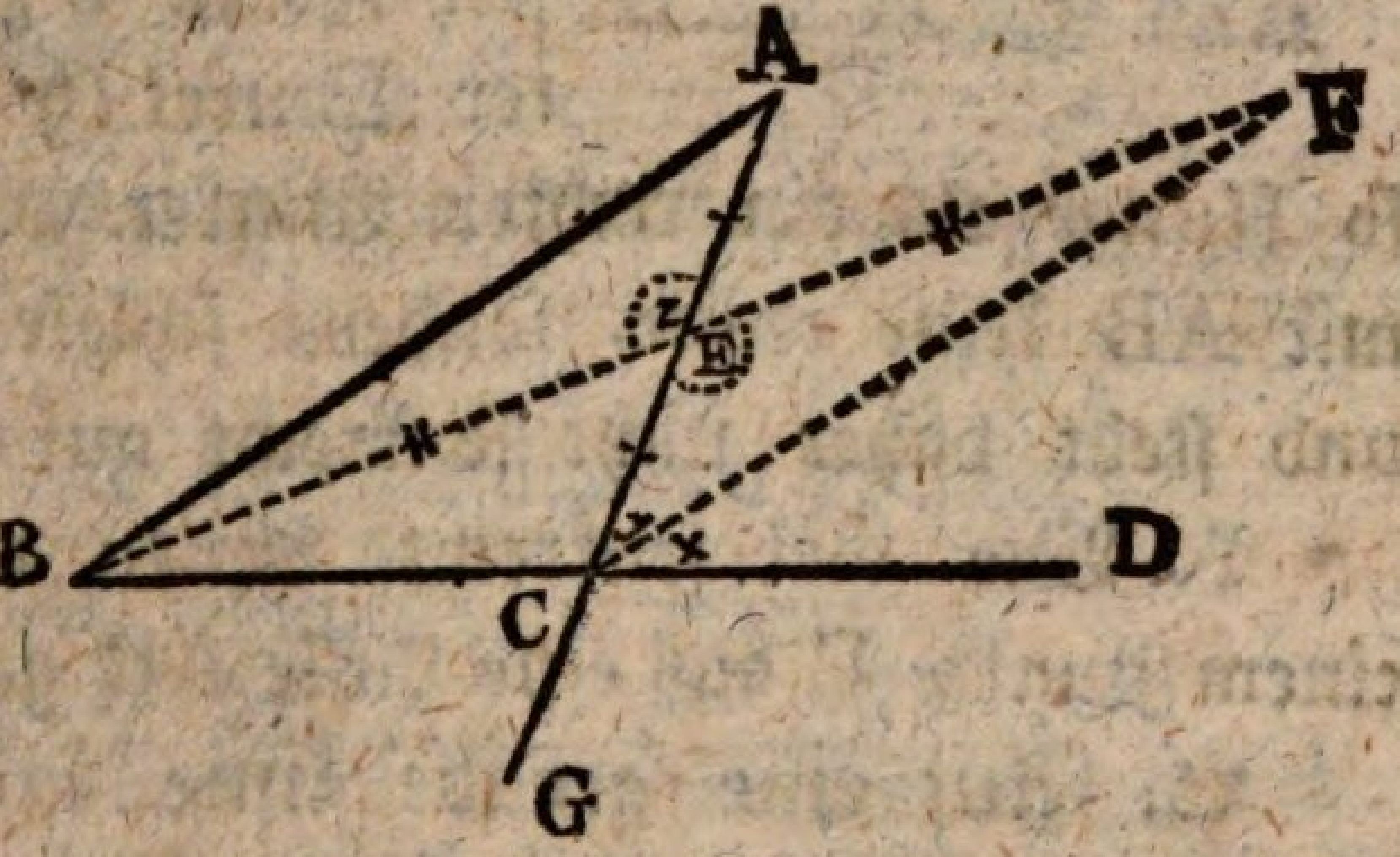
L. Also v > A (§ 78)
und v > B (§ 79).

Das heisst = = ?

S.

S. Der AussenWinkel eines DreiEkks ist grösser, als jeder innere ihm gegenüber stehende, der nämlich kein NebenWinkel von ihm ist.

§ 80.

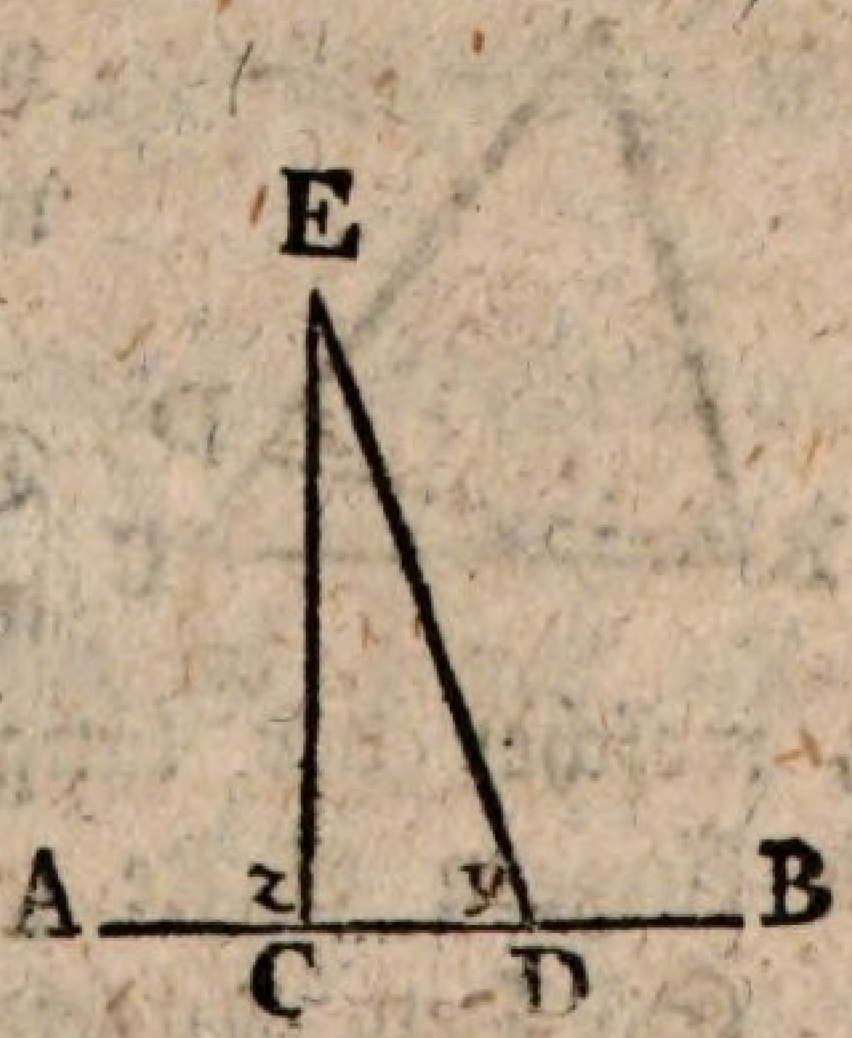


Um sich von der Allgemeinheit dieses Satzes zu überzeugen, wird es nüzlich seyn zu untersuchen, ob er auf jeden Fall passe. Man kan daher den Winkel ACB, der vorhin spitz war, stumpf machen; damit der AussenWinkel ACD, der stumpf war (§ 78), spitz werde.

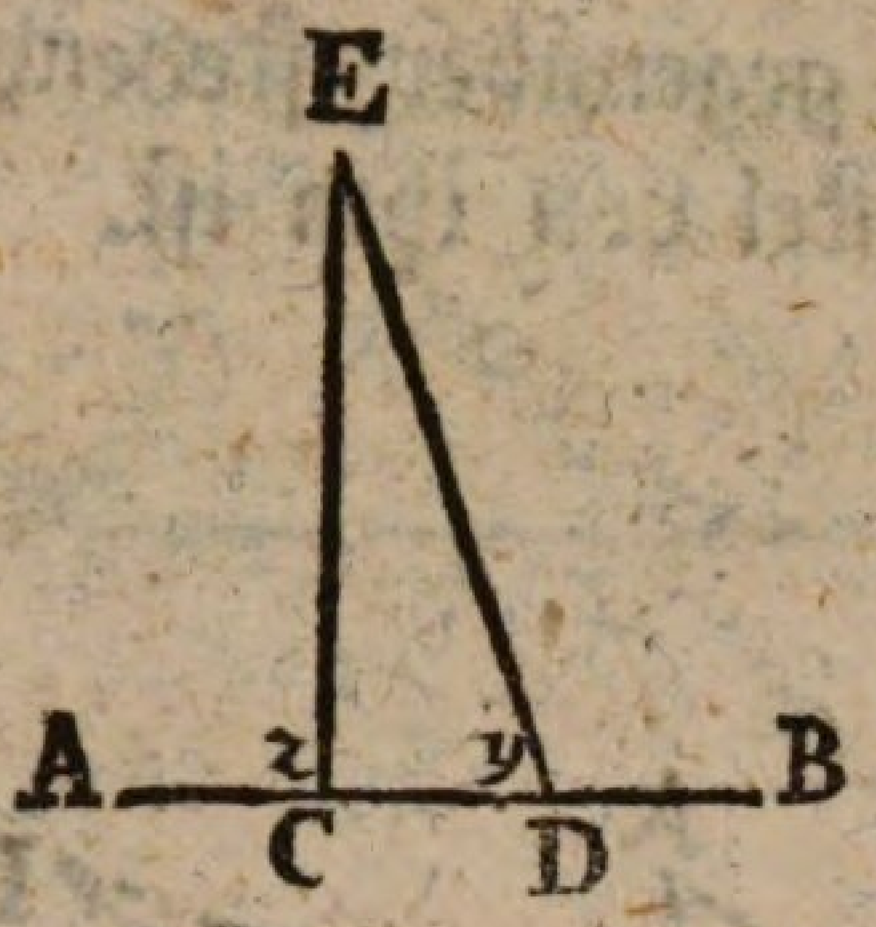
15.

Der ~~vierzehnte~~ Satz.

§ 81.



L. Es wird eine gerade Linie AB gezogen, und auf derselben wird, aus einem beliebigen Punkte C, eine Linie CE senkrecht errichtet § 68). Von dem EndPunkte E wird nach einem andern, gleichfals auf AB willkührlich angenommenen Punkte D, eine Linie DE gezogen. Steht diese auch senkrecht auf AB?



S. Nein.

L. Recht! Aber wie beweist mans?

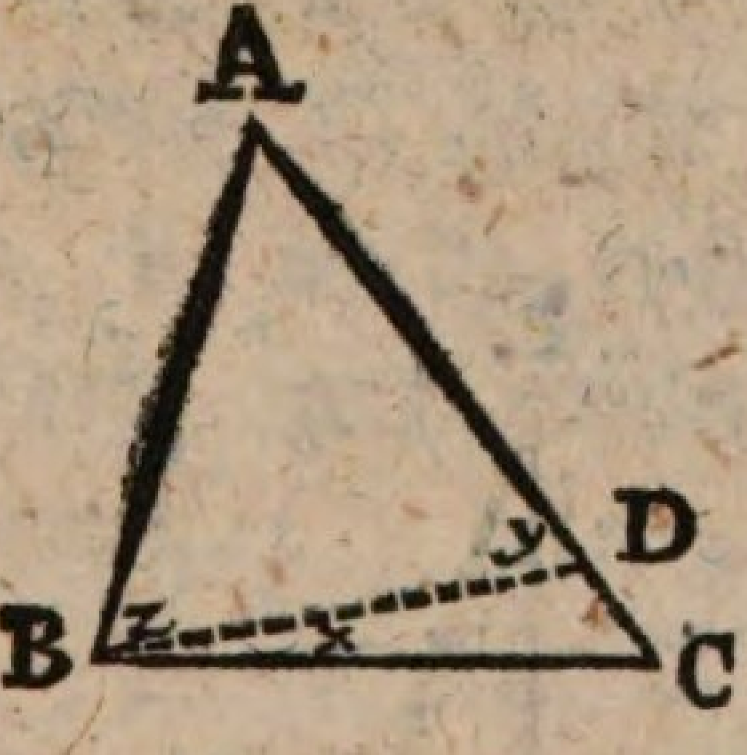
S. z, als ein AussenWinkel, ist grösser als y (§ 78). Und da CE auf AB senkrecht steht, so ist z zugleich ein rechter Winkel (§ 50): und y also kleiner als ein rechter Winkel. DE also macht mit AB keine rechte, sondern schiefe Winkel (§ 48) und steht daher nicht senkrecht auf ihr (§ 47).

L. Wie viel senkrechte Linien also können, von einem Punkte E auf eine Linie AB gezogen werden?

S. Auf eine gerade Linie kan aus einem Punkte, nur eine Linie senkrecht gezogen werden.

Der 16. ~~funfzehnte~~ Saz.

§ 82.



L. Hier ist ein DreiEkk ABC von ungleichen Seiten. Es ist nämlich

AC > AB.

Die Frage ist: Welcher Winke wird der gröste seyn? Winkel B, welcher der längern; oder Winkel C, welcher der kürzern Seite gegenüber steht?

S. Dem AugenSchein nach ist B grösser als C.

L. Dem AugenSchein traut man in der Geometrie nicht, sondern der Verstand muß Ueberzeugung ha-

haben. Um diese zu erlangen wollen wir von AC so viel abschneiden als der Ueberschuß über AB beträgt, so daß $AD = AB$ werde, und die Linie BD ziehn. — Was für ein DreiEkk ist nun ABD?

S. Ein gleichschenkliges (§ 57).

L. Und was für Eigenschaften hat ein gleichschenkliges DreiEkk?

S. Es hat zwei gleiche Seiten, und zwei gleiche Winkel (§ 57).

L. Welches sind hier die gleichen Winkel?

S. Die an der GrundLinie, z und y.

L. Also $z = y$. Aber von den Winkeln y und C, welcher ist da der gröste?

S. Das weis ich nicht.

L. CD und DA machen doch eine gerade Linie, und DA ist folglich als Verlängerung von CD zu betrachten. Was hat nun der Winkel y bei dem DreiEkke CD für ein Amt oder für eine Bedeutung?

S. Er ist ein AussenWinkel, und folglich grösser als C und als x (§ 78).

L. Das müssen wir wieder an die Tafel schreiben:

$y > C$ § 78

Aber z und C, wie verhalten sich die gegen einander?

S. Da $z = y$ (§ 57).
und $y > C$ (§ 78)
so ist auch $z > C$ (§ 34).

L. Aber wenn zu z noch der Winkel x hinzukömt, wie verhält dan sich z + x zu C?

S. Wenn x schon grösser ist als C, so muß noch viel mehr z + x grösser seyn als C (§ 42).

L. Wir müssen den Beweis in der Kürze wiederholen.

S. AB = AD (Verfert.)

y = z (§ 57)
Aber y > C § 78)

z > C (§ 34)

z+x > C (§ 42)
oder B > C (§ 45).

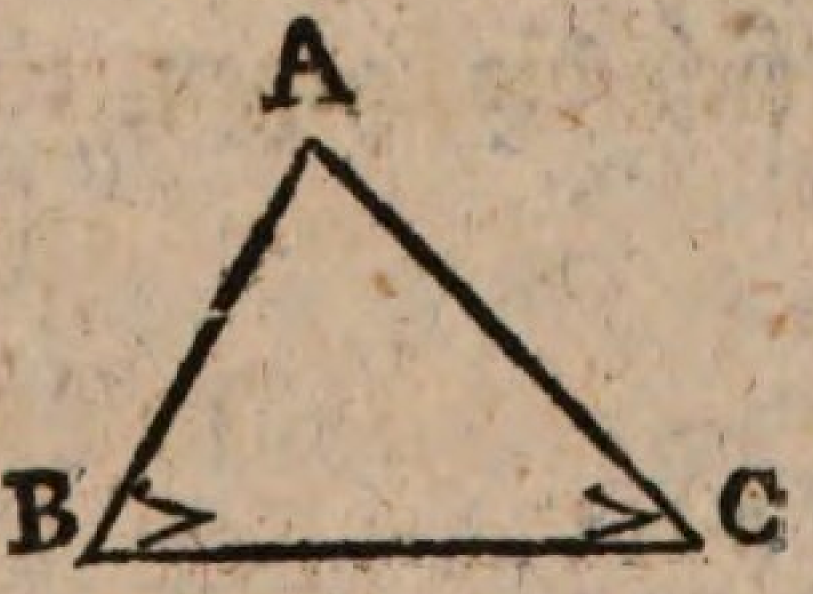
L. Wie wird man nun die jezt gefundene Wahrheit in Worte kleiden?

S. In jedem DreiEkk steht einer längern Seite ein grösserer Winkel gegenüber, als einer kürzern.

17.

Der ~~sechzehnte~~ Satz.

§ 83.



L. Jezt wollen wir den vorigen Satz umkehren. Hier ist ein DreiEkk ABC in welchem

∠B > ∠C

ist. Kan das Einfluß auf die Seiten haben? Ist die dem grössern Winkel B gegen-

genüber stehende Seite AC notwendig länger, als die dem kleinern C gegenüberstehende AB?

S. Ich weis es nicht.

L. Da dieser Satz der GegenSatz des vorigen ist, welche BeweisArt findet Stat?

S. Die apagogische (§ 62).

L. Angenommen also AC wäre nicht länger als AB, was müste sie dan seyn?

S. Entweder kürzer, oder auch gleich AB.

L. Zuerst angenommen AC sei gleich AB: was wäre dan ABC für ein DreiEkk?

S. Ein gleichschenkliges (§ 57).

L. Und wie müsten dan die Winkel B und C beschaffen seyn?

S. Sie würden gleich groß seyn (§ 57)

L. Sind sie denn das?

S. Nein; B ist grösser, angenommen als C.

L. Will und kan man also nicht zugeben daß B gleich C sei, was ist man genötigt zuzugeben?

S. Daß AB und AC ungleich seyn müssen?

L. Recht! Aber welche von beiden wird die längste seyn? — Wir wollen einmal annehmen AB sei länger als AC: was würde die Folge davon seyn?

S. Dan würde der Winkel C grösser seyn als der Winkel B (§ 81).

L. Ist er denn das nicht?

S. Nein. Wir haben B grösser angenommen als C.

L. Da nun C notwendig grösser seyn müste als B, wenn AB länger wäre als AC; und C doch wirklich kleiner als B ist; was ist man zuzugeben gezwungen?

S. Daß AB nicht länger sei als AC.

L. Gleich aber können AB und AC auch nicht seyn, wie schon erwiesen ist. Was bleibt also übrig?

S. Da AB weder gleich AC, noch länger als AC seyn kan; so bleibt nichts übrig als AB kürzer als AC anzunehmen.

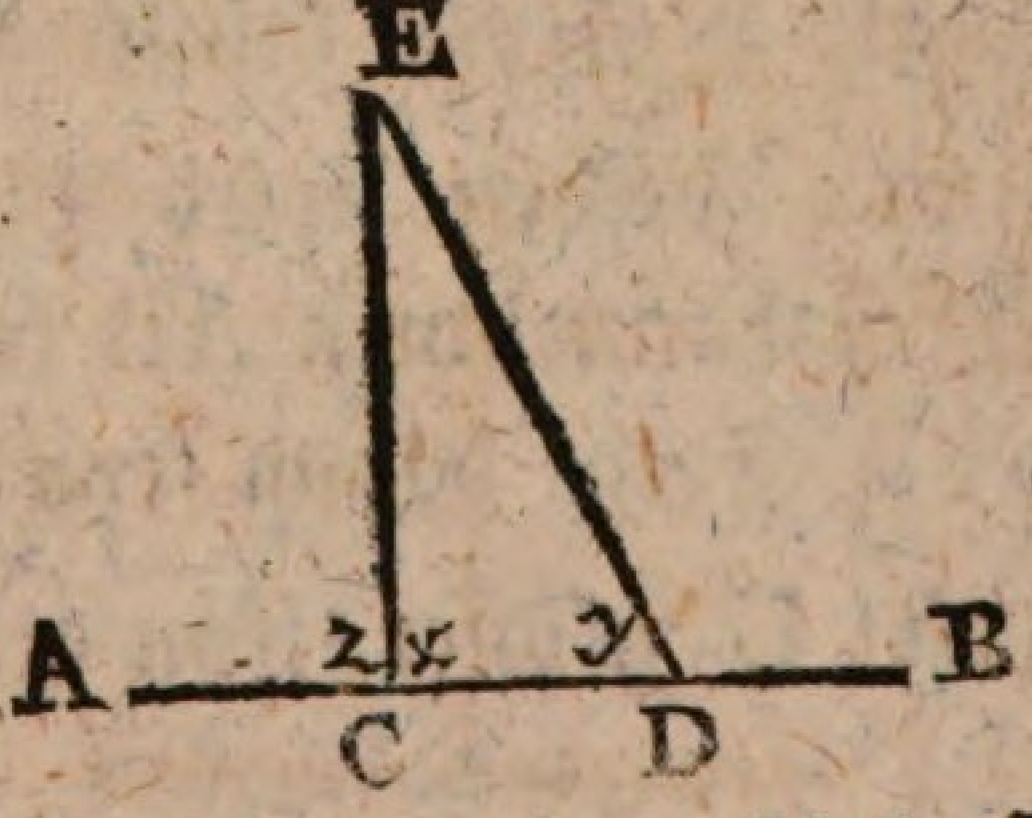
L. Wir haben also eine neue Wahrheit gefunden. Wie lautet sie?

S. In jedem DreiEkke steht einem grössern Winkel auch eine grössere Seite gegenüber als einem kleinern.

18.

Der ~~siebzehnt~~e Satz.

§ 84.



L. Auf eine gerade Linie AB wird, aus einem auf derselben nach Belieben angenommenen Punkte C, eine senkrechte Linie CE errichtet. (§ 68). Von E wird eine andre Linie ED auf AB gezogen. — Wie steht diese auf AB? Auch senkrecht?

S. Nein. Von einem Punkte kan nur eine Linie auf eine andre senkrecht gezogen werden (§ 80).

L. Aber welche Linie ist långer? die senkrechte CE, oder die schiefe DE?

S. Die schiefe ist långer als die senkrechte.

L. Wie beweist mans? — Welcher Winkel ist grősser? x oder y?

S. $x = z$ (§ 50, 52)

$z > y$ (§ 78)

$x > y$ (§ 34)

$DE > CE$ (§ 82).

L. Und was bedeutet das?

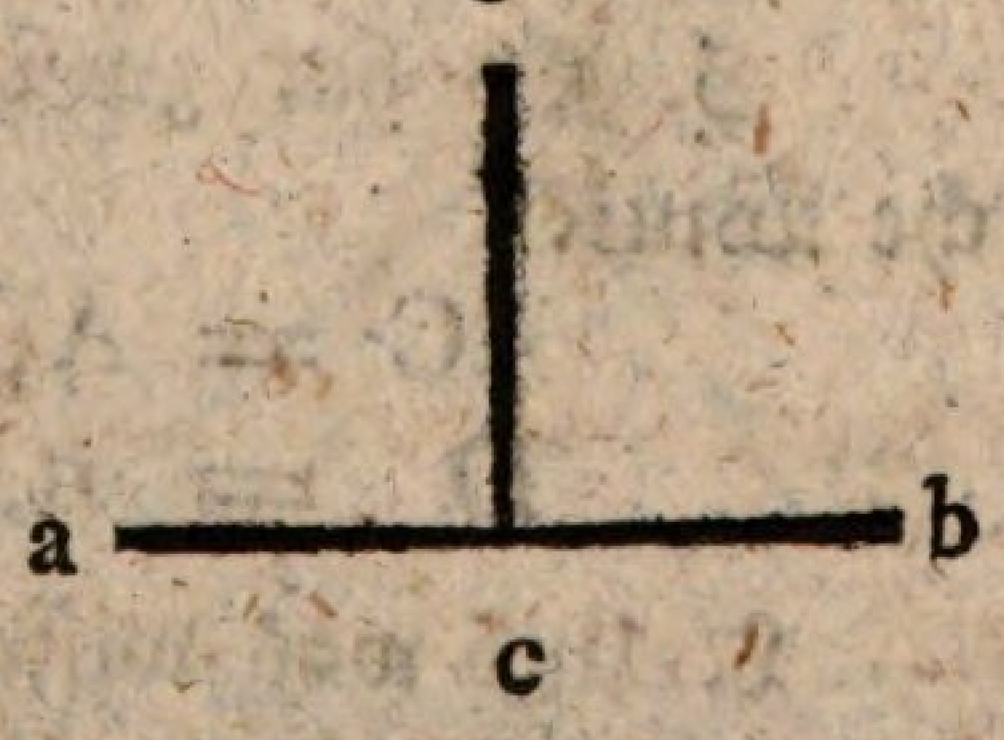
S. Von allen Linien die, von einem Punkte auf eine gerade Linie können gezogen werden, ist die senkrechte die kűrzeste.

§ 85.

L. Welches ist die Entfernung zweier Dinge von einander?

S. Die kűrzeste Linie welche von einem zum andern kan gezogen werden (§ 13).

L. Wodurch also wird die Entfernung eines Punktes e von einer geraden Linie ab gemessen?

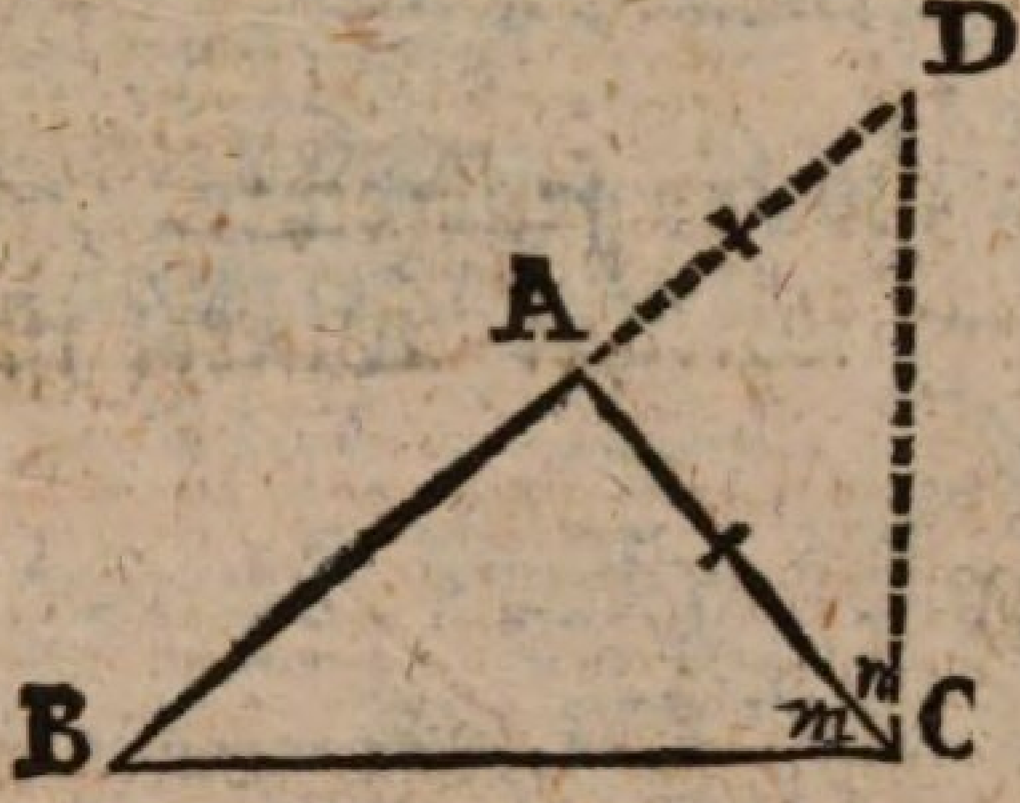


S. Durch eine von ihm auf selbige gezogene senkrechte Linie ec.

Der

Der ~~achtzehn~~ 19.te Saß.

§ 86.



L. Hier ist ein DreiEkk ABC von ungleichen Seiten. Solte es möglich seyn, daß die längste Seite BC länger wäre, als die beiden kürzern, AB und AC, zusammen?

S. Nein; die gerade Linie BC ist der kürzeste Weg von B nach C (§ 13); die Linie BA und BC können also nicht anders als durch einen Umweg eben dahin gehn.

L. Das ist richtig, und man findet Anleitungen zur Geometrie wo der Beweis auf diese Art geführt ist: die mehrsten aber bleiben bei dem Euklides, der einen zwar weitläuftigern, aber zugleich sinnreichern Beweis gegeben hat. Er verlängert nämlich BA über A hinaus, und macht AD = AC, und zieht DC. So entsteht ein kleineres DreiEkk ACD, und ein grösseres DBC. Was ist nun zuerst von dem kleinern bekant?

S. Es hat zwei gleiche Seiten, und zwei gleiche Winkel.

AC = AD (Verf.)
D = n (§ 57).

L. Und was wissen wir von dem grössern? Wie lang ist seine Seite BD = BA + AD?

S. BD = BA + BD = BA + AC (§ 27).

L. Wenn man nun bewiese daß BD länger sei als BC, was würde daraus folgen?

S. Daß auch BA + AC länger seien (§ 34).

L. Recht! Aber Woran erkenne ich, daß eine DreiEkksSeite länger ist als eine andre?

S. Aus dem ihr gegenüber stehenden Winkel, wenn der grösser ist als der einer andern gegenüber liegende.

L. Um also zu beweisen daß BD länger sei als BC worauf kömt es zunächst an?

S. Auf die ihnen gegenüber stehenden Winkel C und D, daß nämlich C grösser sei als D.

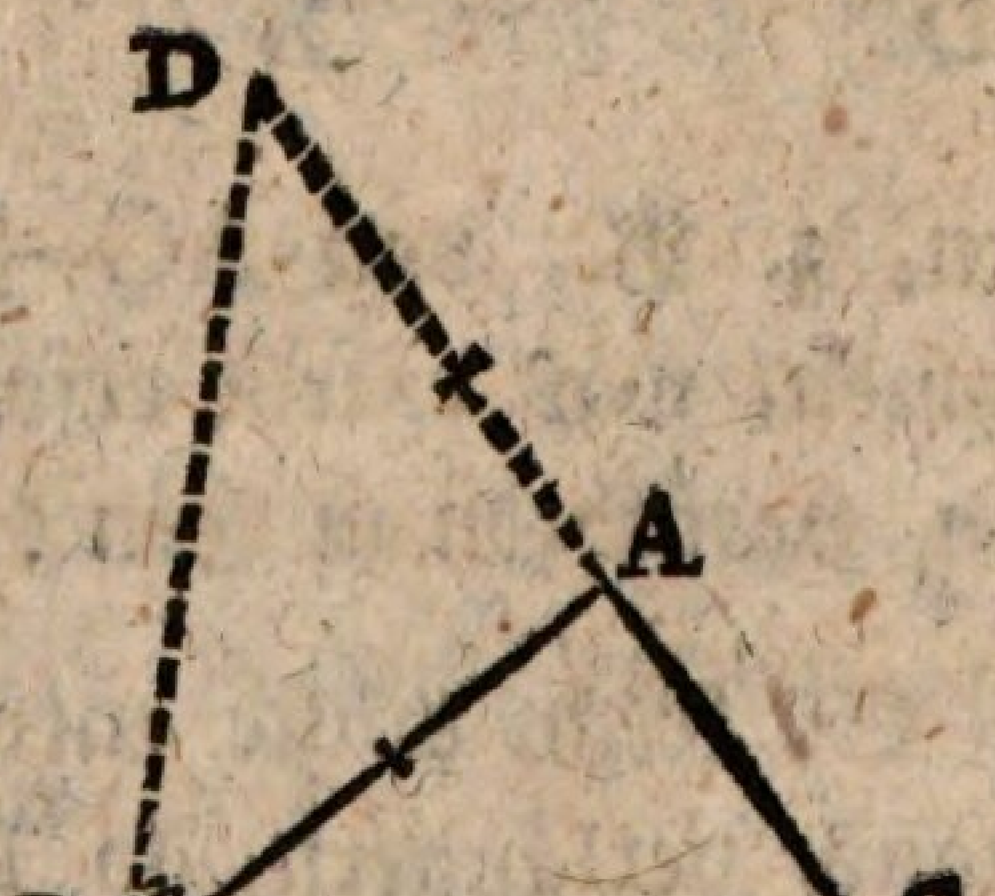
L. Ist er denn das? Wie groß ist der Winkel n?

S. $n = D$ (§ 57)

$n + m > D$ (§ 41)

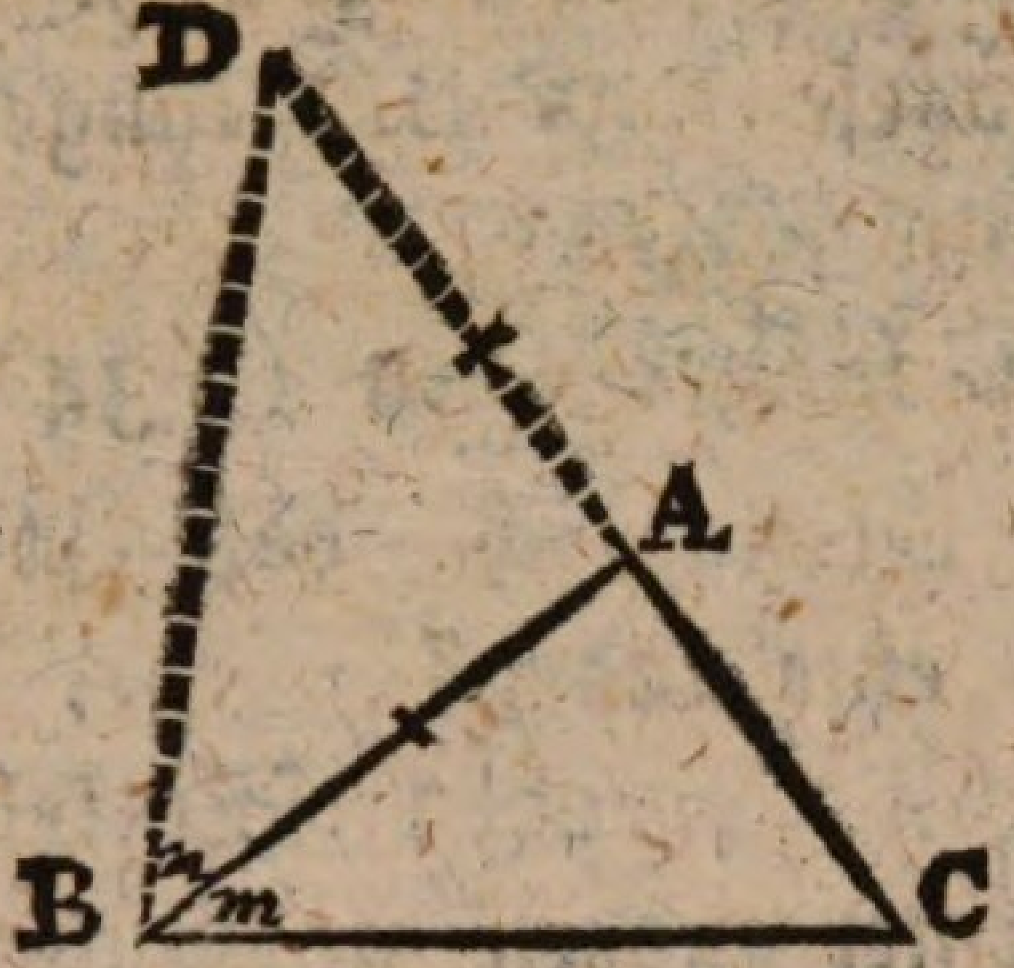
$BD > BC$ (§ 82)

$BA + AD > BC$ (§ 27).



L. War es, um dieses heraus zu bringen, notwendig BA zu verlängern? Konte nicht auch eine andre Linie verlängert werden?

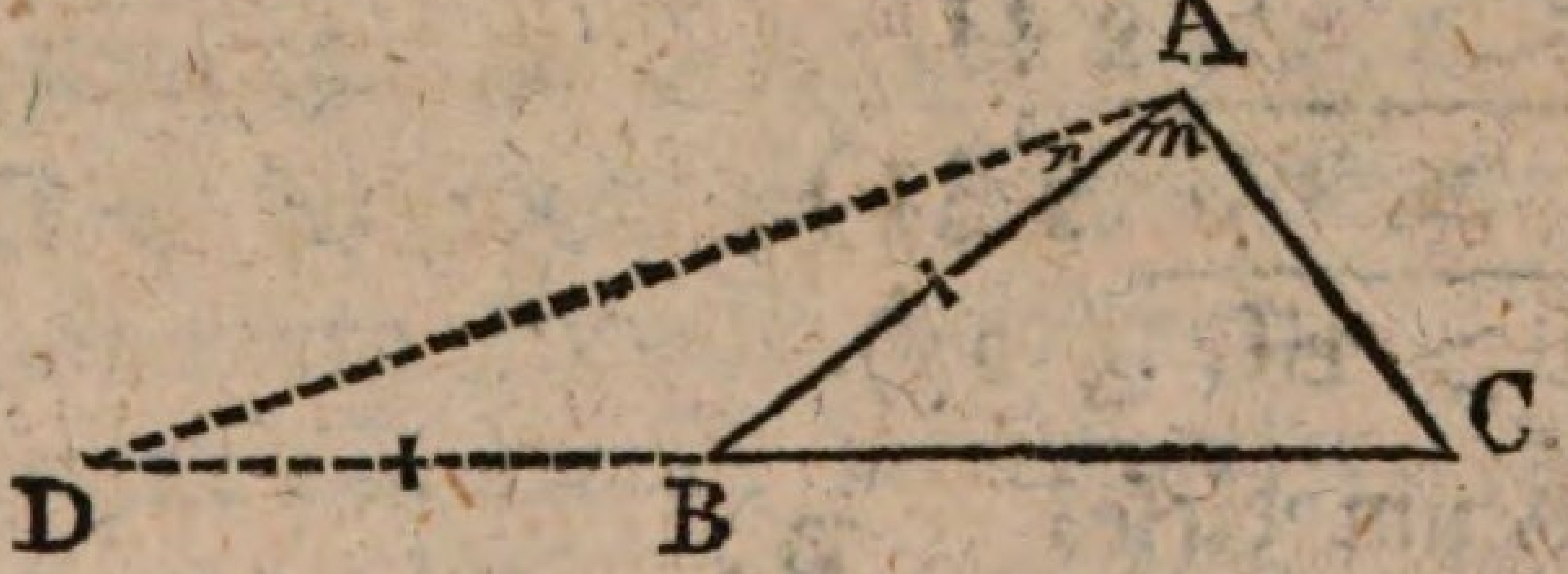
S. (Nach einigem Nachsinnen, und Versuchen mit Bleistift, oder Kreide): Man hätte auch CA verlängern können.



L. Recht! Es ist gleichgültig welche der beiden zusammen gehörigen Linien verlängert werde; nur muß es nach der Seite zu geschehn, wo die andre von ihnen liegt. Und wie lang muß die Verlängerung seyn?

S. So lang als die andre unverlängerte Linie. Bei BA muß die Verlängerung wie CA; bei CA muß sie wie BA seyn.

L. Recht! Da wir von den beiden kürzesten Seiten gezeigt haben, daß sie zusammen länger sind als die dritte; so ist wol nicht zu bezweifeln, daß jene par Seiten welche nicht die kürzesten sind, es noch eher seyn müssen. Wolte man indessen von einem par andern, z. B., von AC + BC diesen Beweis unternehmen, was würde erfordert werden? Wie würde man verfahren müssen?



S. Man müste entweder AB oder CB, über B hinaus, verlängern, so lang als die andre der beiden zusammen gehörigen.

L. Recht! Und in der Zeichnung darf man nur die Buchstaben A, B, C verwechseln; so passt der ganze

ganze vorige Beweis. — Wie würde man nun den jezt gefundenen Saz ausdrükken?

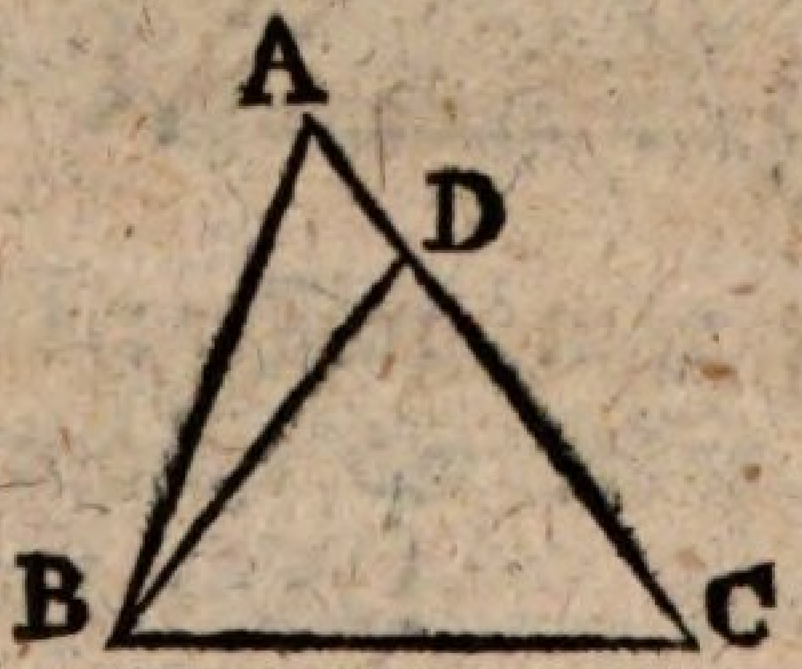
S. In jedem DreiEkk sind zwei Seiten zusammen länger als die dritte Seite.

L. Es kan also kein DreiEkk verfertigt werden, dessen Seiten nicht diese Eigenschaft haben.

20.
Der ~~neunzehnte~~ Saz.

§ 87.

L. Es wird ein willkührliches DreiEkk ABC gezeichnet. Auf einer Seite, AC, desselben wird ein Punkt D nach Belieben angenommen und von demselben wird, nach dem gegenüber stehenden Winkel B, eine Linie DB gezogen. — Die Frage ist nun: welches ist grösser: AB + AC oder DB + DC?



S. $AB + AC = AB + AD + DC$ (§ 45)
Es soll also verglichen werden:

$AB + AD + DC$, (§ 27)
und $DB + DC$.

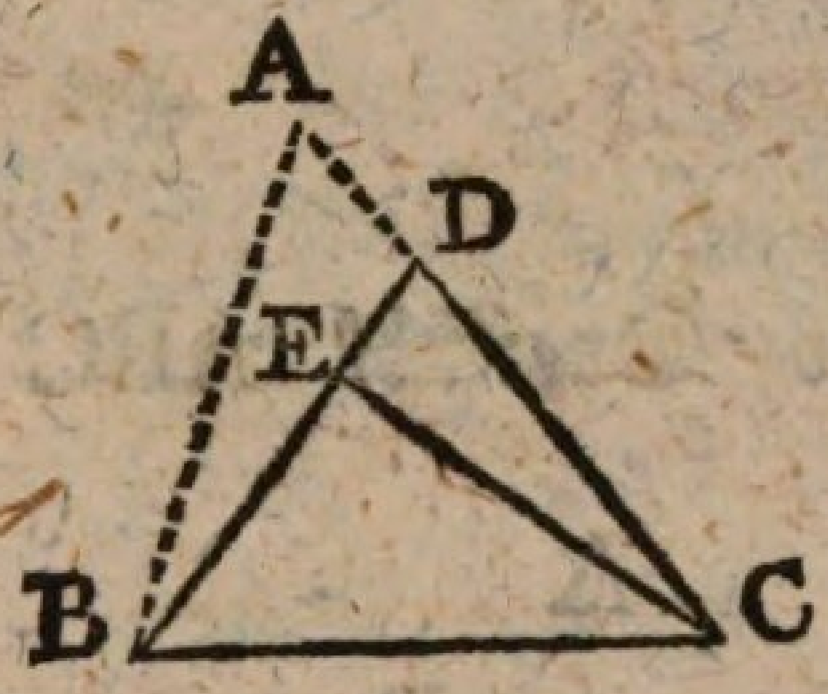
Da DC beiden Grössen gemein ist, so sind eigentlich nur AB + AD mit DB zu vergleichen, und das ist nicht schwer. Denn

$$\frac{AB + AD > DB \text{ (§ 85)}}{\left.\begin{matrix} AB + AD + DC \\ AB + AC \end{matrix}\right\} > DB + DC \text{ (§ 38).}}$$

S　　　　L.

L. Also eine vom Ende B der Grundlinie BC eines DreiEkks ABC, auf die gegenüber liegende Seite AC gezogene gerade Linie BD, ist, mit dem Abschnitte DC dieser Seite zusammen, kürzer als die Schenkel AB und AC zusammen genommen. — —

§ 88.



L. Auf eben die Art wollen wir nun mit dem DreiEkke DBC verfahren; nämlich aus der Winkelspitze C, auf die gegenüber stehende Seite BD, eine Linie CE ziehn. — Was ist nun grösser: $DC + DB$, oder $EC + EB$?

S. Es ist genau der vorige Fall.

$$DE + DC < EC \quad (\S\ 85)$$

$$\left.\begin{matrix} DE + EB + DC \\ DB + DC \end{matrix}\right\} < EB + EC \quad (\S\ 38).$$

L. Also $AB + AC > DB + DC$ (§ 86)

$$DB + DC > EB + EC \quad (\S\ 87)$$

Was ist die Folge daraus?

S. Daß auch $AB + AC > EB + EC$ (§ 35).

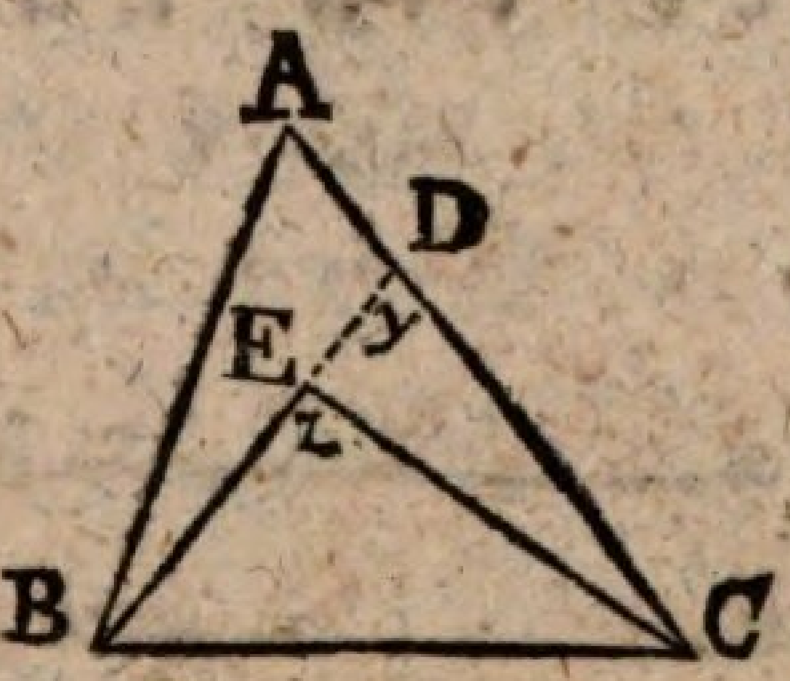
L. Nun können wir den LehrSatz (§ 86) mit seinem Zusatze (§ 87) zusammen fassen. Was wird das Resultat seyn?

S. Wenn von einem Punkte E innerhalb eines DreiEkks ABC nach den EndPunkten einer Seite BC,

BC, gerade Linien DB und DC gezogen werden; so sind diese Linien zusammen kürzer, als die beiden andern Seiten AB und AC des DreiEkks ABC zusammen genommen.

Der ~~zwanzigste~~ Saz.

§ 89.



L. Die vorige Zeichnung bleibt, nur den Winkel welchen die Linien BD und CD mit einander machen wollen wir z nennen, und ihn mit A vergleichen, um zu sehen, welcher von beiden der gröste ist. Dazu aber wird noch ein dritter Winkel erfodert; nämlich der aus dem ZusammenReß der Linien CE und DE entstehende, den wir y nennen wollen. — Welcher Winkel ist nun grösser, y oder z?

S. z, als ein AussenWinkel des DreiEkks CDE ist grösser als y (§ 78).

L. Und von y und A welcher ist da der gröste?

S. y, als ein AussenWinkel des DreiEkks ABE, ist auch grösser als A (§ 78).

L. Also $z > y$
$y > A$ } (§ 78)

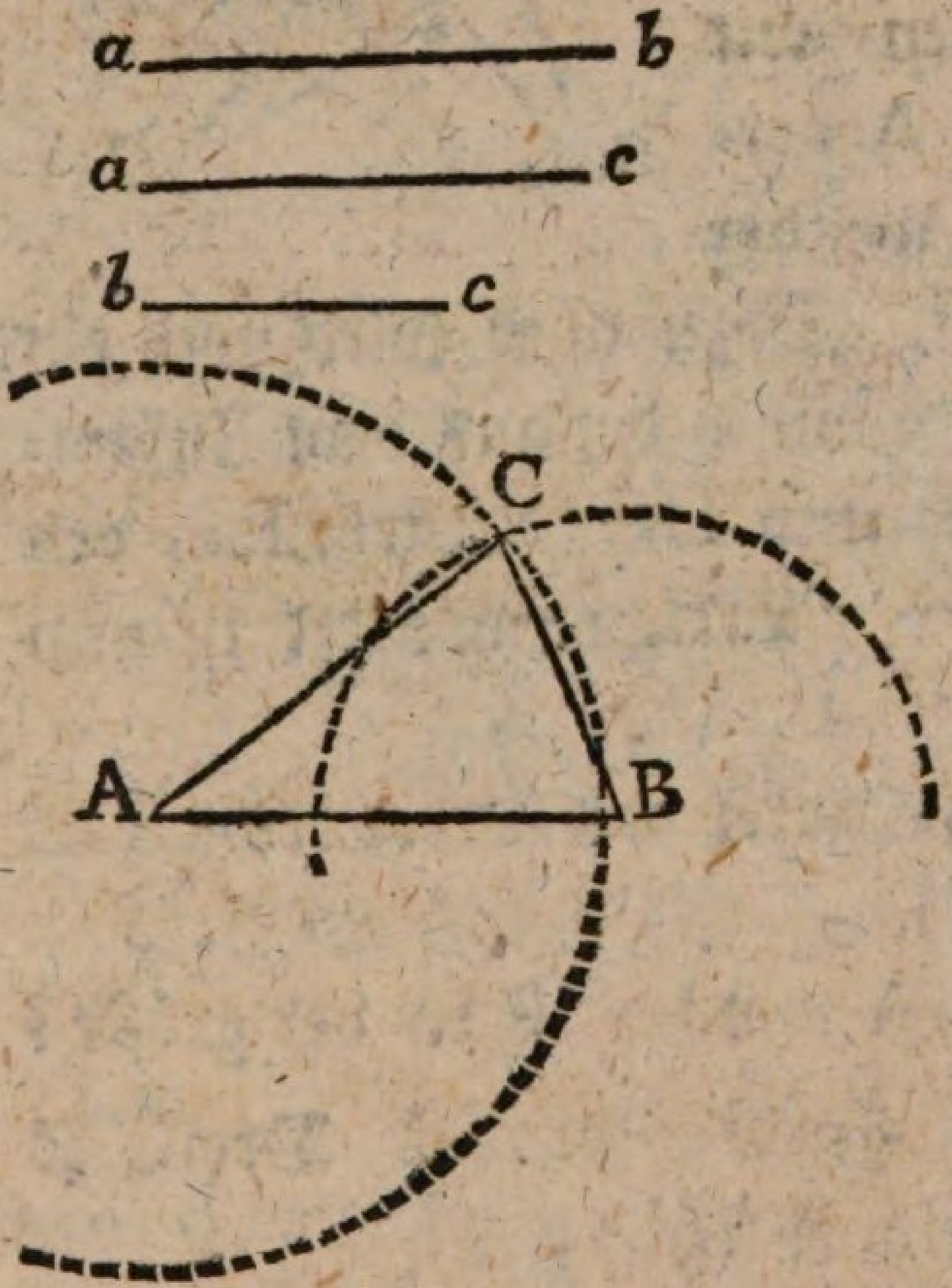
S. Folglich $z > A$ (§ 35)

L. Da haben wir was wir suchten. Wie lautet nun der jezt gefundene LehrSaz?

S. Wenn von einem Punkte E innerhalb eines DreiEkks ABC nach den EndPunkten einer Seite BC, gerade linien DB und DC gezogen werden, so machen sie einen Winkel z mit einander, welcher grösser ist als der Winkel A welchen die beiden übrigen DreiEkks-Seiten AB, AC mit einander machen.

Der ~~ein~~ und zwanzigste Saz.

§ 90.



L. Wie müssen Linien, oder Seiten, aus denen ein DreiEkk soll verfertiget werden, beschaffen seyn?

S. Zweie zusammen müssen länger seyn als die DreiEkke (§ 85).

L. Hier sind drei Linien ab, ac und bc, von der erfoderten Beschaffenheit. Wie wird nun aus ihnen ein DreiEkk verfertigt? — Die Verfertigung des gleichseitigen DreiEkks (§ 54) kan, mit nötigen Veränderungen, zum Muster dienen.

S. Ich nehme eine der Linien ab = AB, zur GrundLinie, beschreibe aus A, mit der Länge der

zwei-

zweiten ac, einen Kreis, und aus C, mit der Länge der dritten bc einen zweiten Kreis, der den ersten schneidet in C. Hierauf ziehe ich die Linien AC, = ac, und BC = bc; so ist ABC das verlangte DreiEkk.

L. Sehr gut! nur die Gleichheit der Linien AC und ac, BC und bc, muß erwiesen werden.

S. Der Kreis aus A ist mit dem HalbMesser ac, und der aus B mit dem HalbMesser bc, beschrieben. Alle HalbMesser eines Kreises aber sind gleich (§ 21); folglich AC = ac, und BC = bc.

L. Nun bin ich zufrieden. — Was für ein Satz war dies?

S. Eine Aufgabe.

L. Und wie lautet sie?

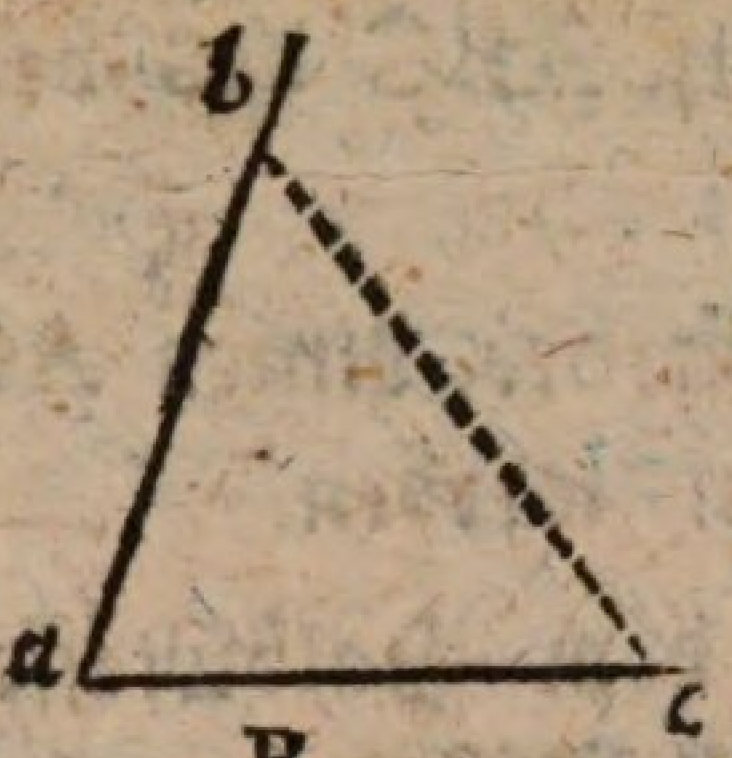
S. Aus drei gegebenen Linien, von denen zweie zusammen länger sind als die dritte, ein DreiEkk zu verfertigen.

L. Es versteht sich übrigens, daß die gegebenen Seiten alle drei einander ungleich, oder auch zweie einander gleich seyn können. Im ersten Fall wäre ABC ein ungleichseitiges DreiEkk; und im zweiten = = ?

S. Wäre es ein gleichschenkliges (§ 57).

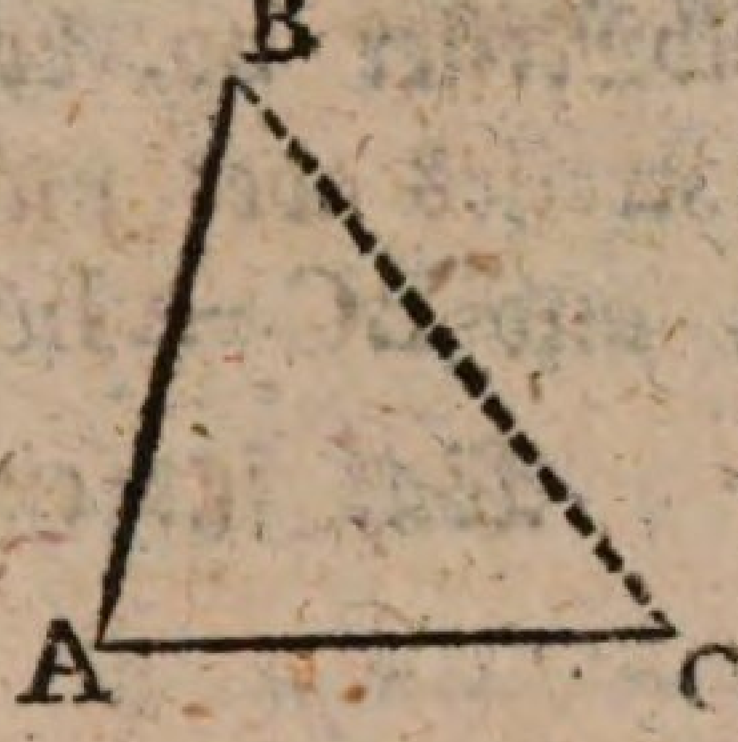
Der ~~zwei~~ 3. und zwanzigste Satz.

§ 91.



L. Hier ist ein Winkel a. Daraus läßt sich doch ein DreiEkk machen?

S. O ja; ich darf nur die Schenkel durch eine Linie bc verbinden (§ 19).



L. Aber läßt sich auch ein andres DreiEkk machen, dessen Seiten eben die Länge hätten, als die des DreiEkks abc?

S. Allerdings! Ich darf nur verfahren wie vorhin (§ 90), um ein DreiEkk ABC zu verfertigen, in welchem

$$AB = ab$$
$$AC = ac$$
$$BC = bc$$

L. Recht! Und was ist die Folge von dieser Gleichheit aller Seiten in beiden DreiEkken?

R. Daß $\triangle ABC \cong \triangle abc$ (§ 63).

L. Und was folgt hieraus weiter?

S. Daß auch $\left.\begin{aligned} \angle A &= \angle a \\ B &= b \\ \text{und } C &= c \end{aligned}\right\}$ (§ 24)

L. Also $\angle A = \angle a$. Das war es eben was verlangt wurde. Wir wissen also nun einen Winkel zu machen, der einem gegebenen Winkel A gleich ist. Allenfalls können auch der Schenkel AB und der ScheitelPunkt A gegeben seyn. —

Daß

Daß zur blossen Ausübung die Linien bc und BC nicht einmal nötig sind, fält schon von selbst in die Augen. Und eben so klar ist es, daß sich ein DreiEkk verfertigen lässt, wozu ein Winkel a, und zwei ihn einschliessende Seiten ab und ac, gegeben sind.

Der ~~drei~~ 4. und zwanzigste Saz.

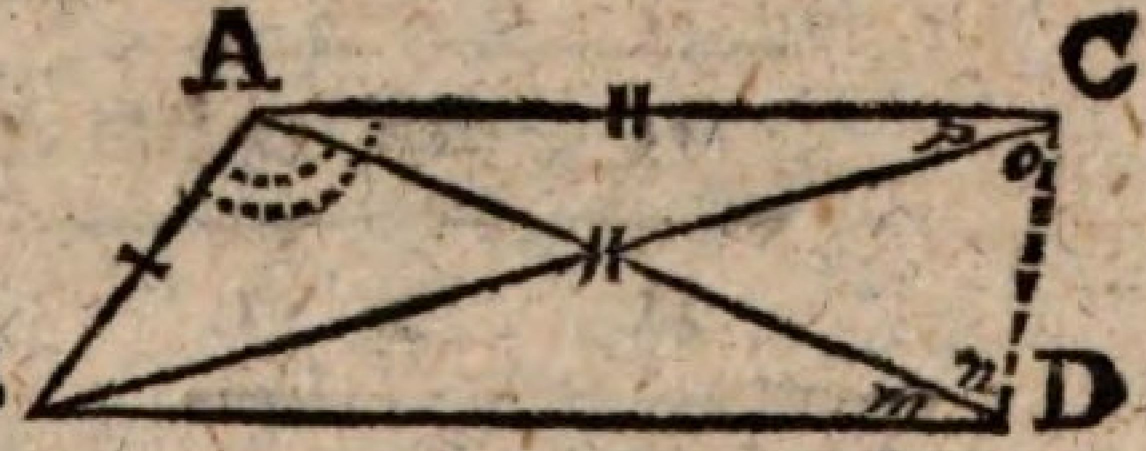
§ 92.

L. Hier sind zwei DreiEkke ABC und ABD, in welchen

$AB = AB$

und $AC = AD$

BAC aber $\angle ~~ABC~~ > \angle BAD$



Die Frage ist: Wie verhalten sich die diesen ungleichen Winkeln gegenüber liegende Seiten BC und BD zu einander? Sind sie gleich oder ungleich? Und wenn sie ungleich sind, welches ist die längste von ihnen? BC welche dem grössern, oder BD welche dem kleinern Winkel gegenüber steht?

S. BC scheint länger zu seyn als BD.

L. Sie ist es auch; aber wie beweist man's?

S. Wir wollen eine HülfsLinie CD ziehn, und nun untersuchen welcher Winkel grösser ist: der welcher BC, oder der welcher BD gegenüber steht.

L. Und wozu soll das dienen?

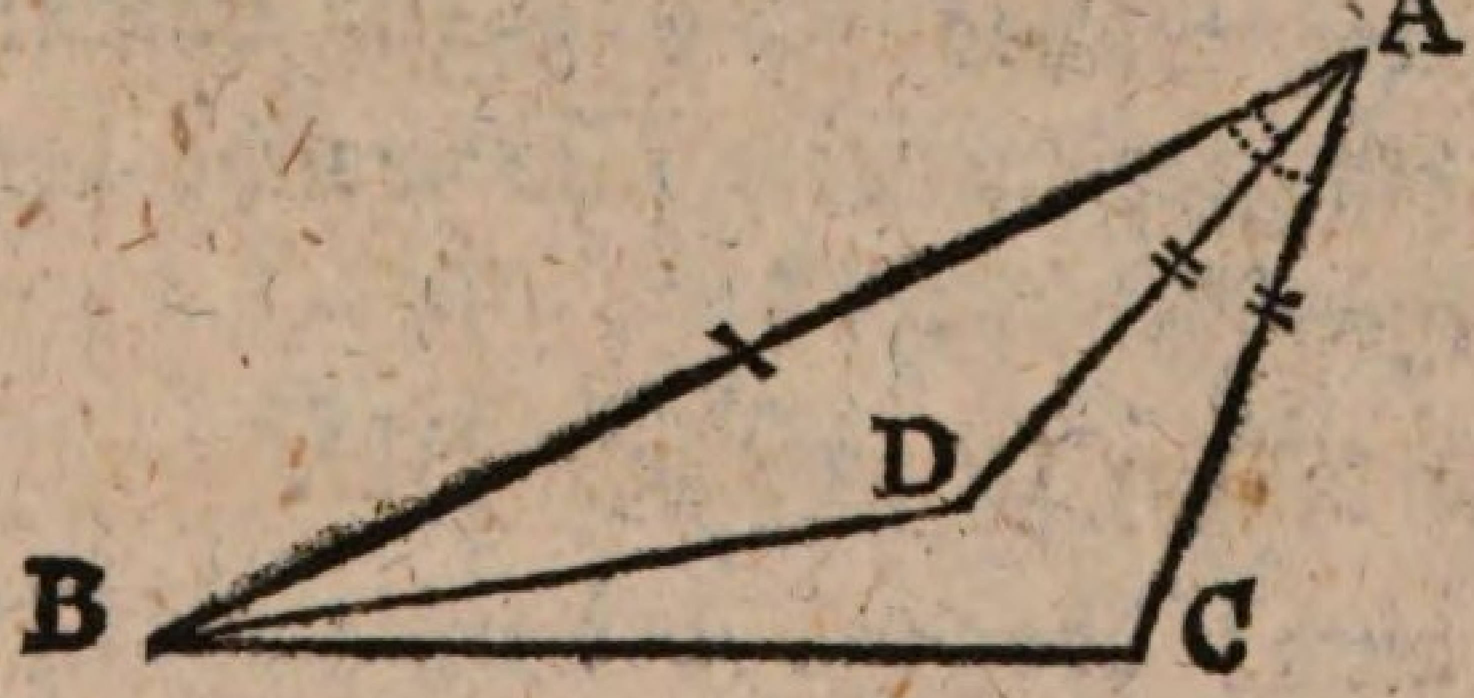
S. Um zu erfahren welche Seite länger ist, weil in einem DreiEkke einem grössern Winkel eine längere Seite gegenüber steht (§ 83).

L. Da bist du auf dem rechten Wege: also nur weiter! Kleine Buchstaben zwischen die Schenkel bei D und C, werden den Beweis sehr erleichtern.

S. Wir wollen also die Winkel bei D mit m und n, und die bei C mit o und p bezeichnen. Nun ist

$$\begin{array}{l} AD = AC \text{ (VorausS.)} \\ \hline n = o+p \text{ § 57)} \\ \hline n > o \\ \hline m+n > o \\ \hline BC > BD \text{ (§ 83).} \end{array}$$

L. Der Beweis ist richtig: ehe wir aber einen LehrSatz daraus ziehn, müssen wir erst untersuchen,



ob er auch auf jeden Fall passt. Auf den in der nebenstehenden Zeichnung, z. B., wo die Lage des Punkts D anders ist, als in der vorigen.

S Hier findet der vorige Beweis keine Anwendung.

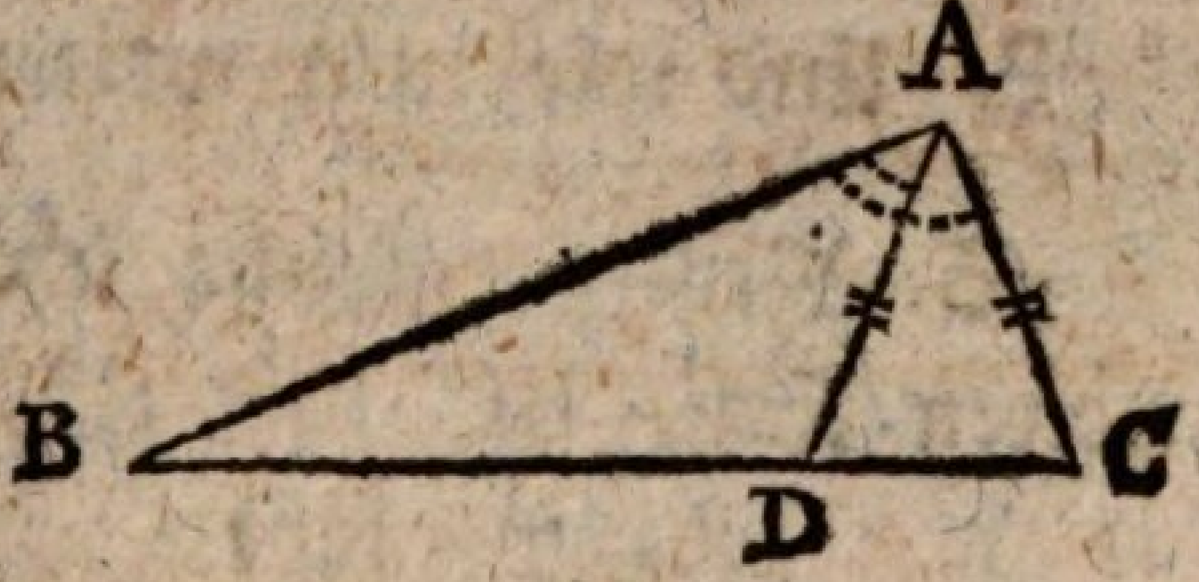
L. Um hier den Beweis zu führen daß BC länger ist als BD müssen wir uns erst an § 88 erinnern. Wie lautet der?

S.

S. „Wenn von einem Punkte innerhalb eines DreiEkks u. s. w.

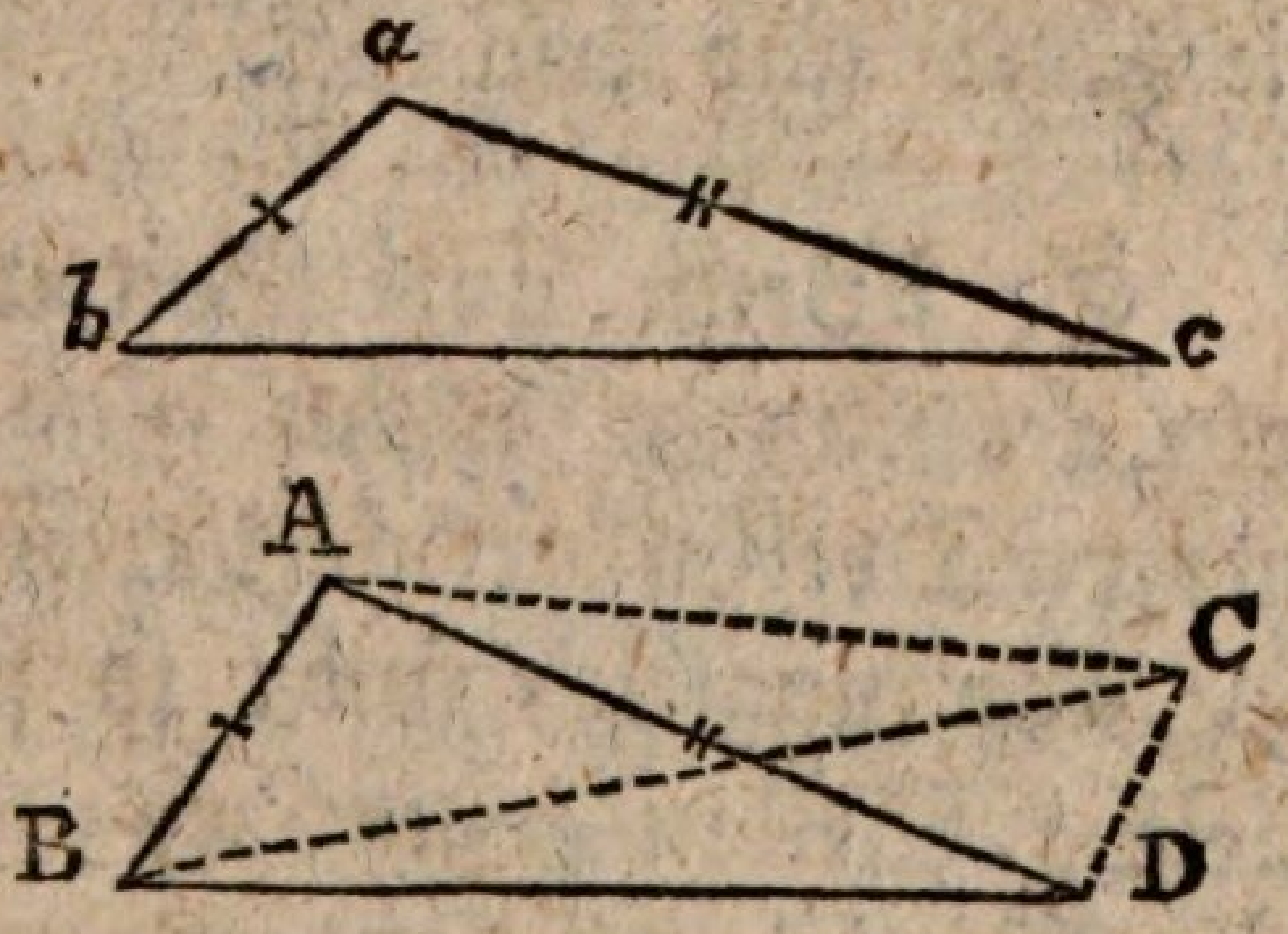
L. Und die Folge daraus ist?

S. Daß AB + BC > ~~AD B + D~~
AC = AD (Verf.)
BC > BD (§ 37)



L. Noch sind die Fälle nicht erschöpft. D kan auch mit B und C in gerader Linie liegen.

S. Dan ist BC ein Teil von BD. Folglich BC > BD (§ 45).



L. Es ist noch ein vierter Fall möglich. Die DreiEkke können getrennt, oder abgesondert stehn, wie abc und ABD. Wie wird man hier die Vergleichung von BC und BD anstellen?

S. Man kan ja die DreiEkke näher zusammen bringen.

L. Wie ist das zu verstehn?

S. Man legt an AB, bei A, einen Winkel BAC = ∠a (§ 91); macht den Schenkel AC so lang als ac, und zieht BC; so ist das DreiEkk ABC gleich und ähnlich dem DreiEkke abc.

L. Das erfodert Beweis.

S. $AB = ab$ (VS.)
$AC = ac$ (Verf.)
$\angle BAC = \angle a$ (Verf.)

$\triangle ABC \cong \triangle abc$ (§ 56)

$BC = \angle bc$

L. Und wie nun weiter?

S. Nun vergleiche ich, wie beim ersten oder zweiten Fall, BC mit BD, und finde

$BC > BD$

$bc > BD$ (§ 34).

L. Nun können wir das Resultat ziehn, denn die Fälle sind erschöpft.

S. Wenn zwei Seiten eines DreiEkks einzeln genommen, gleich sind zwei Seiten eines andern DreiEkks; die dazwischen liegenden Winkel aber ungleich sind: so stehn ihnen auch ungleiche Seiten gegenüber; und zwar dem grössern Winkel eine längere, und dem kleinern eine kürzere Seite.

Der

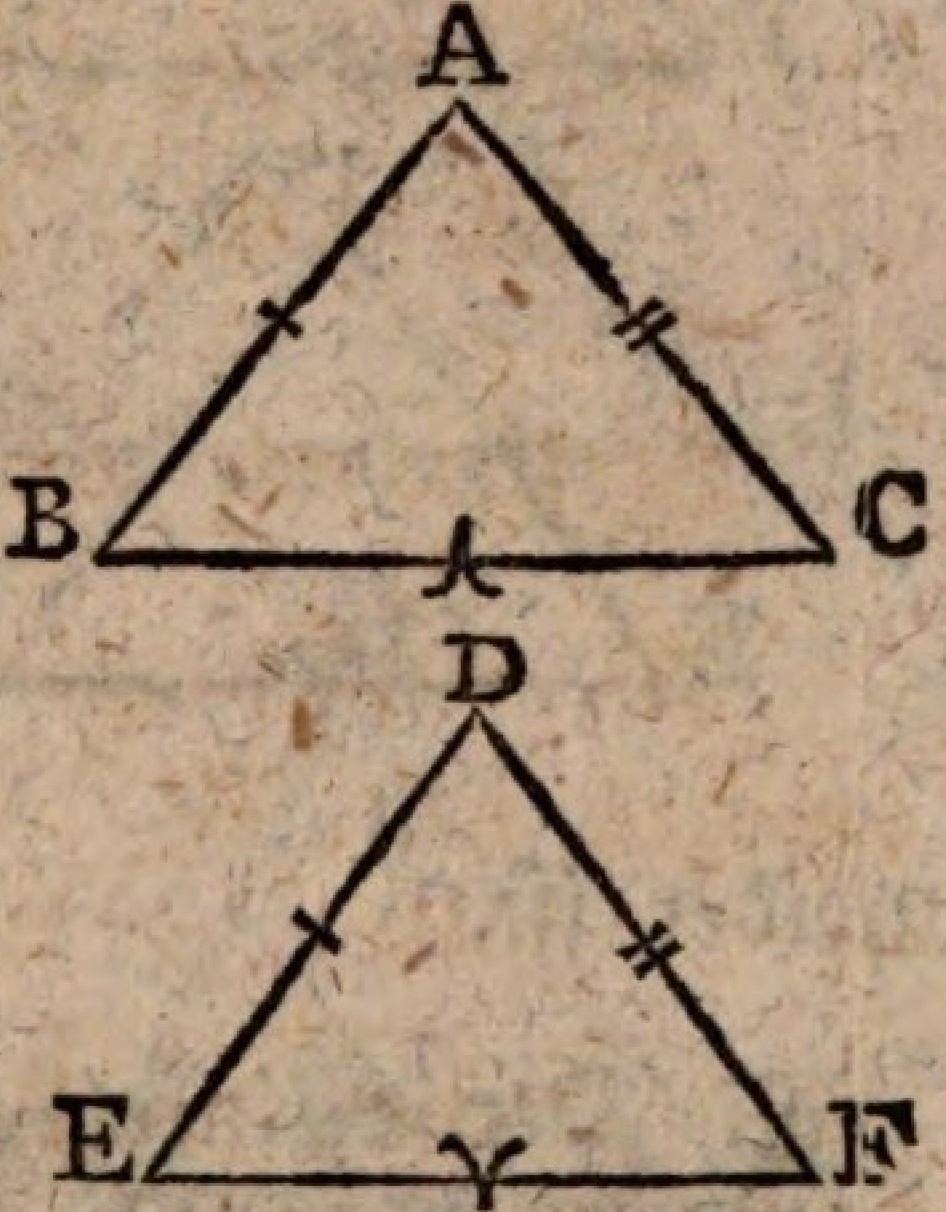
5.

Der [redacted] und zwanzigste Satz.

§ 93.

L. Es wird ein DreiEkk ABC nach Willkühr gezeichnet. Hierauf ein zweites DEF, in welchem

$$\left.\begin{array}{l} DE = AB \\ DF = AC \\ EF < BC \end{array}\right\} (\S 90).$$



Nun ist die Frage: Welcher Winkel ist grösser? Der Winkel A, welcher der längern Seite BC; oder der Winkel D, welcher der kürzern EF gegenüber steht? — Wäre A nicht grösser als D, was müste er dan seyn?

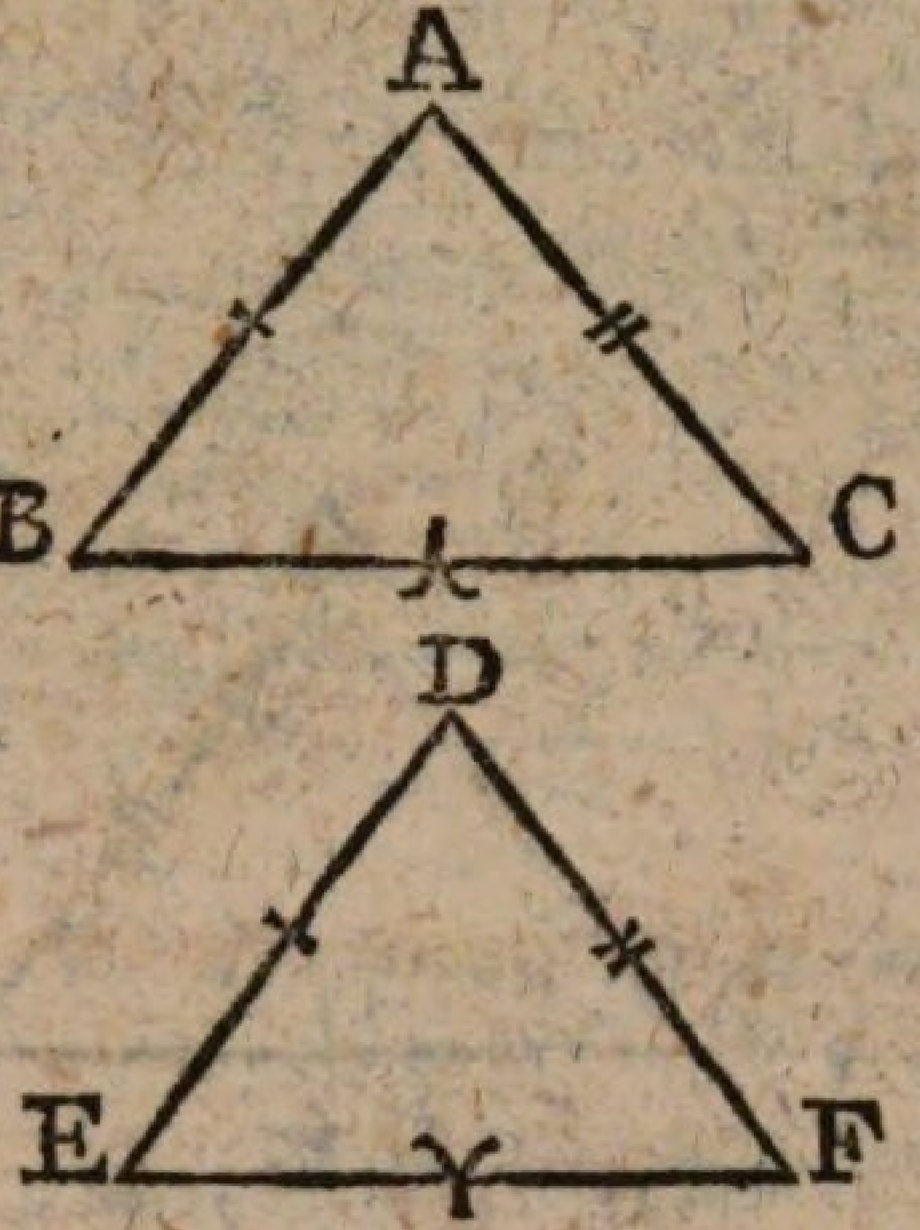
S. Entweder eben so groß, oder kleiner.

L. Zuerst wollen wir annehmen A wäre so groß als D. Wir hätten also in beiden DreiEkken gleich?

S.
$$\begin{array}{c} DE = AB \\ DF = AC \\ D = A \\ \hline \triangle DEF \cong \triangle ABC \ (\S\ 56) \\ \hline EF = BC \ (\S\ 24). \end{array}$$

L. Da aber nach der VorausSetzung EF < BC, und einerlei Grössen nicht zu gleicher Zeit einan-

der



der gleich- und ungleich seyn können; so folgt daraus = = ?

S. Daß A und D nicht gleich groß seyn können.

L. Gesetzt aber A wäre kleiner als D?

S. Dan wäre BC kürzer als EF; welches auch der VorausSetzung zuwider ist.

L. Der Winkel A also kan weder gleich D, noch kleiner als D seyn. Was bleibt also übrig?

S. Nichts anders als zuzugeben, daß A>D.

L. Dieser Satz ist der GegenSatz des vorigen. Wie lautet er?

S. Wenn zwei Seiten eines DreiEkks einzeln genommen, gleich sind zwei Seiten eines andern DreiEkks, die dritten Seiten beider DreiEkke einander aber ungleich sind; so stehn ihnen auch ungleiche Winkel gegenüber; und zwar der längern Seite ein grösserer, der kürzern ein kleinerer Winkel.

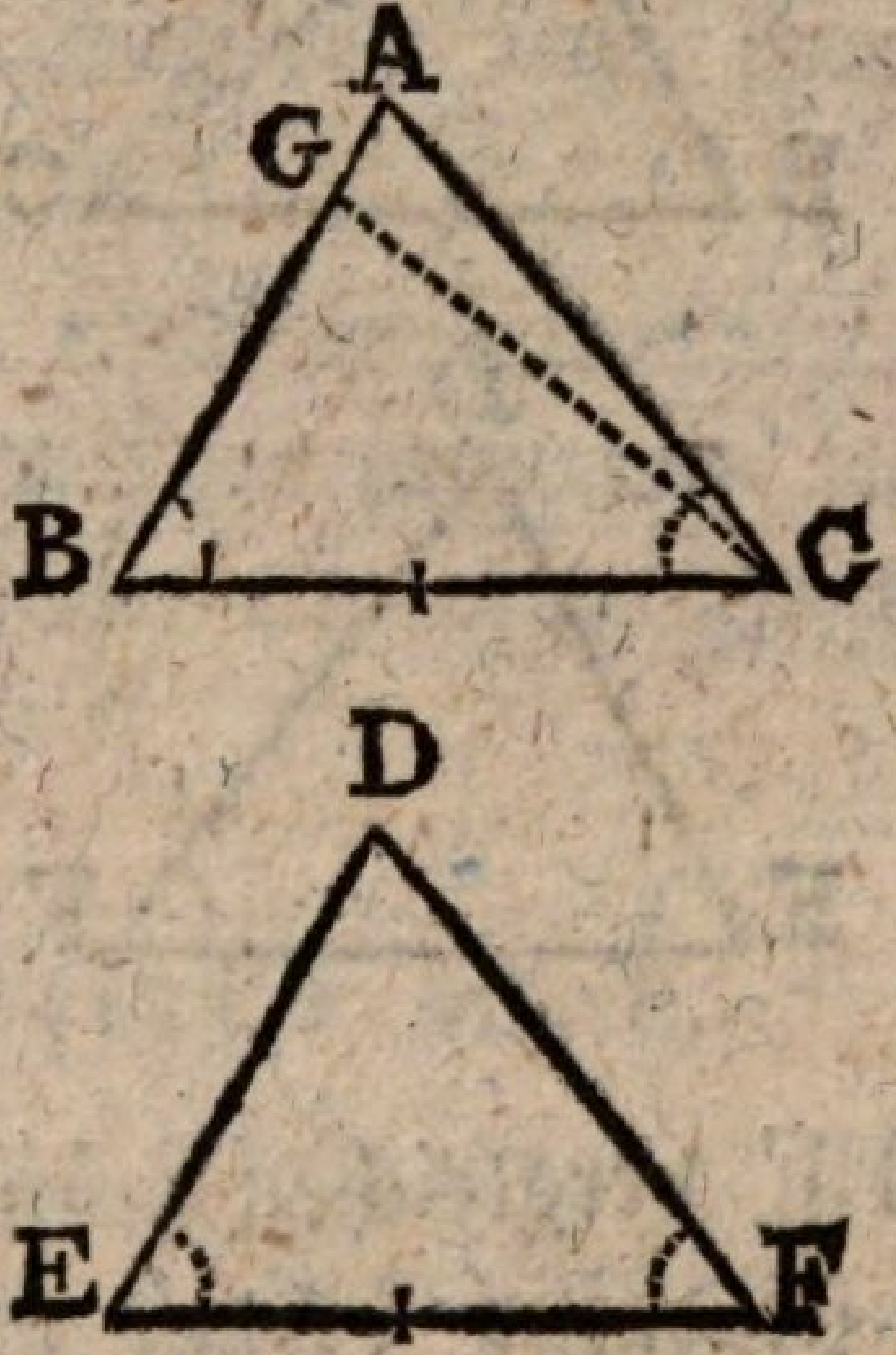
Der

6.

Der ~~fünf~~ und zwanzigste Satz.

§ 94.

L. Es wird ein Drei-Ekk ABC nach Willkühr verfertigt. Hierauf wird eine Linie EF gleich BC gezogen und an beide End-Punkte E und F derselben werden Winkel gelegt gleich den Winkeln B und C. — Wir haben also in beiden DreiEkken einander gleich-?



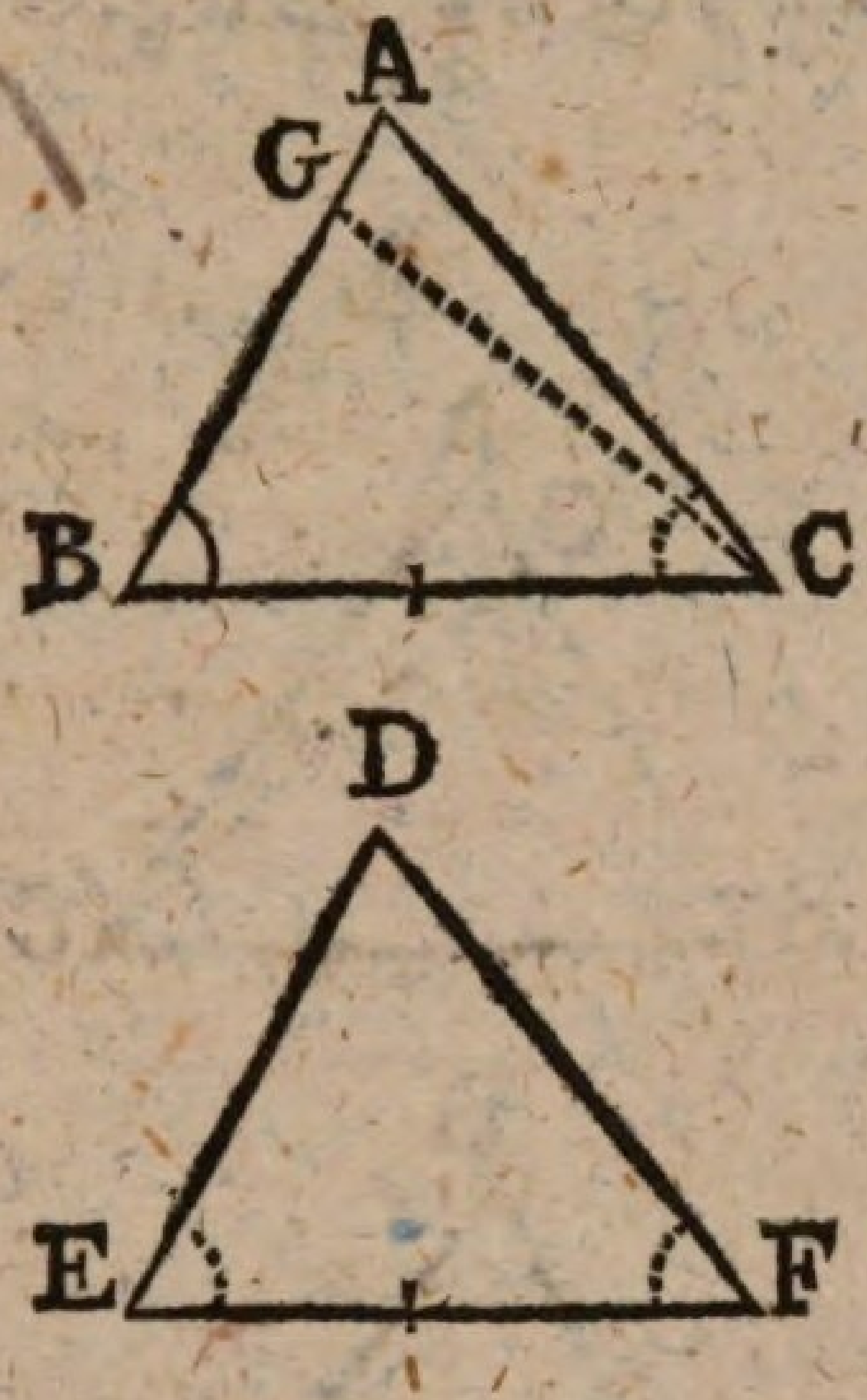
S. BC = EF
B = E
C = F

L. Recht! Nun ist die Frage: Ob auch die übrigen Seiten und Winkel beider DreiEkke übereinstimmen? Mit einem Worte: Ob die ganzen DreiEkke einander gleich und ähnlich seien? Wie werden wir das ausfindig machen?

S. Man muß sehn ob die DreiEkke sich einander dekken.

L. Recht! dieser Beweis ist wirklich von Wolfen, Kästnern, und Andern, gebraucht: nur Euklides, dem es Regel zu seyn scheint, den DekkungsBeweis nur da anzuwenden, wo kein besserer vorhanden ist, hat auch hier nicht Gebrauch davon gemacht; sondern sich der epagogischen BeweisArt bedient, die

sonst



sonst gewöhnlich nur bei GegenSätzen Stat zu finden pflegt. Wir wollen uns indessen an ihm halten, und annehmen AB und DE wären ungleich, und wollen von der längsten, welches AB seyn mag, den Ueberschuß AG abschneiden, und die Linie CG ziehn. — Nun haben wir ein neues DreiEkk GBC, das wir mit DEF vergleichen müssen. Was haben sie Gleiches, es sei dafür bekant oder nur dafür angenommen?

S. BC = EF (bekant)
BG = ED (angenommen)
B = E (bekant)

$\triangle BGC \cong \triangle DEF$ (§ 56).

$\angle GCB = \angle F$ (§ 24).

L. Aber auch $\angle C = \angle F$ (VS.)

$\angle GCB = \angle C$ (§ 31).

Ist das möglich?

S. Nein. Der Winkel GCB ist nur ein Teil des Winkels C, und folglich kleiner (§ 45).

L. AB also kan nicht länger seyn als DE. Aber wie, wenn sie kürzer wäre?

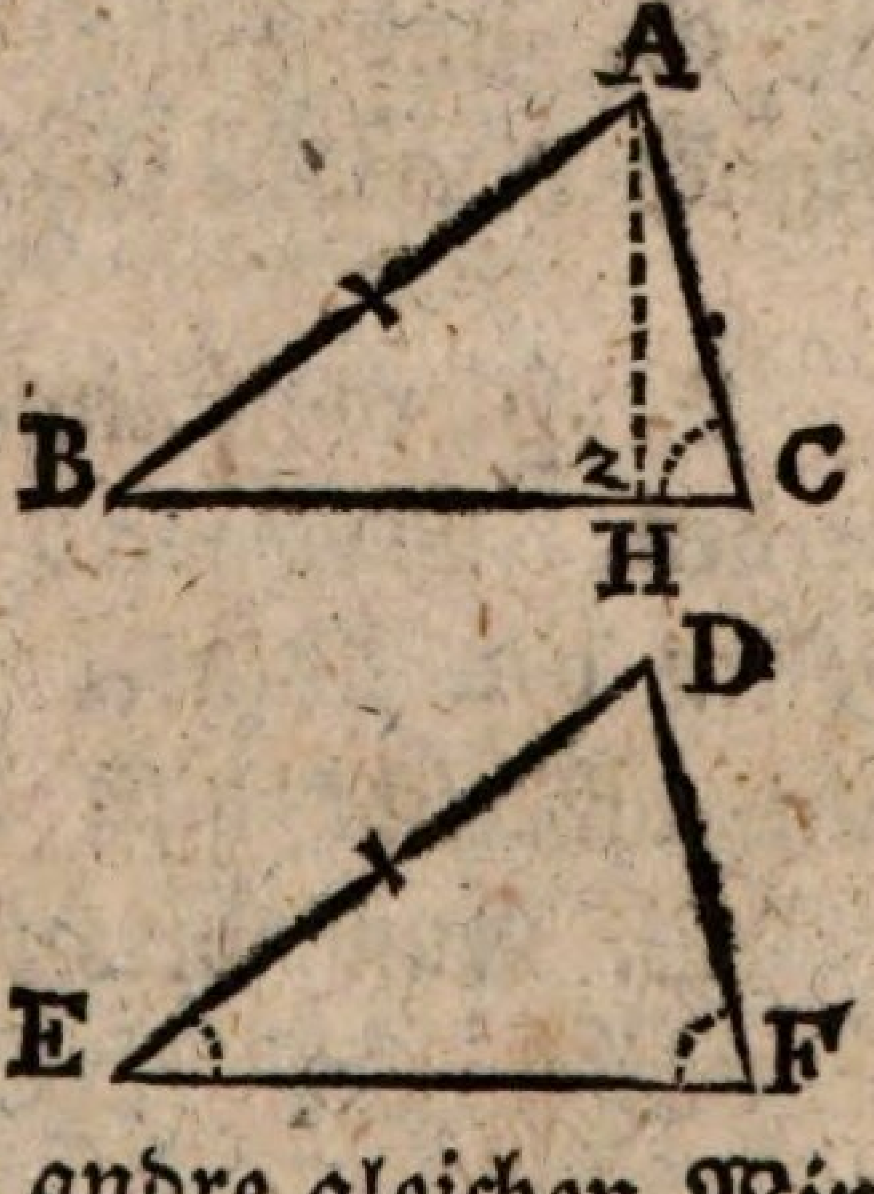
S. Dan wäre DE länger als AB; und dan würde ich mit DE verfahren, wie vorhin mit AB, um zu beweisen, daß auch dies nicht möglich ist.

L. Recht! Und man darf nur in der Zeichnung, die Buchstaben ABC und DEF, gegen einander vertauschen, so ist der vorige Beweis anwendbar, — Was für einen Satz kan man hieraus ziehn?

S. Wenn zwei Winkel, und die dazwischen liegende Seite in einem DreiEkke sind wie im andern; so sind die DreiEkke einander gleich und ähnlich.

Der ~~sechs~~ 7. und zwanzigste Satz.

§ 95.



L. Hier sind wieder ein Par DreiEkke. Sie heissen wie vorhin, ABC, und DEF. Er ist auch, wie vorhin

$\angle B = \angle E$

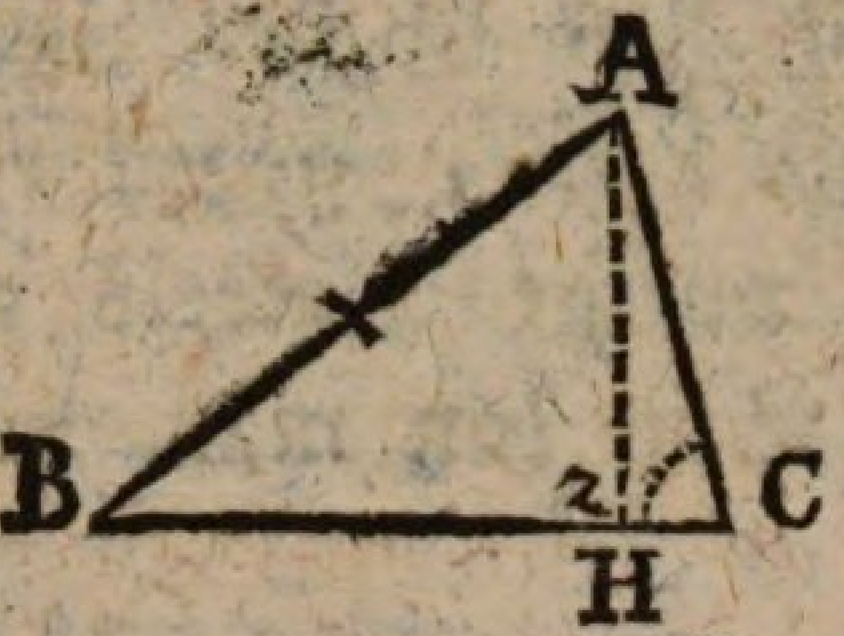
und $\angle C = \angle F$

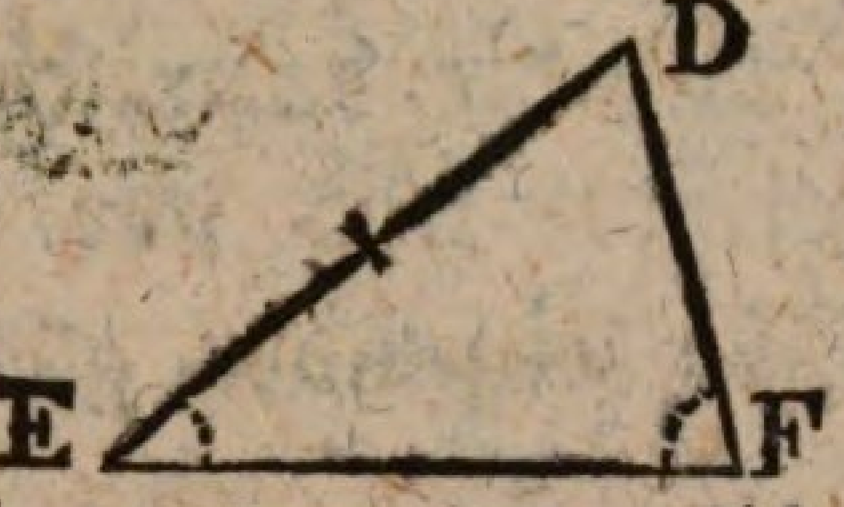
Dieses Mal aber sind nicht die zwischen diesen Winkeln liegende Seiten BC und EF als gleich bekant; sondern zwei andre gleichen Winkeln C und F gegenüber stehende. Welche sind das?

S. AB = DE.

L. Was fehlt uns noch, um von der Gleichheit und Aehnlichkeit dieser DreiEkke überzeugt zu seyn?

S. Die Winkel A und D, oder auch die Seiten BC und EF.





L. Es ist richtig. Wären die Winkel A und D gleich, so folgte die Gleichheit und Aehnlichkeit aus § 94; wären BC und EF gleich ⸗ ⸗ ?

S. So folgte sie aus § 56.

L. Wir wollen also versuchen die Gleichheit der Seiten BC und EF zu erweisen, und uns, wie vorhin, der apagogischen Beweis-Art bedienen.

S. Ich nehme also an eine der beiden Linien BC und EF sei länger als die andre, schneide von der längsten, welches BC seyn mag, den Ueberschuß HC ab, und ziehe AH. Nun gilt BH = EF; folglich $\triangle ABH \cong \triangle DEF$ (§ 56)

L. Hiervon muß nun die Unmöglichkeit gezeigt werden. Wie wird das geschehn können? — Wir wollen den Winkel AHB mit z bezeichnen, und nun vielleicht hilft der uns drauf.

S. Nun weis ich schon weiter.

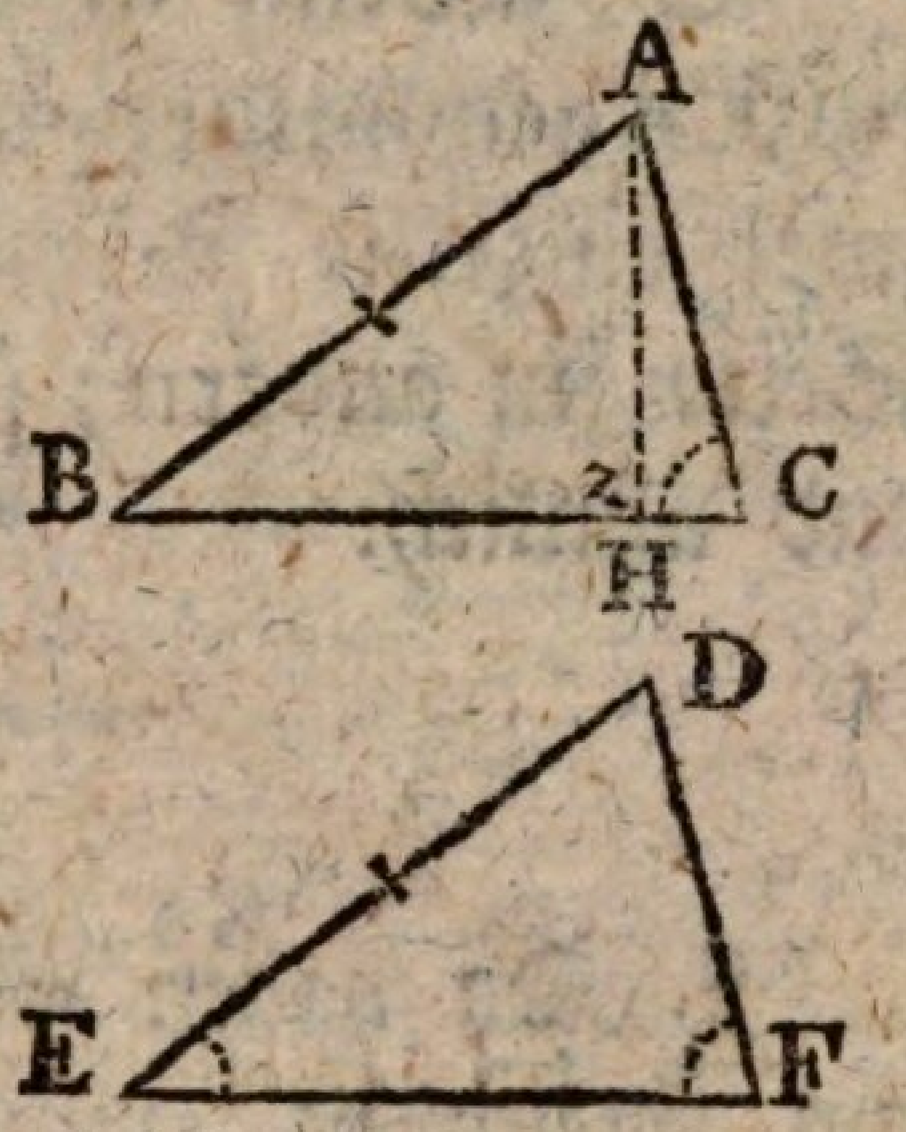
$$\begin{array}{ll} C = F & \text{(VS.)} \\ z > C & \text{§ 79)} \\ \hline z > F & \text{(§ 33).} \end{array}$$

L. Aber auch z = F (§ 24)

wenn nämlich die DreiEkke ABH und DEF gleich und ähnlich sind, wie angenommen ist. Da nun zwei Dinge nicht zu gleicher Zeit einander gleich und ungleich seyn können (§ 29); so können die

Drei⸗

DreiEkke ABH und DEF nicht gleich und ähnlich seyn. Und da ihre Gleichheit und Aehnlichkeit eine notwendige Folge der Gleichheit der Linien BH und EF ist; so können diese Linien nicht gleich seyn. Und sind diese nicht gleich; so müssen BC und EF es seyn. Und sind BC und EF gleich = = ?



S. So ist △ABC ≌ △DEF (§ 56).

L. Wie lautet nun der neugefundene LehrSaz?

S. Wenn in einem DreiEkke zwei Winkel sind wie im andern, und noch über dies beide DreiEkke zwei gleichen Winkeln gegenüber stehende gleiche Seiten haben; so sind beide DreiEkke einander gleich und ähnlich.

§ 96.

L. Wenn man das was beide Säze § 94 und 95, gemein haben, gehörig absondert, so lässt es sich füglich in einen einzigen Saz zusammen fassen. In beiden ist von vier Winkeln und von zwei Seiten die Rede, welche in zwei DreiEkken überein stimmen sollen: nur die Lage der Seiten ist verschieden. Das eine Mal sollen sie zwischen zwei bekanten Winkeln, das andre Mal zwei gleichen Winkeln gegenüber liegen. Wie wird man den Saz nun einkleiden, so daß er auf beide Fälle passt?

S. Wenn in einem DreiEkke zwei Winkel einzeln genommen, und eine Seite, so groß sind als zwei einzelne Winkel, und eine gleichliegende Seite im andern; so sind beide DreiEkke gleich und ähnlich.

§ 97.

L. Da haben wir nun die vornehmsten Sätze von Gleichheit und Aehnlichkeit der DreiEkke, die wir uns wohl einprägen müssen, weil sie oft gebraucht werden. Eine kurze Wiederholung wird daher nicht undienlich seyn. Welches sind die Kenn-Zeichen der Gleichheit und Aehnlichkeit?

S. Zuerst zwei Seiten, mit dem dazwischen liegenden Winlel (§ 56).

Dan alle drei Seiten (§ 63).

Und zulezt zwei Winkel und eine gleichliegende Seite (§ 96).

L. Bei genauer Betrachtung dieser drei Fälle lassen sich ein Par Bemerkungen machen. Was sind das wol für welche?

S. Zur Gleichheit und Aehnlichkeit werden immer drei Stükke erfodert, und unter diesen drei Stükken muß wenigstens eine Seite seyn.

L. Recht! Ein Nachtrag zu diesen Sätzen, wird zu Ende des zweiten Buchs (§ 163) vorkommen.

Geometrie.

Zweites Buch.

I. Von gleichlaufenden Linien: §. 97.

II. Anwendung der Lehre von gleichlaufenden Linien, auf DreiEkke: § 118.

III. Von Parallelogrammen: § 129.

IV. Von Verwandlung der geradlinigen Figuren: § 138.

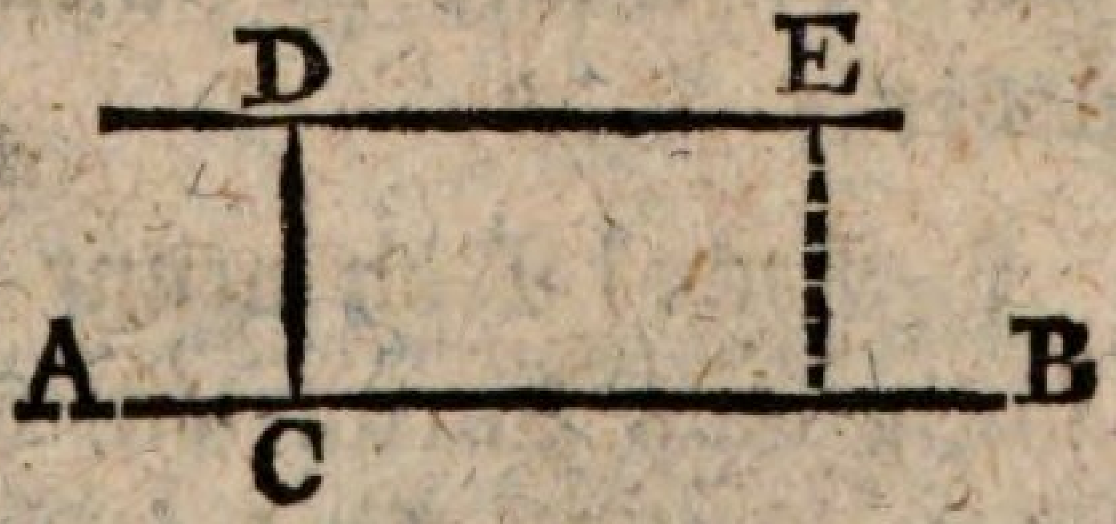
V. Eigenschaften der Quadrate und rechtwinkligen DreiEkke: § 158.

I. Von gleichlaufenden Linien.

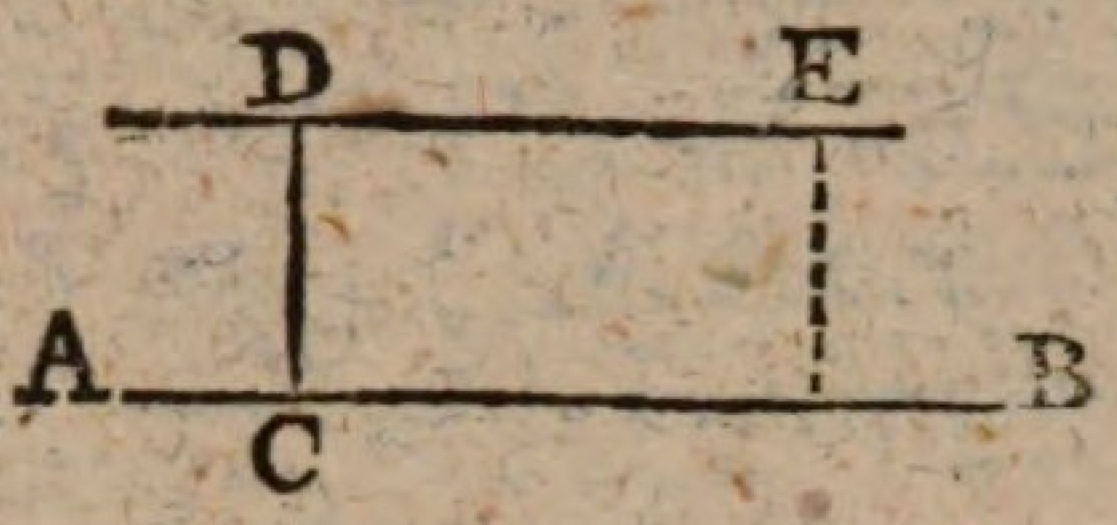
1) Erklärungen und GrundSätze.

§ 97.

E. Auf einer geraden Linie AB steht eine andre CD senkrecht. Wenn nun AB unbeweglich bleibt, CD aber verschoben wird, so daß sie immer dieselbe Richtung gegen AB behält,



und ihr einen EndPunkt C diese Linie nicht verlässt; so beschreibt ihr andrer EndPunkt D eine mit AB gleichlaufende Linie DE. — Wie ist nun die Entfernung dieser Linien von einander? Ist sie überall dieselbe? oder ist sie verschieden?



S. Sie ist immer dieselbe. Denn da CD immer einerlei Länge, und gegen AB immer einerlei senkrechte Stellung behält; so ist ihr EndPunkt D, welcher die Linie DE bezeichnet, immer gleich weit von AB entfernt (§ 85).

L. Aber ist DE gerade, oder krumm?

S. Wie kan eine Linie einer geraden gleichlaufen, ohne selbst gerade zu seyn?

L. Ich wäre auf den Einwurf nicht gekommen, wenn er mir nicht gemacht wäre, und zwar von einem großen Geometer. — Wir haben nun die Entstehung gleichlaufender Linien gesehn, was sind sie nun eigentlich? Welches ist ihre Erklärung?

S. Gleichlaufende Linien sind gerade Linien welche immer einerlei Entfernung von einander behalten, wenn sie auch unendlich verlängert würden.

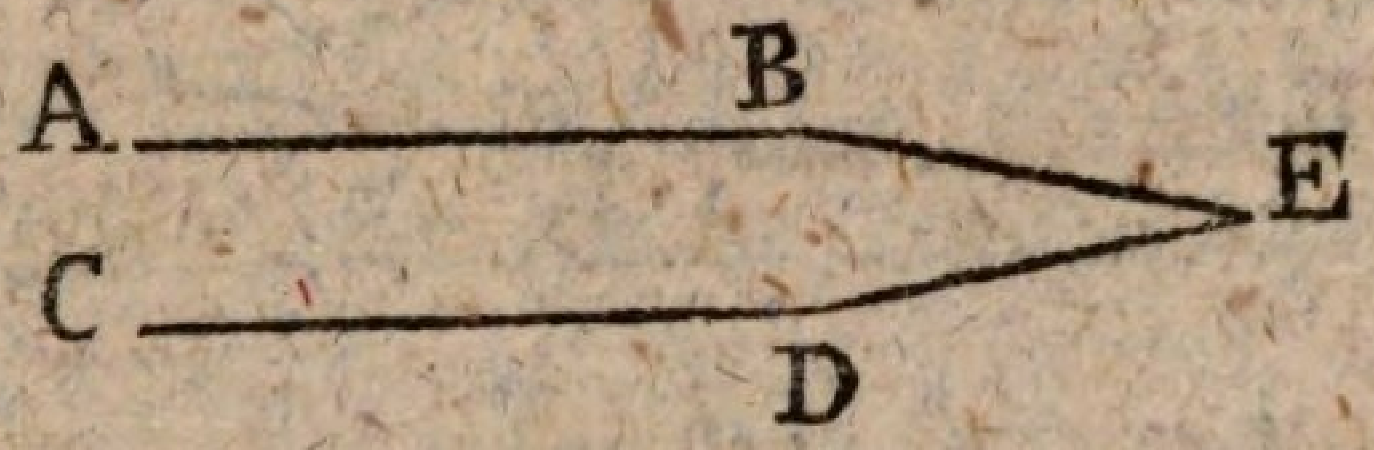
L. Recht! Man nennt sie, mit einem griechischen Namen, auch Parallelen, oder Parallellinien. Ihr Zeichen ist #. Was heisst nun AB # DE?

S. AB ist gleichlaufend DE.

§ 98.

§ 98.

L. Solten gleichlaufende Linien AB, CD, nicht endlich in einen Punkt E zusammen treffen, wenn sie genugsam verlängert würden?



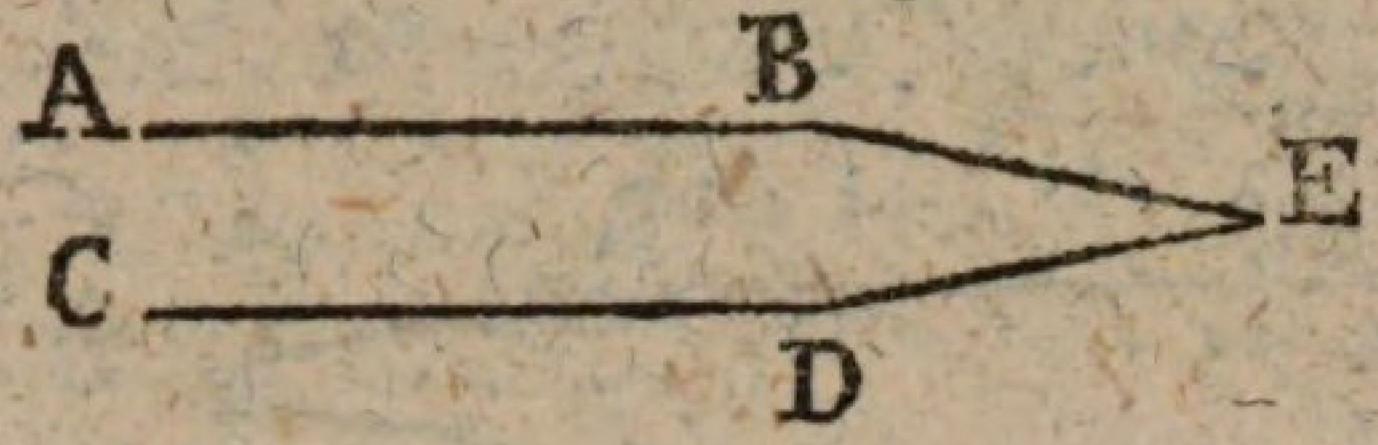
S. Nimmermehr. Dan könten sie nicht einerlei Entfernung von einander behalten. Der Abstand nimmt immer ab, und hört endlich in E ganz auf.

L. Gleichlaufende Linien also können, auch unendlich verlängert, nie zusammen stossen: aber könten nicht, demungeachtet, zusammen stossende Linien gleichlaufend seyn?

S. Da bei zusammenstossenden Linien der Abstand oder die Entfernung sich ändert, so können gerade Linien welche zusammenstossen nicht gleichlaufend seyn. (§ 97).

§ 99.

L. Aber gerade Linien deren Entfernung von einander nicht immer dieselbige bleibt, die sich nach einer Seite einander nähern, während daß sie auf der entgegengesetzten sich von einander entfernen, werden die auf der Seite wo sie sich nähern, auch endlich zusammen stossen? Oder können sie sich unendlich nähern, ohne sich je zu erreichen?



S. Nein. Gerade Linien die sich einander nähern müssen sich endlich auch erreichen.

L. Es gibt gleichwol krumme Linien, von denen sich erweisen lässt, daß sie sich einer geraden immer nähern, ohne sie je zu erreichen.

S. Eine krumme Linie kan ihre Richtung ändern, ausweichen, sich immer weniger nähern; das kan aber eine gerade nicht; die muß bei ihrer ein Mal genommenen Richtung bleiben.

L. Das ist richtig. Man kan von krummen Linien nicht auf gerade schliessen, denn es gibt noch mehr Sätze die von geraden Linien wahr sind, und von krummen nicht. Eine krumme Linie z. B. kan einen Raum einschliessen (§ 10, 20): kan das eine gerade?

S. Nein. Nicht einmal zwei gerade Linien vermögen einen Raum einzuschliessen (§ 9) vielweniger denn eine.

L. Und gleiche Bewandniß hat es mit den Säzzen § 8, 11, 12. Wir können also als GrundSatz annehmen: Zwei gerade Linien welche sich einander nähern, müssen sich, genugsam verlängert, auch endlich erreichen. Und eine Folge dieses GrundSatzes ist: Gerade Linien die sich nie erreichen die können sich auch nicht nähern.

§ 100.

§ 100.

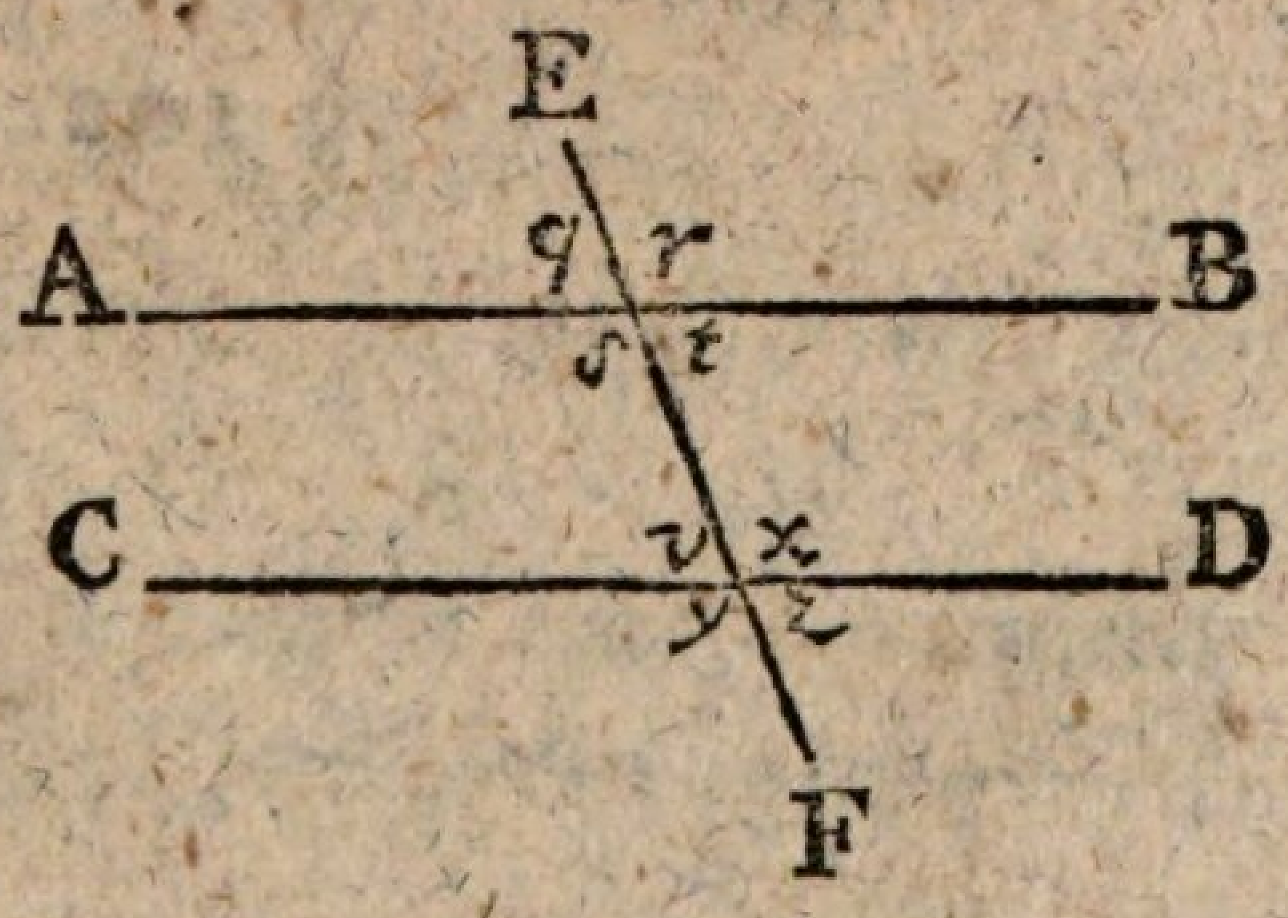
L. Gleichlaufende Linien können sich nicht nähern, und noch weniger sich erreichen § 97, 98): aber sind einander unerreichbare gerade Linien notwendig gleichlaufend?

S. Ja; denn erreichen sie sich nie, so nähern sie sich auch nicht § 99); und nähern sie sich nicht, so haben sie überall gleiche Entfernung von einander (§ 100); und haben sie immer gleiche Entfernung, so sind sie gleichlaufend (§ 97).

L. Es ist also ausser Zweifel: **Gerade Linien die, unendlich verlängert, nie zusammen stossen, sind einander gleichlaufend.**

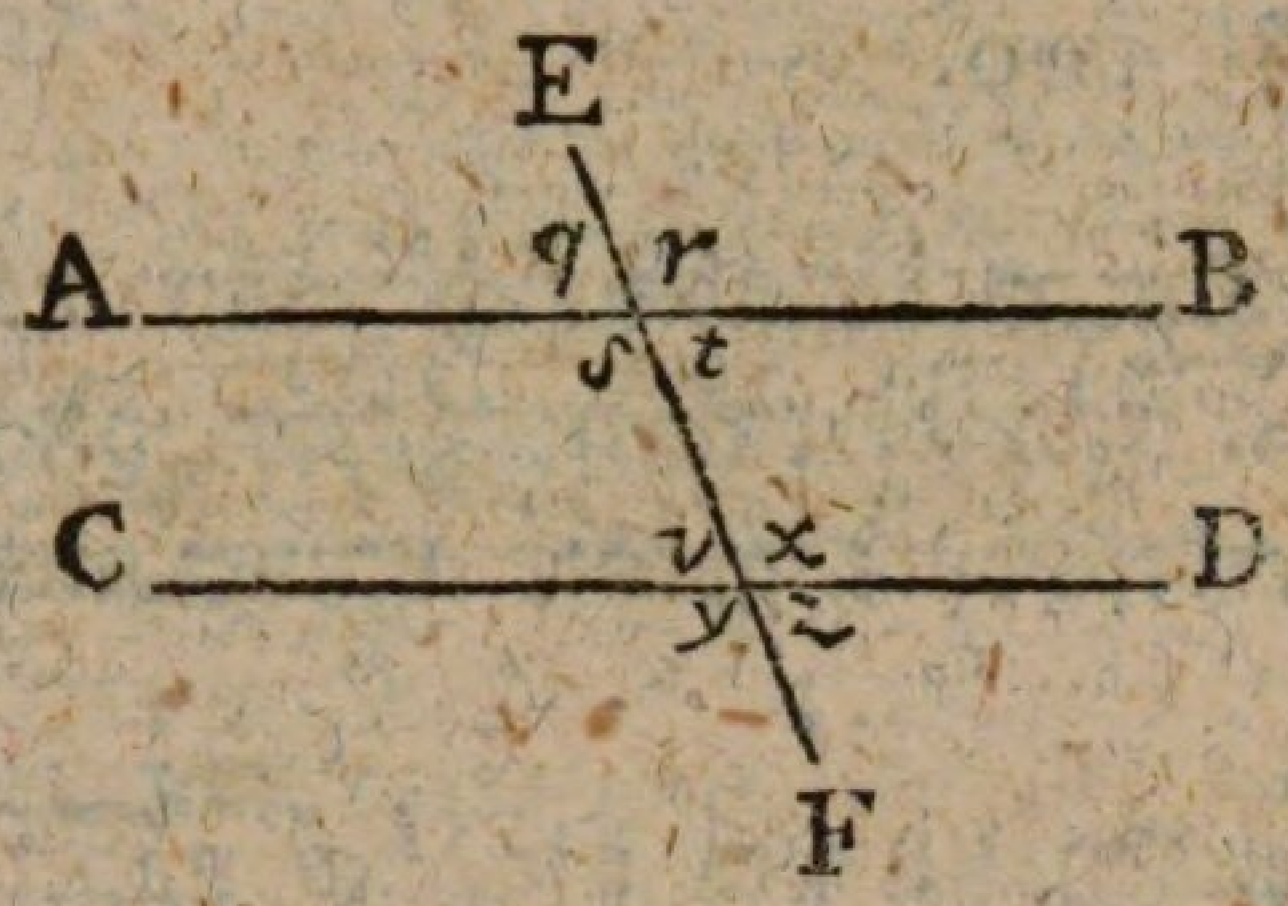
§ 101.

L. Wenn zwei gerade Linien AB, CD von einer dritten EF geschnitten werden; so entstehn acht Winkel, q, r, s, t, v, x, y, z, deren Benennung wir uns jezt bekant machen wollen, um nicht in der Folge dadurch aufgehalten und unterbrochen zu werden.



Innere Winkel sind die innerhalb der durchschnittenen Linien belegenen Winkel s, t, v, x.

Aeussere Winkel sind die ausserhalb derselben beleene n Winkel q, r, y, z.

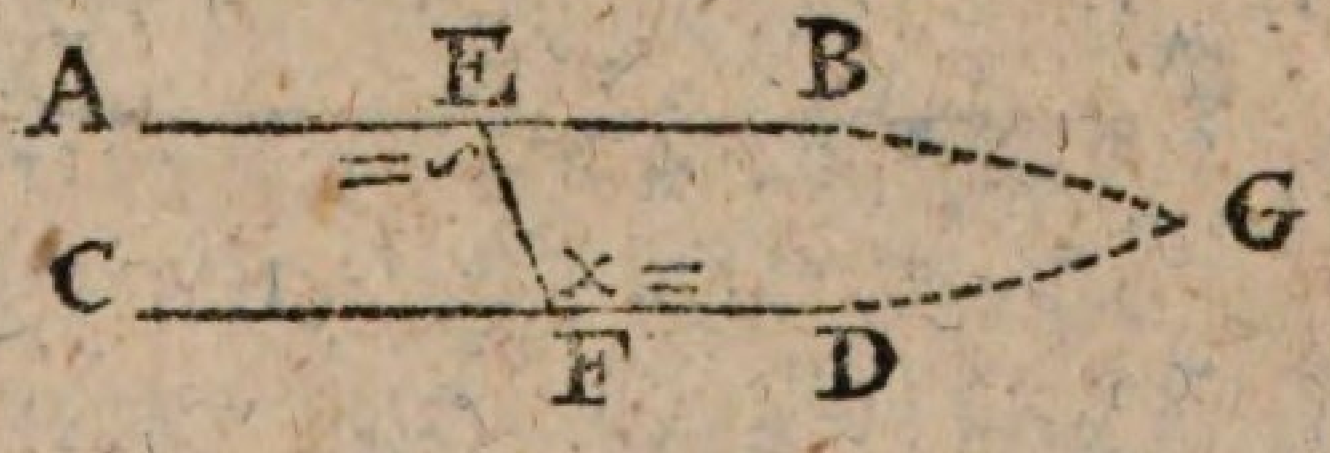


Wechsel Winkel sind innere, zu verschiednen Seiten der schneidenden Linie belegne Winkel, die aber keine Neben Winkel sind, wie s und x t und v.

Gegen Winkel sind die auf einer Seite der schneidenden Linie liegen, ohne Neben Winkel zu seyn. So sind auf der einen Seite q und v, s und v, s und y, entgegen stehende Winkel; und auf der andern Seite sind r und x, t und x, t und z. Gegen Winkel, und zwar s und v zwei innere einander gegenüber stehende; q und v aber ein äusserer und ein innerer einander entgegen stehender.

Der erste Satz.

§ 102.



L. Zwei gerade Linien AB und CD, welche in E u. F geschnitten werden, haben gleiche Wechsel Winkel s und x. Nun ist die Frage: Stossen AB und CD verlängert zusammen, oder nicht? — Wir wollen annehmen sie stiessen in G zusammen, und bildeten ein DreiEkk EFG. — Wenn man nun die Wechsel Winkel s und x als zu EFG gehörige DreiEkks-

Win-

Winkel betrachtet, was für Namen und Bedeutung haben sie dan?

S. Dan ist s ein AussenWinkel, und x ein der verlängerten Seite gegenüber stehender innerer Winkel. (§ 78).

L. Sind sie gleich, oder ungleich?

S. Sie sind ungleich, und zwar $s > x$. (§ 78).

L. Also zu gleicher Zeit

$s > x$ (§ 78).

und $s = x$ (VS.).

welches ein WiderSpruch ist. (§ 29). Wie kan der gehoben werden?

S. Wenn man annimt daß AB und CD nicht zusammen stossen.

L. Gerade Linien also mit gleichen WechselWinkeln stossen nicht zusammen. Und was sind das für Linien die nie zusammen stossen?

S. Gleichlaufende Linien (§ 100).

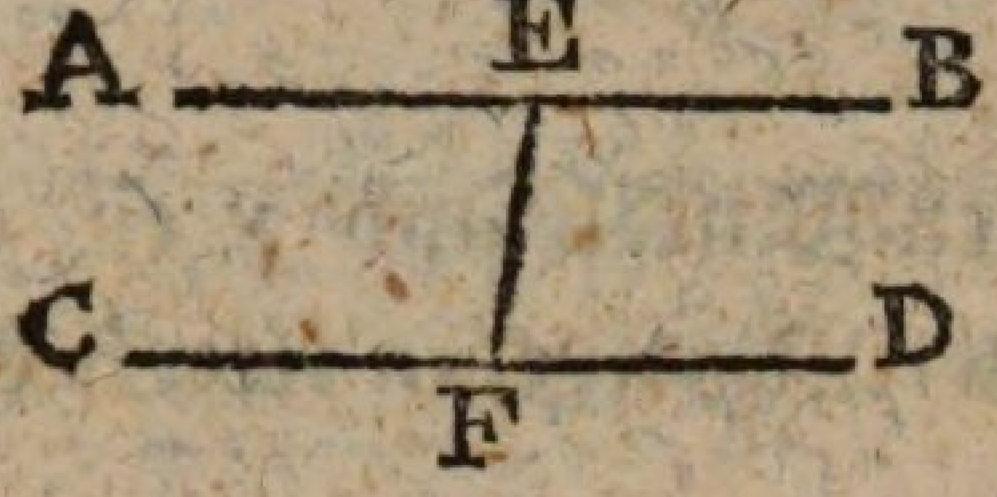
L. Dieser Satz also lässt sich auch anders ausdrukken, und zwar wie?

S. Zwei gerade Linien sind einander gleichlaufend, wenn ihre WechselWinkel gleich sind.

Der zweite Satz.

§ 103.

L. Es ergibt sich aus vorigem Satze eine sehr leichte Art gleichlaufende Linien zu ziehn. Wie wür-



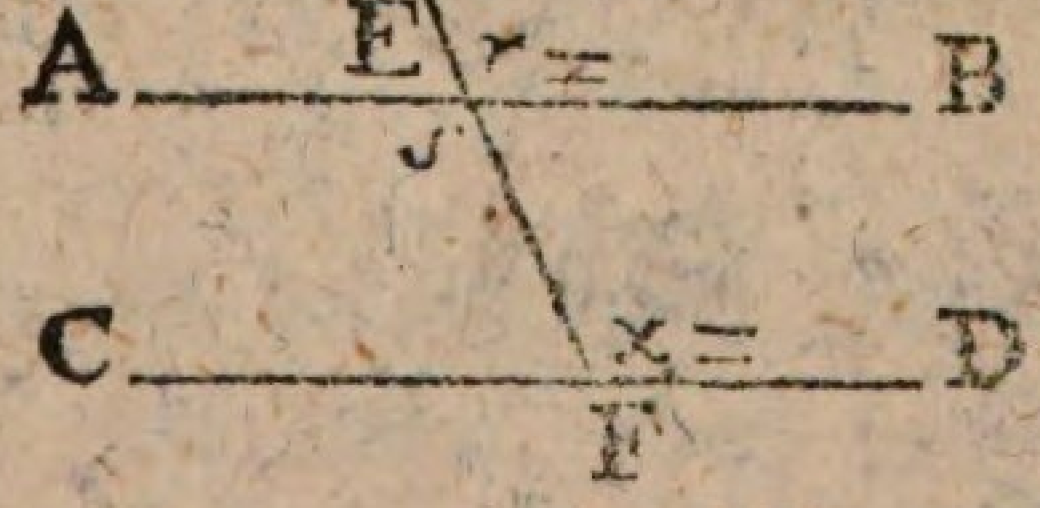
würde man wol verfahren, wenn verlangt würde einer gegebenen Linie AB, eine andere CD gleichlaufend zu ziehn, und zwar durch einen gegebenen Punkt F? Die Betrachtung der Zeichnung § 102 kan es lehren.

S. Ich ziehe von F auf AB eine Linie FE, und mache bei F einen Winkel EFD, gleich dem WechselWinkel FEA (§ 91); so ist der Schenkel des Winkels EFD, den man nach C verlängern kan, der gegebenen Linie AB gleichlaufend (§ 102).

L. Das ist die geometrische Auflösung der Aufgabe: Einer gegebenen geraden Linie, eine andre, durch einen gegebenen Punkt, gleichlaufend zu ziehn. Für die Ausübung gibt es, wie zu Ziehung senkrechter Linien (§ 70) leichtere Mittel.

Der dritte Saz.

§ 104.



L. Es werden wieder zwei Linien AB, CD in E u. F geschnitten. Jezt aber ist nicht von WechselWinkeln die Rede; sondern ein äusserer Winkel r und sein innerer GegenWinkel x sind als gleich bekant. Die Frage ist: Treffen unter dieser Voraus-

Sez-

Setzung AB und CB, genugsam verlängert, zusammen, oder nicht? — Welcher von den Winkeln s und r ist der gröste?

S. Sie sind ScheitelWinkel, und also gleich groß (§ 76).

L. Also $s = r$
und $x = r$

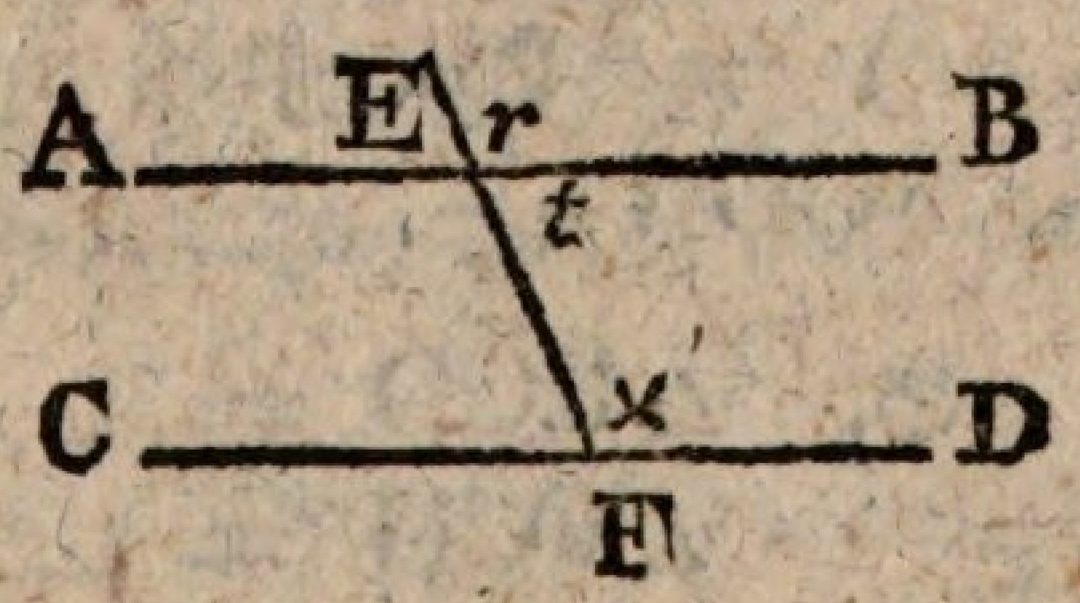
S. $s = x$ (§ 31)
$AB \# CD$ (§ 102)

L. Wie lautet nun der LehrSatz?

S. Zwei gerade Linien sind einander gleichlaufend, wan ein äusserer und ein innerer GegenWinkel einander gleich sind.

§ 105.

L. Die ganze vorige Zeichnung bleibt; der äussere Winkel aber ist jezt nicht bekant, sondern die beiden innern GegenWinkel t und x, werden zwei rechten Winkeln gleich angenommen.



$$t + x = 2 \llcorner$$

Die Frage ist wie vorhin: Treffen unter dieser Bedingung die Linien AB und CD, hinlänglich verlängert, zusammen, oder nicht? — Wie groß ist $t + r$?

S.

S. $t + r = 2\llcorner$ (§ 71)

L. $t + r = t + x$ (§ 31)

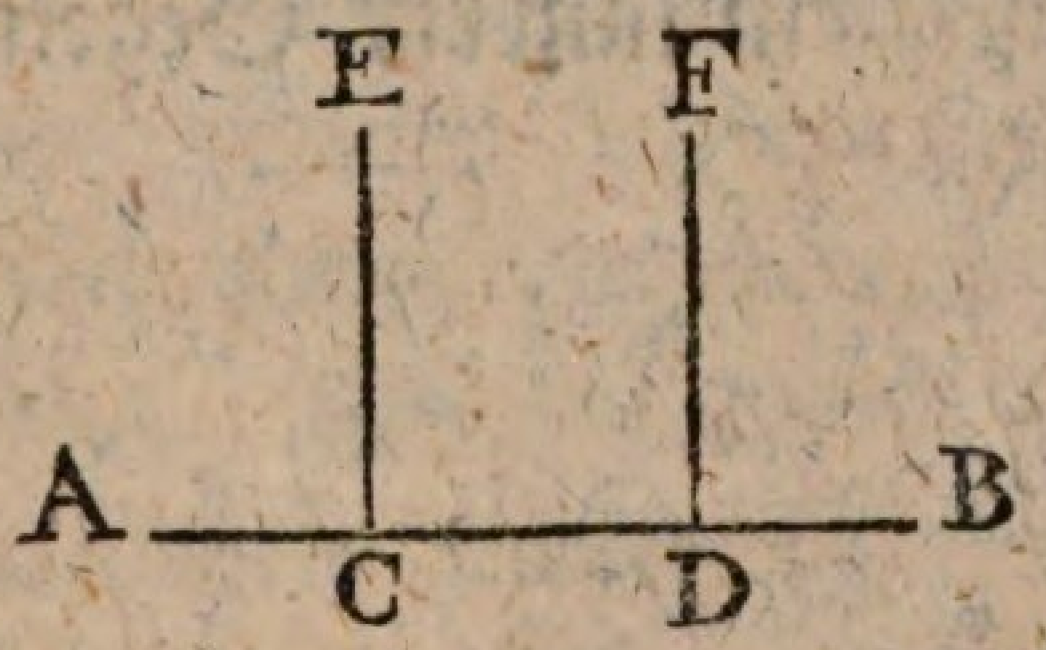
S. $r = x$ (§ 37)

$AB \# CD$ (§ 104).

L. Das heisst = = ?

S. Wenn die beiden innern GegenWinkel zusammen zwei rechten Winkeln gleich sind; so sind die durchschnittenen Linien gleichlaufend.

§ 106.



L. Auf einer geraden Linie AB werden zwei Punkte, C und D, willkührlich angenommen, und aus ihnen senkrechte Linien, CE, DF, errichtet (§ 68) — Wie groß sind nun die Winkel ECD und FCD ?

S. $\angle ECD = \llcorner$
$\angle FCD = \llcorner$ } (§ 47).

$\angle ECD + \angle FCD = 2\llcorner$

$CE \# DF$ (§ 105)

L. Das heisst = = ?

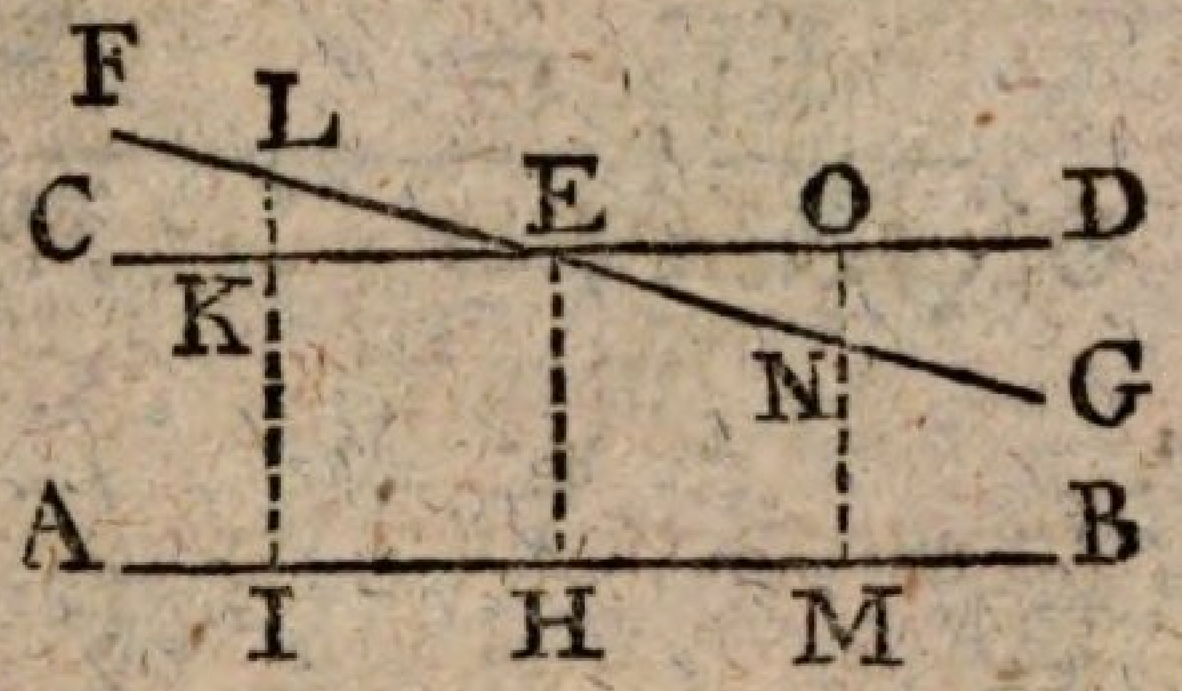
Zwei Linien die auf einer andern senkrecht stehen sind einander gleichlaufend.

Der

Der vierte Satz.

§ 107.

L. AB und CD sind gleichlaufend. Die Frage ist: Kan durch einen auf einer derselben, z. B. auf CD, angenommenen Punkt E,



noch eine Linie mit AB gleichlaufend gezogen werden?

S. Ich halte es für unmöglich.

L. Ich auch. Aber um uns zu überzeugen, wollen wir die Linie FEG ziehn, und annehmen sie sei auch mit AB gleichlaufend, und sehn ob Ungereimtheiten daraus folgen. — Zuerst wird von dem DurchschnittsPunkte E eine senkrechte Linie EH auf AB gezogen (§ 69). Dan werden zu beiden Seiten von EH, in willkührlichem Abstande, noch zwei andere Linien IKL und MNO, senkrecht auf AB gestellt. — Welche Bedeutung haben diese senkrechten Linien hier?

S. Sie zeigen die Entfernung der Linien CD und FG von AB an.

L. Gleichlaufende Linien aber haben überall gleiche Entfernung von einander (§ 97). Was folgt daraus?

S. Die Linien KI, EH, OM, und LI, EH, NM, müssen gleich lang seyn?

L. Wir müssen das noch deutlicher auseinander setzen

CD

$$\left.\begin{array}{r} CD \# AB \\ \text{und } FG \# AB \end{array}\right\} \text{(VS.)}$$

$$\left.\begin{array}{rl} EH = & ON + NM \\ EH = & NM \end{array}\right\} (\S\ 97).$$

$$ON + NM = NM \quad (\S\ 31)$$

Der Teil NM also ist dem Ganzen ON+NM gleich! — Eben solche Ungereimtheit kömt zum Vorschein wan man die Linien EH und IK, EH und LI vergleicht.

$$\left.\begin{array}{r} \text{S. } CD = AB \\ FG \# AB \end{array}\right\} \text{(VS.)}$$

$$\left.\begin{array}{r} EH = HI \\ EH = LI \end{array}\right\} (\S\ 97)$$

$$KI = LI \quad (\S\ 31)$$

L. Da ist wieder der Teil dem Ganzen gleich. Da das nun nicht möglich ist (§ 45), so folgt daraus, das wir etwas Unmögliches angenommen haben. Und das ist = = ?

S. Daß FG auch AB gleichlaufend sei.

L. Zwei Linien CD und FG, also, welche einen Punkt E gemein haben, können nicht beide einer dritten AB gleichlaufend seyn. Ist daher CD gleichlaufend mit AB = = ?

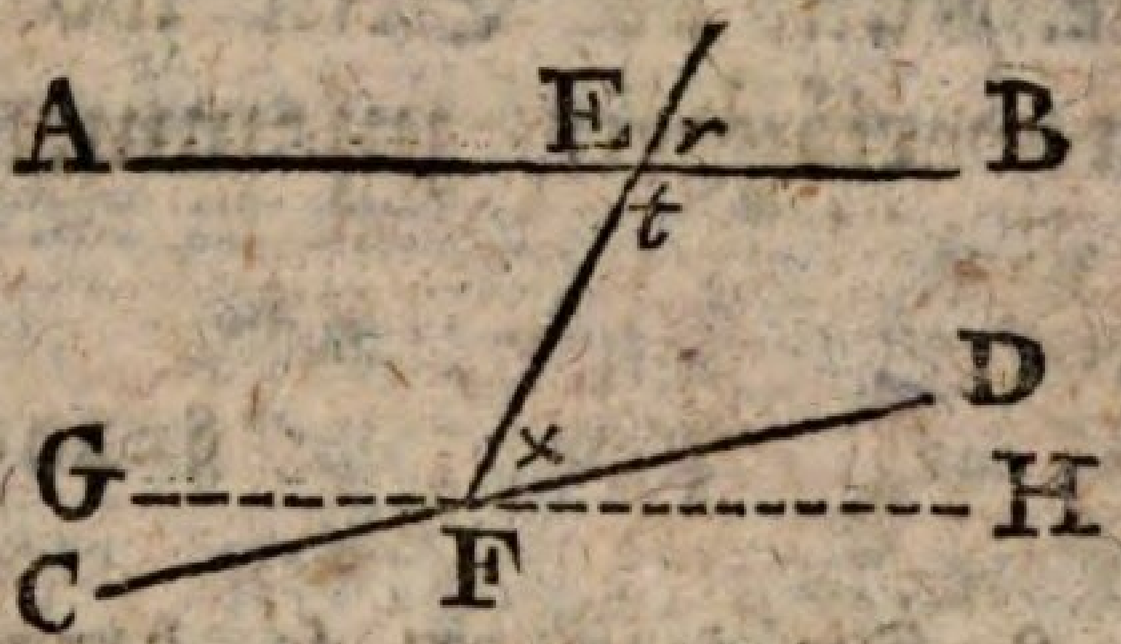
S. So kan FG es nicht seyn.

Der

Der fünfte Satz.

§ 108.

L. Zwei Linien AB, CD werden wieder in E und F geschnitten, aber die innern entgegen stehenden Winkel t und x, welche vorhin (§ 105) zwei rechten Winkeln gleich waren, sind jezt kleiner als zwei rechte Winkel. Die Frage ist: Können auch unter dieser Bedingung AB und CD gleichlaufend seyn.



S. Nein.

L. Weshalb nicht.

S. $t + r = 2\llcorner$ (§ 71).
Ich mache also bei F einen Winkel $EFH = r$ (§ 91); so ist

$$t + EFH = t + r \text{ (§ 36).} = 2\llcorner$$
$$t + EFH = 2\llcorner \text{ (§ 31)}$$
$$GH \;\#\; AB \text{ (105)}$$
$$CD \text{ nicht } \# \; AB \text{ (§ 107)}$$

L. Wenn also die innern GegenWinkel zusammen kleiner sind als zwei rechte; so sind die geschnittenen Linien nicht gleichlaufend. — Und Linien welche nicht gleichlaufend sind = = ?

S. Nähern sich einander, und stossen, genugsam verlängert, zusammen (§ 99).

L. Man kan also obigen Satz auch anders ausdrükken, oder erweitern.

S. Wenn die innern GegenWinkel kleiner sind als zwei rechte; so stossen die geschnittenen Linien, auf der Seite wo sie sich nähern, genugsam verlängert, zusammen.

§ 109.

L. Dieses ist der so berüchtigte elfte GrundSatz des Euklides, der, weil ihm die zu einem GrundSatze erfoderliche Klarheit fehlt, eigentlich ein LehrSatz seyn muste, wie Euklides selbst erkant zu haben scheint, indem er die GegenSätze desselben (§ 105) unter die LehrSätze aufgenommen hat. (B. I. S. 28. 29.)

S. Warum macht man denn den elften GrundSatz nicht auch zum LehrSatze?

L. Viele, ja vielleicht die mehresten neuern Geometer tuhn es auch, aber Jeder derselben mit grossem Widerspruch aller übrigen: denn ein LehrSatz erfodert einen Beweis (§ 52); und noch hat kein Geometer von dem in Rede stehenden Satz dergleichen anzugeben vermocht, der Andern genügt hätte.

S. Von uns ist der Beweis doch bündig geführt.

L. Des Glaubens sind wir, Andre aber sind andrer Meinung.

S. Was haben sie denn gegen unsern Beweis einzuwenden?

L. Sie sagen er stütze sich auf einen andern unerwiesenen Satz (§ 99), und es sei also nichts dadurch gewonnen (Allg. Lit. Zeitung 1792, 12. 164).

S. Der Einwurf ist sonderbar. Ist das denn nicht der Fall bei allen LehrSätzen? Meines Wissens liegen allen, mittelbar oder unmittelbar, unerwiesene Sätze zum Grunde.

L.

L. Das ist wahr. Man muß irgendwo anfangen, und festen Fuß haben. Sind die Säze, welche zum Grunde liegen, nur klar und einfach, so hat niemand etwas dagegen einzuwenden; nur sobald von diesem LehrSatze die Rede ist, will man keinen GrundSaz gut tuhn, da soll der Beweis ins Unendliche gehn. Alles, und mehr noch habe ich in der Vorrede zur zweiten Abteilung meiner Arithmetik gesagt. Auch schien meine Rechtfertigung Eindrukk zu machen. Der vorige Einwurf wurde nicht wiederholt. Man verwarf nicht mehr die GrundSäze überhaupt, sondern nur meinen, zum Behuf dieses LehrSatzes aufgestellten GrundSaz. Die Näherung, hieß es, rechtfertige den Schluß auf ZusammenStossung noch nicht; denn die Asymtote nähere sich auch der ihr zugehörigen krummen Linie, ohne je mit ihr zusammen zu stossen. (Allg. LZ. 1795, N. 3).

S. Dieser Einwurf ist eben so sonderbar als der vorige. Wie kan man von krummen Linien auf gerade schliessen? Solte das gelten, so würden alle von geraden Linien geltende GrundSäze wegfallen, denn sie finden auf krumme keine Anwendung. Zwei gerade Linien können keinen Raum einschliessen und eine einzige krumme kan es (§ 9, 20). Von einem Punkte zum andern geht nur eine gerade Linie (§ 8) aber unzählige krumme. Zwei Punkte bestimmen die Richtung einer geraden Linie (§ 11), aber nicht einer krummen.

L. Das sagte ich, als ich zum ersten Mal mit meinem Beweise hervortrat. (Geom. § 111. der ersten Ausgabe); demungeachtet wurde mir dieser im Voraus beantwortete Einwurf von neuen aufgetischt. Zu meiner Freude fand ich nachher, daß schon vor mir, ein großer Geometer geurteilt hatte, wie ich. „Ich sehe nicht, sagt Lambert, wie sich, bei der Vorstellung gerader Linien, Einwürfe von Hyperbelu hernehmen lassen, weil man, auf eine ganz gleiche Art, würde anstehn können, ob zwei gerade Linien nicht dergestalt könten an einander gelegt werden, daß sie einen Raum einschliessen, weil es doch mit (zwei gleich großen) CirkelBogen, wenn man ihre Hohlung gegen einander kehrt, angeht.“ (Leipz. Magazin,

1786 II. 140). Mit jenem aufgewärmten Einwurf kam indessen auch folgender neuer zum Vorschein: „H. v. W. solte nur bedenken, daß man in der Geometrie bloß aus solchen GrundSätzen strenge beweisen könne, die aus Definitionen hergeleitet sind." Hierauf erwiederte ich: Ich getraue mich, meinen GrundSatz, zwei gerade, nicht gleichlaufende Linien, stossen, genugsam verlängert, endlich zusammen, eben so gut aus einer Definition herzuleiten, als die mehrsten Euklidischen GrundSätze. Lambert habe schon bemerkt, daß man mit solchen Foderungen als man gewöhnlich macht, auch den zwölften euklidischen GrundSatz, zwei gerade Linien schliessen keinen Raum ein, anfechten könne. (Leipz. Mag. 1786, II. 139) — Nun trat der bisherige Recensent ab, und sein Nachfolger, ohne sehr mein Gönner zu seyn, konte sich gleichwol nicht entbrechen zu gestehn: Wenn jener Recensent sagt man könne in der Geometrie bloß aus solchen Sätzen strenge beweisen, die aus Definitionen hergeleitet sind, so glauben wir eben so wenig als H. v. W. daß dieses die wahre Ansicht, der Sache sei."

§ 110.

L. Aus dieser kurzen, aber getreuen Darstellung erhellt daß man wider meinen Beweis Vieles eingewandt, aber nichts durchgesetzt oder erwiesen, sondern, im GegenTeil, einen Einwurf nach dem andern stillschweigend zurückgenommen und, um nur mir nicht Recht zu geben sich genötigt gesehn hat, immer wieder von vorn anzufangen und die alten schon zurükk gewiesenen Einwürfe wieder aufzuwärmen. Solte es unter solchen Umständen, mir zu verdenken seyn, wenn ich anfinge meinen Beweis für gut und tadelfrei zu halten? Vielleicht bewirkt es eher Verzeihung, wenn ich gestehe, daß die Ehre der Erfindung desselben nicht einmal mir gebührt, sondern dem FreiHerrn von Wolf; dessen Beweis (elem. geom. § 262) ich durch VoranSchikkung eines Satzes § 99, und Berichtigung einer Citation bloß beweisbarer zu machen gesucht habe. Denn in Ermangelung des ersten konte Wolf nicht beweisen, daß die durchschnittenen

tenen Linien zusammen stossen, sondern nur daß sie sich nähern (conuergunt): und zu beweisen, daß AB und CD nicht zusammen stossen können, beruft er sich auf § 133. (bei uns § 115). ungeachtet der zur Sache passende § 160 (bei uns § 106) ihm nicht fehlt.

§ 111.

S. Aber da dieser Beweis so leicht und so klar ist, wie kömt es daß nicht vorlängst Andre darauf verfallen sind?

L. Daran scheinen die überspannten Foderungen der Geometer Schuld zu seyn. Einige werden dadurch von allen Versuchen abgeschrekkt; Andre zu überspannten Anstrengungen getrieben. Sie suchen in weiter Ferne, im Gebiete des Unendlichen, was sie ganz in der Nähe haben; und schreiben Bücher über eine Sache, die sich auf wenigen Blättern abmachen liesse; und verfehlen ihres Zwekks dennoch.

S. Warum aber ist man denn gerade in Ansehung dieses Beweises so schwierig?

L. Man scheint so zu schliessen: Wäre der Satz erweisbar, so hätte Euklides ihn erwiesen. Da dieser es nicht getahn hat, so muß der Beweis entweder äusserst schwer, oder gar unmöglich, seyn.

S. Die Wahrheit zu gestehen, so ganz ungegründet scheint mir dieser Schluß nicht. Es ist mir eben so unwahrscheinlich, daß ein Mann von Euklidens ScharfSinn, und Strenge im Beweisen, einen des Beweises so bedürftigen Satz ohne Beweis solte gelassen haben, wenn er eines Beweises fähig wäre.

L. Es ist noch gar nicht ausgemacht, daß Euklides diesen Satz unerwiesen gelassen habe. Wir haben seine Elemente nicht so wie sie von ihm verfasst sind, das zeigen die von einander abweichenden Ausgaben und HandSchriften. Selbst ein HerausGeber der euklidischen Elemente ist der Meinung, daß der Text in manchen Beweisen verderbt sey; (Lorenz Geom. § 39). Könte nicht der Beweis dieses Satzes gar ver-

verloren seyn? Ein Grund mehr für diese Vermutung sind Kästners Nachrichten von HandSchriften und Ausgaben, welche diesen Satz unter die Foderungen stellen. (Geom. Satz 12, Anm. wie auch Gesch. d. Math. I. S. 285. 296, 309) Nachdem er nämlich seinen Beweis verloren hatte, und in die Reihe der LehrSätze nicht mehr passte, wuste man nirgends mit ihm hin, und in dieser Verlegenheit wies der Eine ihm seine Stelle unter den GrundSätzen, der Andre unter den Foderungen an.

S. Diese Hypothese lässt sich hören; und würde noch wahrscheinlicher seyn, wenn sie nicht voraussetzte, daß der Beweis aus den vorhandenen GrundSätzen geführt werden könne; oder daß die zu seinem Behuf vorangeschikkten auch verloren gegangen.

L. Das ist wahr: aber eben so wahr ist es, daß von keiner dieser VorausSetzungen die Unmöglichkeit erwiesen ist. — Der wichtigste Grund für meine Vermutung aber ist folgender: „Dechales de progr. math. p. 12. schreibt: Es befinden sich in ihrer (der Jesuiten) Bibliothek zu Paris Euklides Elemente arabisch, darin ist viel von den gewöhnlichen Elementen unterschieden, wie unter andern aus den Figuren erhellt. Da scheint der elfte GrundSatz erwiesen. Clavius, sagt er, habe gehört, derselbe werde in arabischen codicibus erwiesen." Kästners Gesch. der Mathematik, B. I. S. 252 f. — Ich will indessen den Einwurf nicht verhehlen, welchen man hier machen kan, daß der Beweis dieses Satzes in arabischer Ausgabe auch Zusatz der Uebersetzer seyn könne, wie denn Kastner wirklich eine gedrukkte Uebersetzung Nassareddins recensirt, wo dieses der Fall zu seyn scheint. Nassareddins Beweis scheint übrigens mit dem meinigen Aehnlichkeit zu haben, denn Kästner setzt ihm dieselben Einwürfe en gegen. Er verlangt nämlich bei § 107 müsse bewiesen werden, daß die Perpendikel LI, EH, NM, in gleicher Entfernung gleichviel abnehmen, aber doch nicht immer weniger und weniger. (Ebendas. S. 369): welches ich bei geraden Linien für unnötig halte. (§ 109.)

Der

Der sechste Saz.

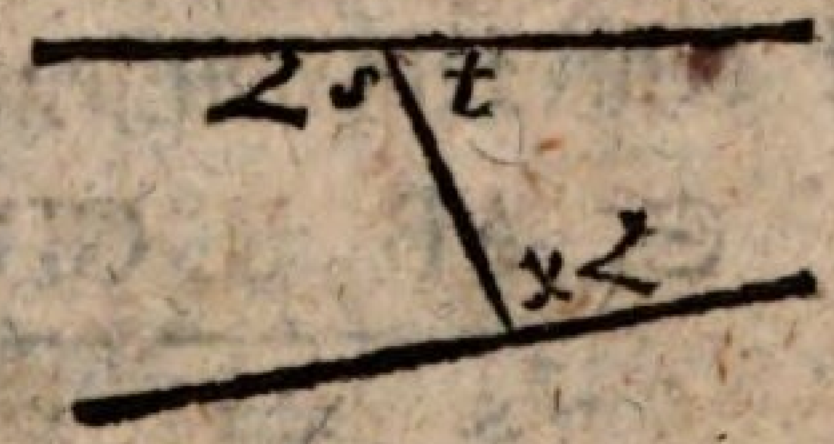
§ 112.

L. Zwei gerade Linien sind gleichlaufend wenn ihre WechselWinkel gleich sind (§ 102). Wie lautet dieser Saz umgekehrt?

S. Wenn zwei gerade linien gleichlaufend sind, so haben sie gleiche WechselWinkel.

L. Und der Beweis?

S. Ist apagogisch. Ich nehme an die GegenWinkel seien ungleich:



$$s > x$$

$$t + s > t + x \quad (\S\ 38)$$

Aber $t + s = 2 ∟ \quad (\S\ 71)$

$$t + x < 2 ∟ \quad (\S\ 34)$$

AB nicht # CD (§ 108).

L. Also wenn die WechselWinkel ungleich sind, so können die Linien AB und CD nicht gleichlaufend seyn. Sind daher diese Linien gleichlaufend, was ist man dan genötigt zuzugeben?

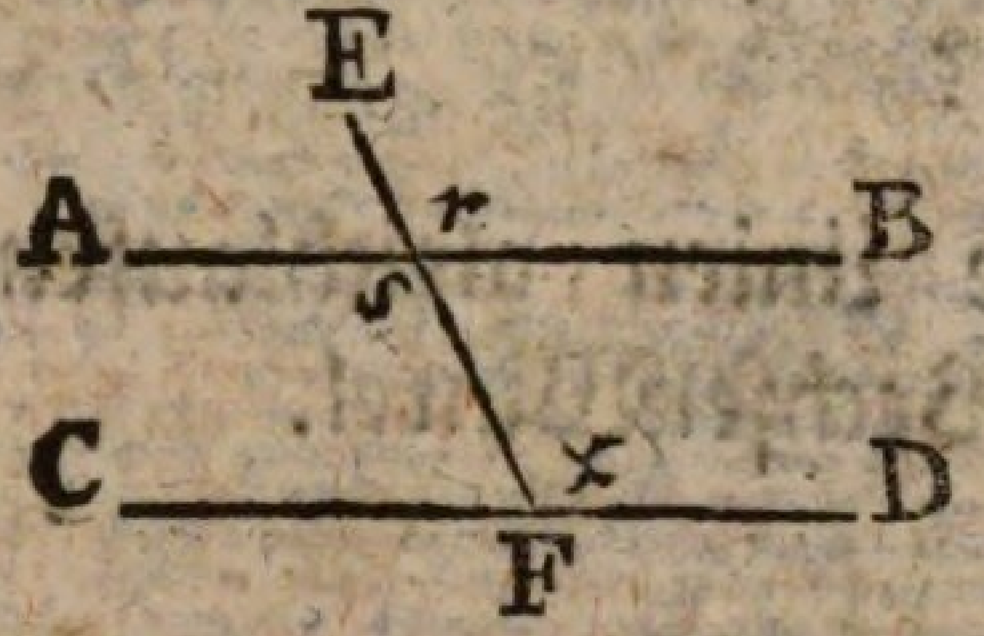
S. Daß ihre WechselWinkel einander gleich sind.

§ 113.

L. Zwei Linien sind gleichlaufend, wenn ein äusserer Winkel gleich ist dem ihm entgegen stehenden

den innern (§ 104). Welches ist der GegenSatz dieses Satzes?

S. Wenn zwei gerade Linien einander gleichlaufend sind, so ist jeder äusserer Winkel gleich seinem innern GegenWinkel.



L. Wir wollen also zwei gleichlaufende Linien AB, CD ziehn (§ 103), sie durch eine dritte EF schneiden, und nun sehn, ob der äussere Winkel r gleich ist dem ihm entgegen stehenden innern x.

S. AB # CD (VS.)

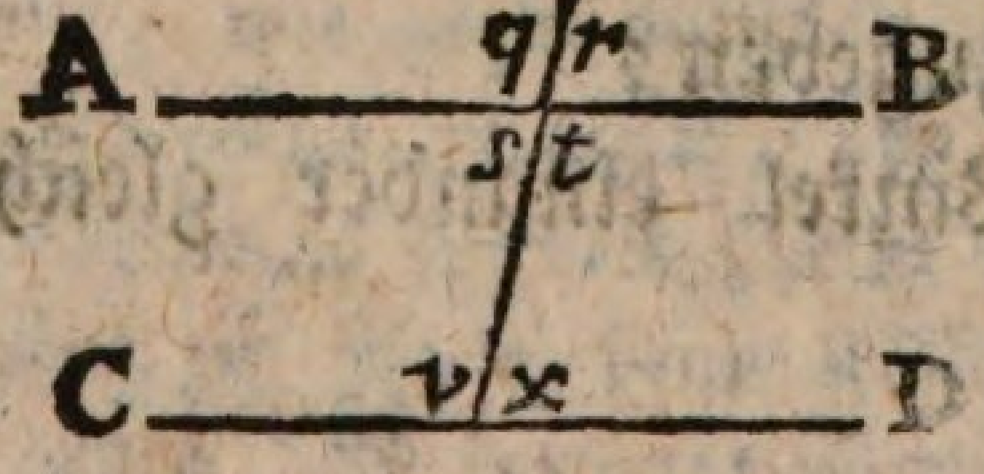
s = x (§ 112)

Aber s = r (§ 75)

r = x (§ 31, 33).

L. Unser Satz ist also erwiesen.

§ 114.



L. Wenn zwei innere entgegen stehende Winkel s und v zusammen zwei rechten Winkeln gleich sind, so sind die geschnittnen Linien gleichlaufend (§ 105). Auch dieser Satz lässt sich umkehren. Wie lautet sein GegenSatz?

S. Wenn zwei gerade Linien gleichlaufend sind, so sind zwei innere GegenWinkel zusammen zwei rechten Winkeln gleich.

L. Und nun der Beweis hiervon?

S. Sind die innern entgegen stehenden Winkeln nicht zwei rechten gleich, so sind die Linien nicht gleichlaufend (§ 108), wider die VorausSetzung.

L. Der Regel nach solte hier der apagogische Beweis Statt finden, aber Euklides gibt einen andern, welchen, da er auch nicht schwer ist, wir uns bekant machen wollen. — Welcher von den Winkeln x und r ist der gröste?

S. Sie sind beide gleich groß (§ 114).

L. Und wie groß sind t und r zusammen?

S. t + r = 2 ∟.

L. Nun den Beweis im ZusammenHange?

S. AB # CD (VS.)

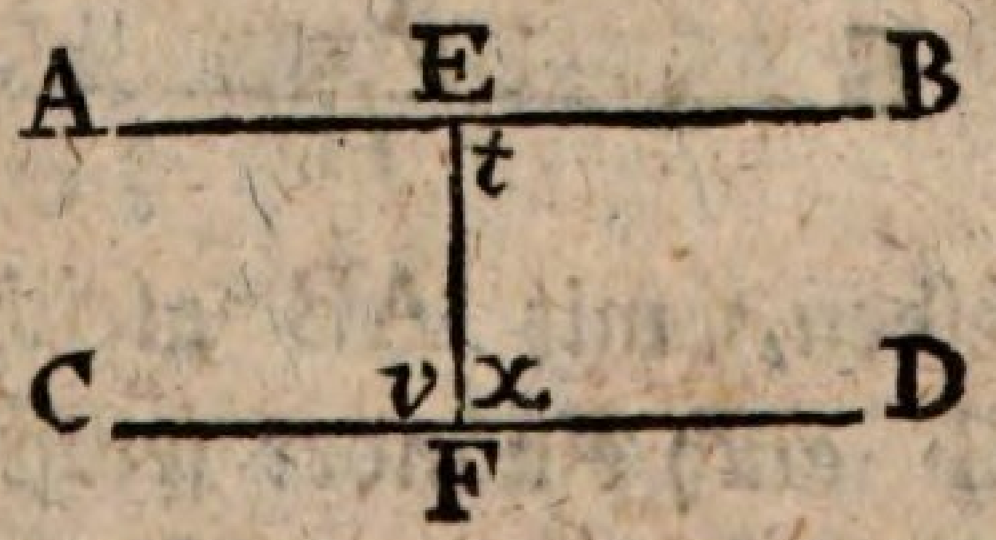
r = x (§ 114)

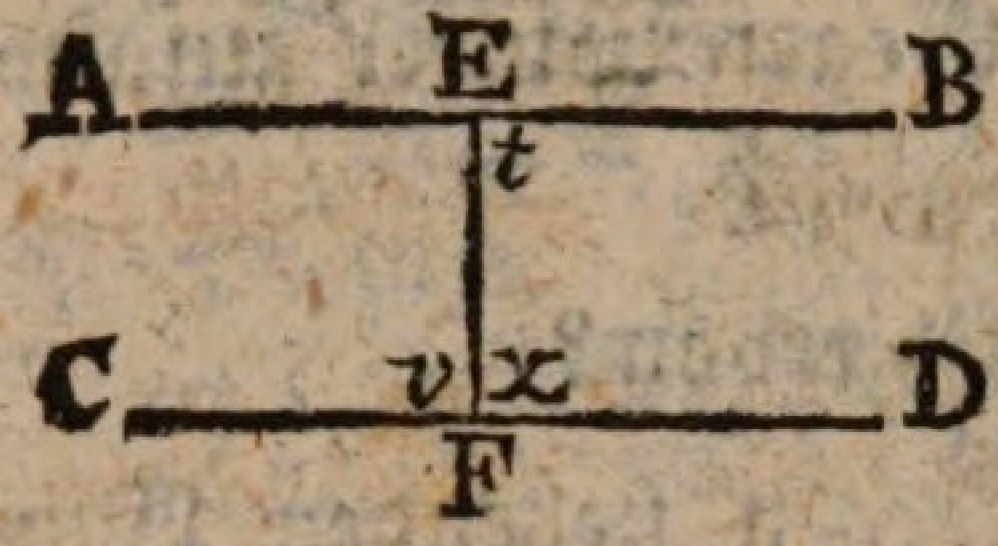
Aber t + r = 2 ∟ (§ 71)

t + x = 2 ∟ (§ 36).

§ 115.

L. Es werden zwei gleichlaufende Linien AB, CD gezogen (§ 103). Auf einer derselben AB, wird ein Punkt E willkührlich angenommen, und aus demsel-





ben eine senkrechte Linie errichtet (§ 68), welche die Linie CD in F erreicht. — Wie groß sind nun die innern GegenWinkel t und x?

S. t + x = 2 ∟ (§ 115).

L. Und t allein?

S. t = ∟ (§ 47)

x = ∟

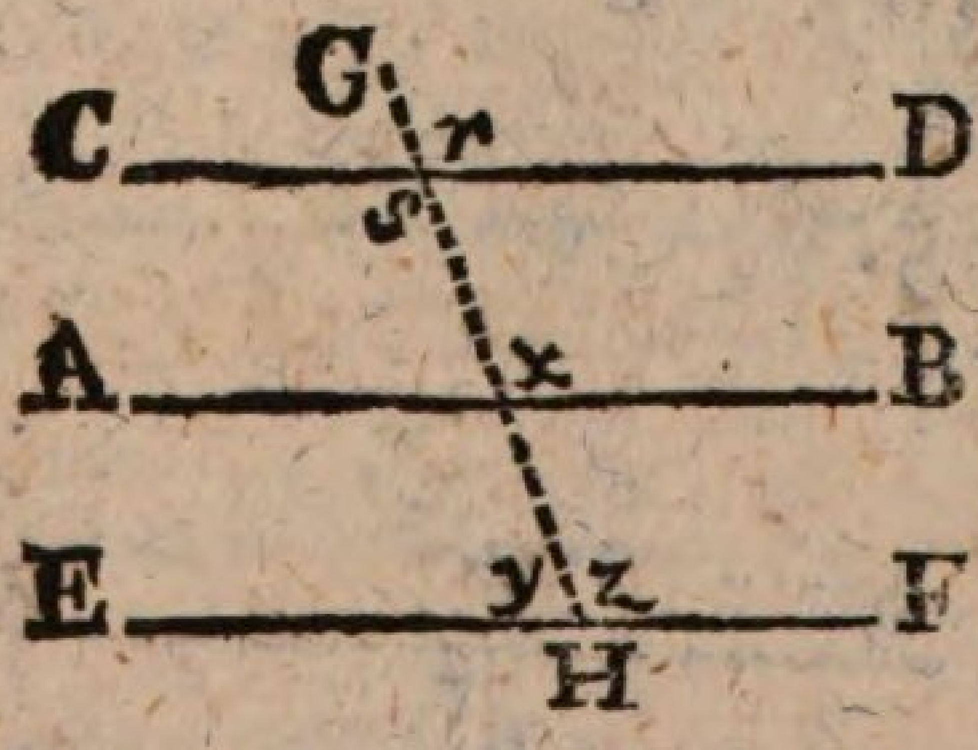
v = ∟ (§ 71)

L. EF also macht mit AB und mit CD rechte Winkel und steht also auf beiden senkrecht. (§ 47). Wenn also eine Linie EF auf einer von zwei gleichlaufenden Linien AB, senkrecht steht, wie steht sie dan auf der andern CD?

S. Auch senkrecht.

Der siebente Saz.

§ 116.



L. Es wird eine gerade Linie AB gezogen, und zwei andre CD, EF, mit ihr gleichlaufend, die erste über, die zweite unter ihr. Die Frage ist: Sind diese beiden, mit AB gleichlaufenden Linien CD und EF auch einander selbst gleichlaufend? Wie werden wir die beantworten?

S.

S. Ich werde die beiden äussersten Linien durch eine HülfsLinie GH verbinden, und dan sehn, ob ich an CD und EF die KennZeichen gleichlaufender Linien finde.

L. Recht! Und, welches sind diese KennZeichen?

S. Das erste wan zwei WechselWinkel s und z einander gleich sind (§ 102); das zweite, wan ein äusserer Winkel r gleichet dem ihm entgegen stehenden innern z (§ 104); und das dritte, wan zwei innere entgegen stehende Winkel s, y so groß sind wie zwei rechte (§ 105).

L. Und welches dieser KennZeichen findet denn hier Stat? — Wie wäre es, wenn wir die WechselWinkel s und z, mit x verglichen?

S. AB # CD (VS.)

s = x (§ 112)

Ferner AB # EF (VS.)

x = z (§ 113)

Also s = x, z = x (§ 116)

s = z (§ 31)

CD # EF (102).

L. Recht! Aber angenommen die zuerst gezogene Linie wäre CD, und mit ihr wären AB und EF gleichlaufend gezogen: wie wird nun bewiesen daß AB und CD gleichlaufend sind?

S. CD # AB

r = x (§ 113)

Fer-

Ferner CD = EF

r = z (§ 113)

Also x = r = z (Bew.)

x = z (§ 31)

AB ⋕ CD (§ 104).

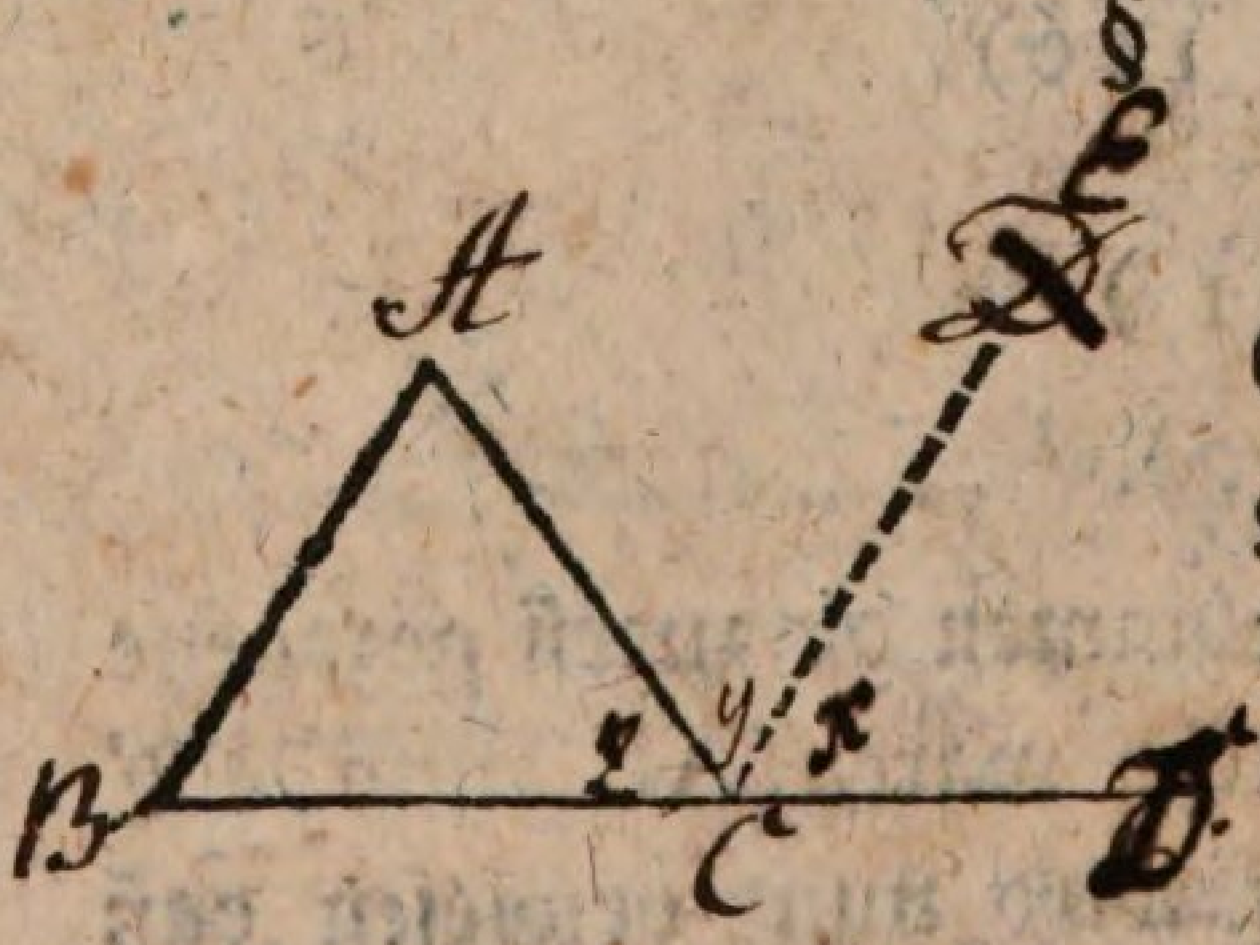
L. Der Beweis kan noch auf andre Art geführt werden: es ist aber hieran genug. Wir können also nun als LehrSaz annehmen: Wenn zwei gerade Linien einer dritten gleichlaufend sind , , ?

S. So sind sie einander selbst gleichlaufend.

II. Anwendung der Lehre von gleichlaufenden Linien auf DreiEkke.

Der achte Saz.

§ 117.



L. Es wird ein DreiEkk ABC nach Willkühr gezeichnet, dessen eine Seite BC, über C hinaus, bis D willkührlich verlängert, mit BA gleichlaufend aber wird von C aufwärts eine Linie CE gezogen. Die Winkel bei C werden von der Linken zur Rechten mit z, y, x bezeichnet. — Was für Winkel sind A und y in Beziehung auf einander?

S.

S. WechselWinkel (§ 101).

L. Und die Winkel B und x?

S. x ist ein äusserer, und B ein innerer ihm entgegen stehender (§ 101).

L. Und welcher ist grösser? A oder y? B oder x?

S. $BA \# CE$ (VS.)

$$\begin{array}{l} \hline A = y \text{ (§ 112)} \\ B = x \text{ (§ 113)}. \end{array}$$

L. Wie groß also ist der ganze AussenWinkel $y + x = ACD$?

S. $\underline{y = A} \text{ und } \underline{x = B}$

$$y + x = A + B$$

Der AussenWinkel eines DreiEkks ist so groß als die beiden innern welche keine NebenWinkel von ihm sind, zusammen.

L. Ganz recht! Nun wissen wir also das Verhältniß des AussenWinkels ~~in~~ zu dem innern genauer als bisher (§ 78).

§ 118.

L. Wie groß sind alle drei Winkel eines DreiEkks ABC zusammen?

S. $\left.\begin{array}{l} A = y \\ B = x \end{array}\right\}$ (§ 117)

$$\underline{z = z \text{ (§ 29)}}$$

$$\underline{A + B + z = y + x + z \text{ (§ 45)} = 2 \sqsubset \text{ (§ 73)}}$$

$$A + B + z = 2 \sqcup \text{ (§ 31)}.$$

L.

L. Das heisst = = ?

S. Alle drei Winkel eines DreiEkks sind zusammen zwei rechten Winkeln gleich.

L. Und zwei Winkel eines DreiEkks = = ?

S. Sind kleiner als zwei rechte.

L. Wenn man sich den rechten Winkel in 90 gleiche Teile, Grade genant, abgeteilt denkt, wie viel solcher Teile oder Grade haben dan alle Winkel eines DreiEkks zusammen?

S. Zwei Mal 90 = 180.

§ 119.

L. Wie viel rechte Winkel kan ein DreiEkk haben?

S. Nicht mehr als einen (§ 118)

L. Und wie viel stumpfe?

S. Auch nicht mehr als einen: denn zwei Winkel eines DreiEkks sind kleiner als zwei rechte (§ 119), und zwei stumpfe Winkel sind grösser als zwei rechte (§ 48).

L. Es können also auch wol nicht ein rechter und ein stumpfer Winkel in einem DreiEkke mit einander bestehn?

S. Nein, denn sie wären zusammen grösser als zwei rechte Winkel (§ 48), welches unstathaft ist (§ 119).

L. Wenn also ein DreiEkks-Winkel recht oder stumpf ist, wie sind dan die andern beiden?

S. Dan sind die andern beiden spiz.

L.

L. Und wenn ein Winkel ein rechter ist, wie groß sind dan die beiden andern zusammen?

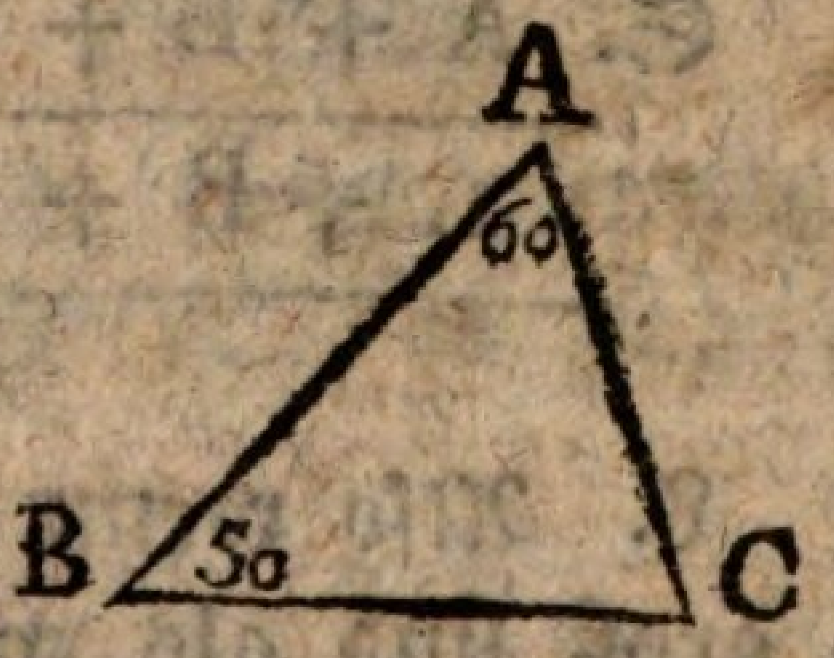
S. So groß wie ein rechter (§ 118).

§ 120.

L. DreiEkke welche einen rechten Winkel haben, heissen rechtwinklige; solche die einen stumpfen Winkel haben, stumpfwinklige, und solche die lauter spitze Winkel haben, spitze oder scharfwinklige.

§ 121.

L. Gesetzt zwei Winkel eines DreiEkks ABC wären bekant, nämlich A = 60, und B = 50 Grad, liesse sich da wol der dritte Winkel C angeben?



S. O ja.

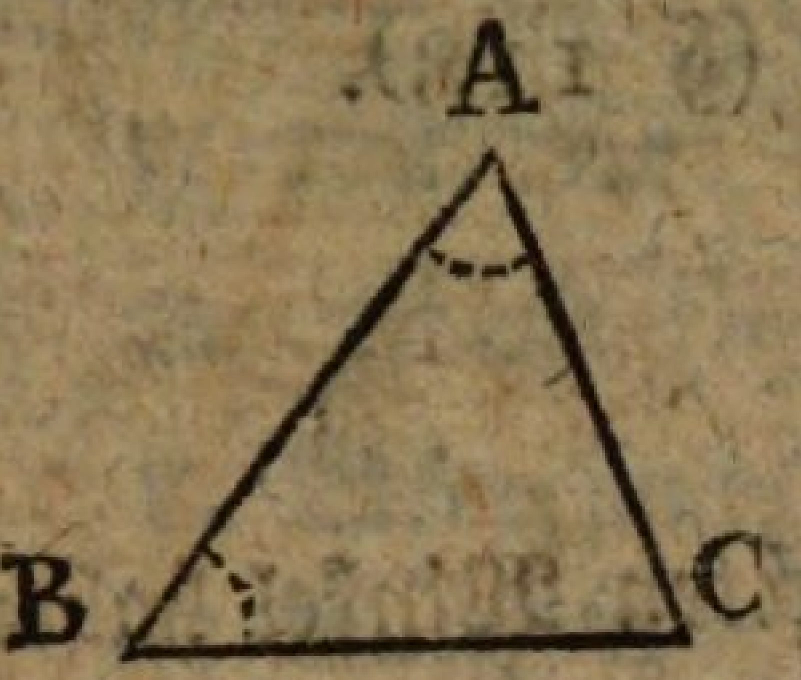
A + B + C = 180 Gr. (§ 119)
A + B = 60 + 50 = 110

C = 70 = 180 = 110 Grad.

L. Also wenn zwei Winkel eines DreiEkks bekant sind, so wird der dritte gefunden — Und wie?

S. Durch Abziehung der beiden bekanten von zwei rechten Winkeln, oder 180 Grad.

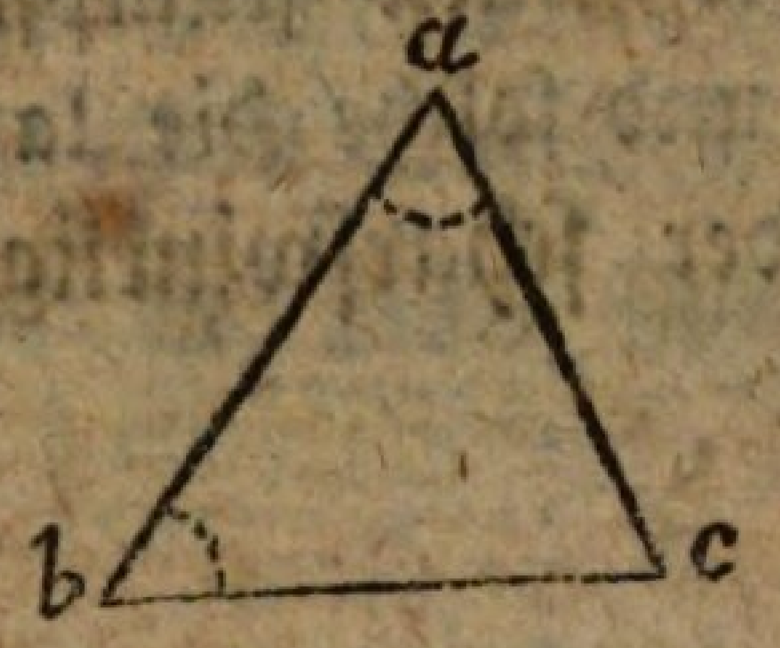
§ 122.



L. Hier sind zwei DreiEkke ABC und abc, in welchen

$$\angle A = \angle a,$$
$$\angle B = \angle b:$$

wie werden die Winkel C und c sich zu einander verhalten?



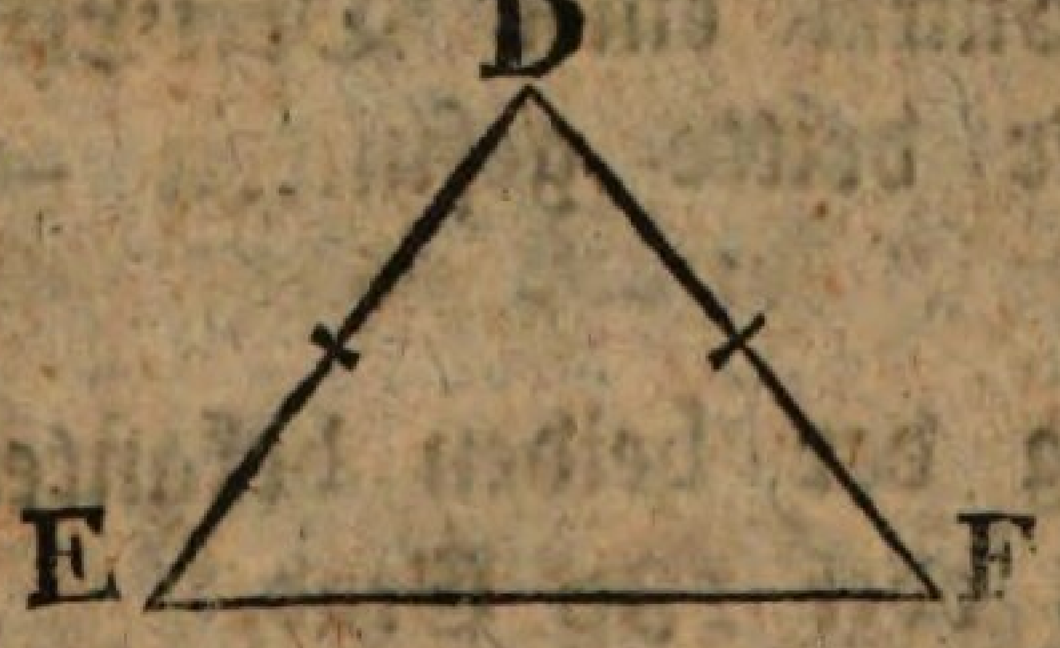
S. $A + B + C = 2\llcorner = a + b + c$ (§ 118)

$A + B + C = a + b + c$ (§ 31)

$C = c$ (§ 37).

L. Also wenn zwei Winkel eines DreiEkks so groß sind als zwei Winkel eines andern; so sind auch die dritten Winkel in beiden DreiEkken einander gleich.

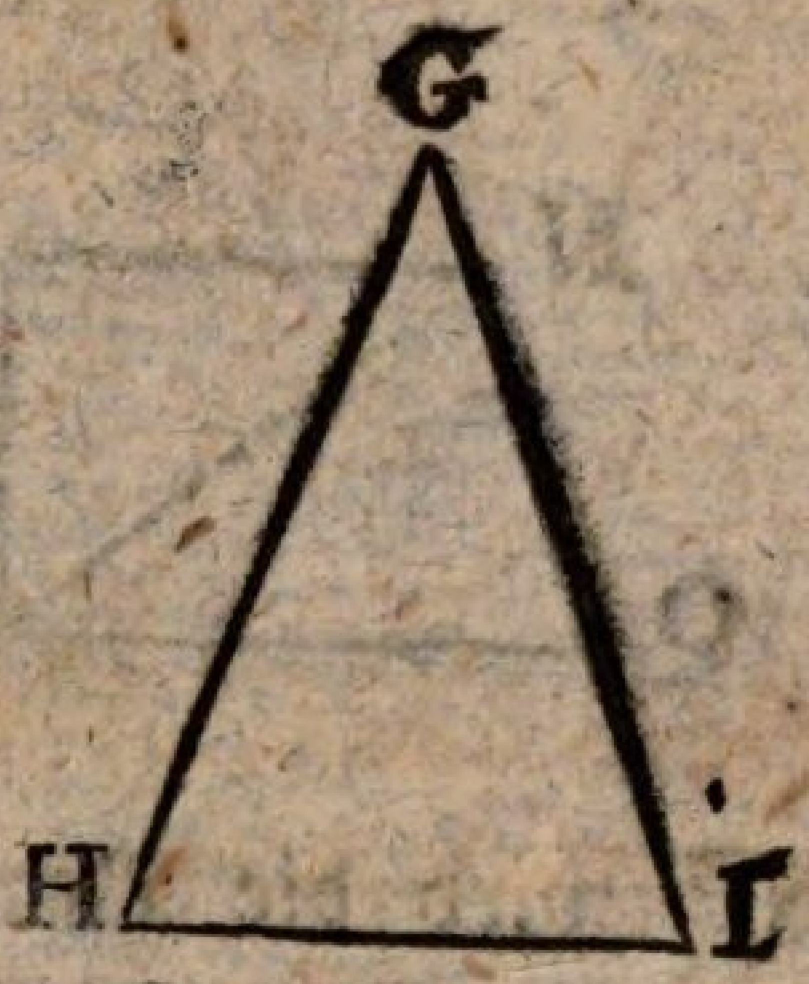
§ 123.



L. DEF ist ein gleichschenkliges DreiEkk. Gesetzt der Winkel an der GrundLinie E wäre 50 Grad, wie groß ist dan der andre F?

S. Wenn $E = 50$, so ist auch $F = 50$ (§ 57).

L. Aber der Winkel D, wie groß wäre der?



S. $D = 2 ∟ - (E + F)$
$= 180 - 100 = 80.$

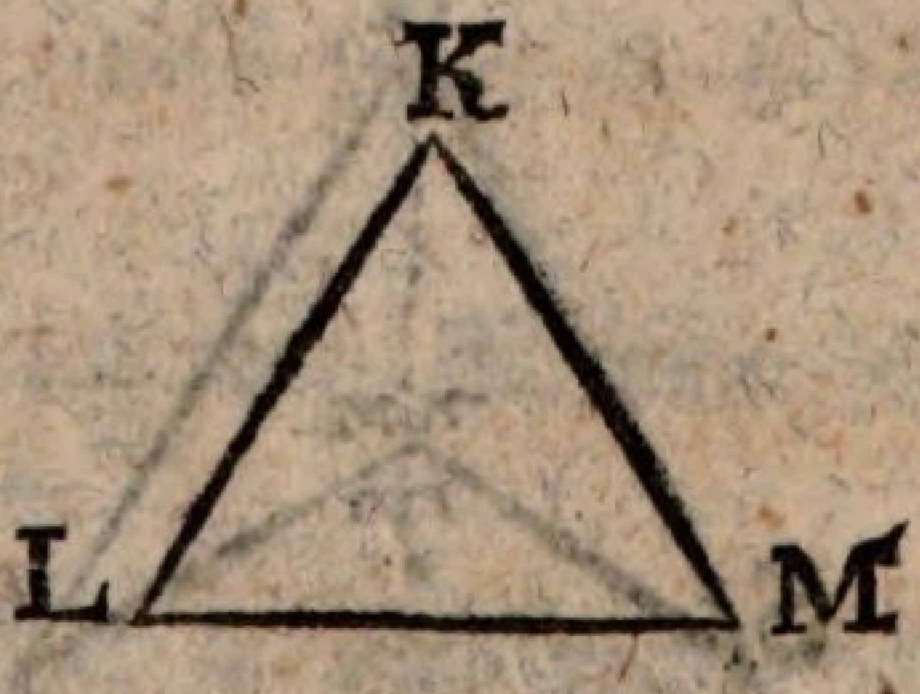
L. Recht! Gesetzt aber, in einem andern auch gleichschenkligen DreiEkke GHI, wäre der Winkel G an der Spitze 40 Grad; wie groß würden dan die beiden Winkel H und I an der GrundLinie seyn?

S. Wenn G = 40 Grad.
so ist H + I = 180 — 40 = 140 (§ 121)
und H = I = halb 140 = 70 Grad.

L. Wenn also in einem gleichschenkligen DreiEkke ein Winkel bekant ist, so sind es auch die beiden übrigen.

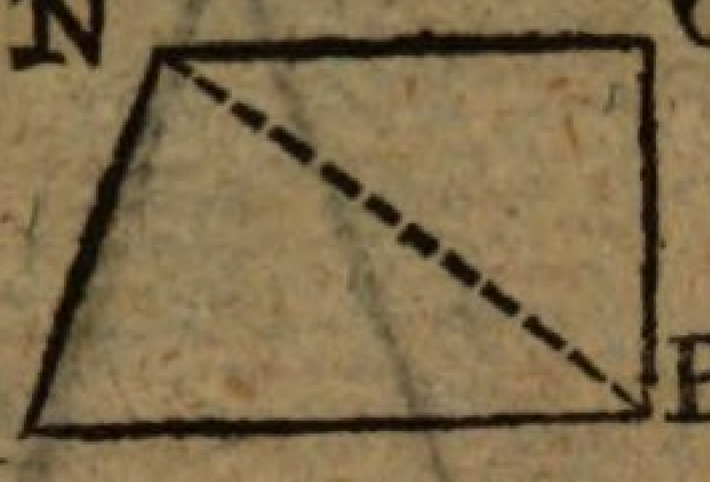
§ 124.

L. Wie groß ist wol ein einzelner Winkel eines gleichseitigen DreiEkks KLM?



S. Da im gleichseitigen DreiEkke alle Winkel gleich groß sind (§ 59); alle drei zusammen aber zwei rechten Winkeln gleichsind (§ 119); so ist ein Winkel der dritte Teil von zwei rechten Winkeln, oder zwei Dritteile eines rechten Winkels, das ist 60 Grad.

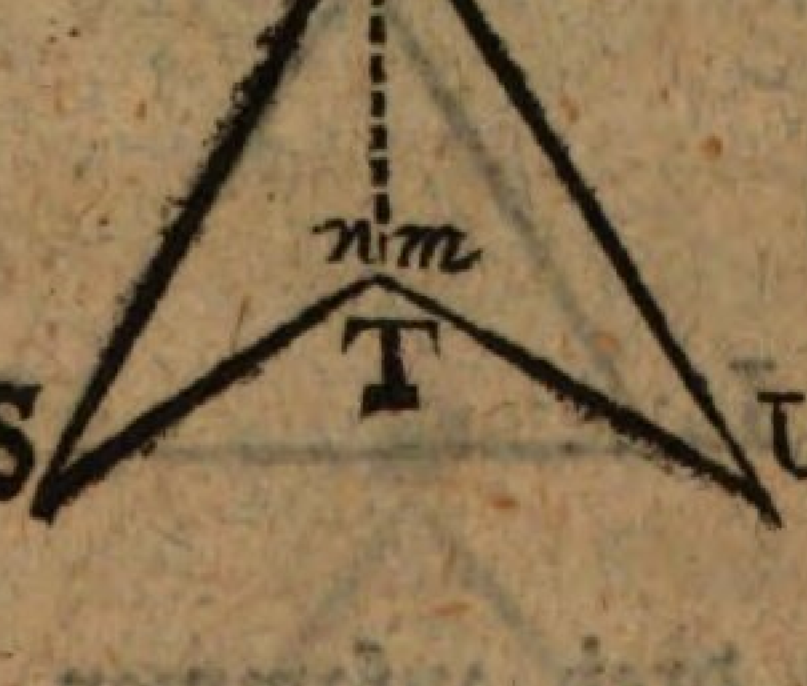
§ 125.



L. Es wird ein beliebiges VierEkk NOPQ gezeichnet. Wie groß sind dessen Winkel N + O + P + Q zusammen? — Eine Diagonale oder Ekklinie NP wird die Beantwortung der Frage erleichtern.

S. Das VierEkk NOPQ wird durch die Ekklinie NP in zwei DreiEkke NPO und NPQ geteilt, deren Winkel zusammen vier rechten Winkeln gleich sind (§ 118). Da nun die Winkel der DreiEkke mit den VierEkks-Winkeln genau übereintreffen; so betragen alle **VierEkksWinkel zusammen vier rechte Winkel.**

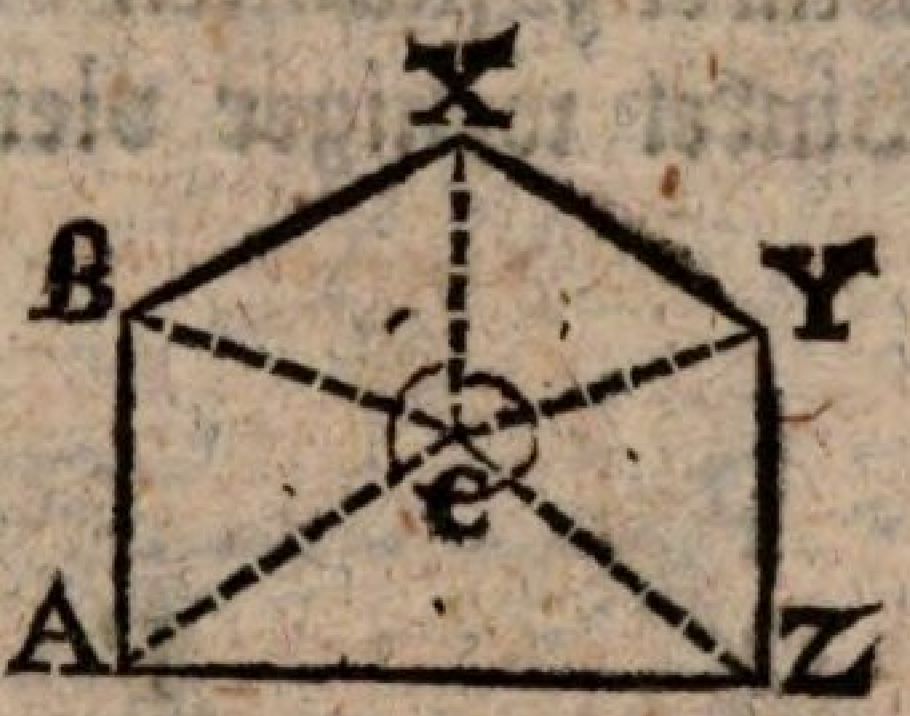
§ 126.



L. Hat ein VierEkk RSTU einen eingehenden Winkel T, so zeigt der blosse Anblikk schon, daß bei Berechnung der Winkel, nicht dessen Hohlung T, sondern dessen Erhabenheit n, m, in Anschlag kommen müsse; woraus die Unentbehrlichkeit erhabener Winkel (§ 17) erhellt.

§ 127.

L. Nun wollen wir ein beliebiges VielEkk XYZAB zeichnen. Wie werden wir die Grösse seiner Winkel erforschen?



S. Wir müssen es, wie das VierEkk (§ 125) durch EkkLinien in DreiEkke zerschneiden.

L. Das ginge an, es ist wahr: aber man würde erst beweisen müssen, daß sich jedes VielEkk durch EkkLinien in zwei DreiEkke weniger als es Seiten hat, abteilen lässt. Um dieses Beweises nun überhoben zu seyn, pflegt man folgenden Weg einzuschlagen. Man nimt innerhalb des VielEkks einen Punkt C, nach Belieben, an, und zieht von demselben, nach allen Ekken der Figur, gerade Linien CX, CY ꝛc. Wie wird hierdurch das VielEkk abgeteilt?

S. In lauter DreiEkke, und zwar in so viele als es Seiten hat.

L. Und nun wird sich auch die Summe seiner Winkel leicht berechnen lassen.

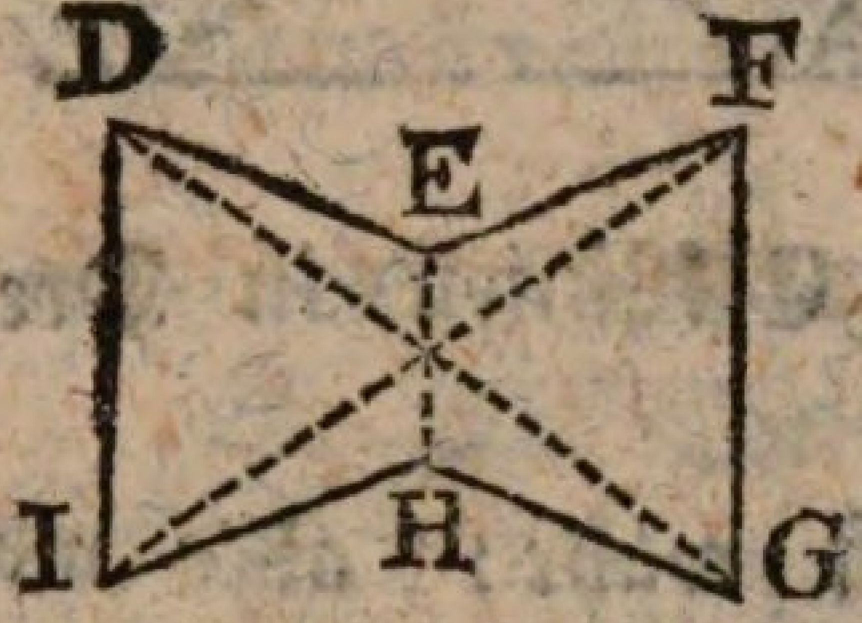
S. Sie beträgt zwei Mal so viel rechte Winkel als das VielEkk Seiten hat, weniger die um C befindlichen.

L. Recht! Und wie viel betragen die Winkel um den Punkt C?

S. Vier rechte (§ 73).

L. In jedem VielEkke also betragen alle Winkel zusammen doppelt so viel Mal zwei rechte Winkel weniger viere, als es Seiten hat.

§ 128.

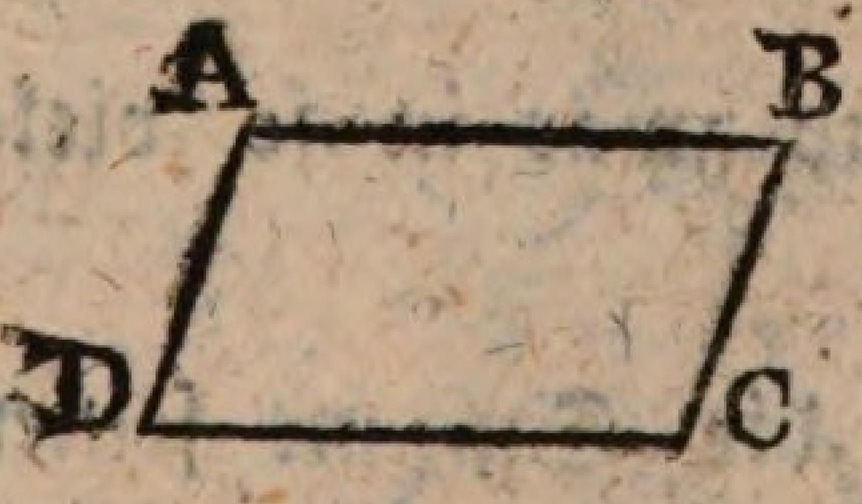


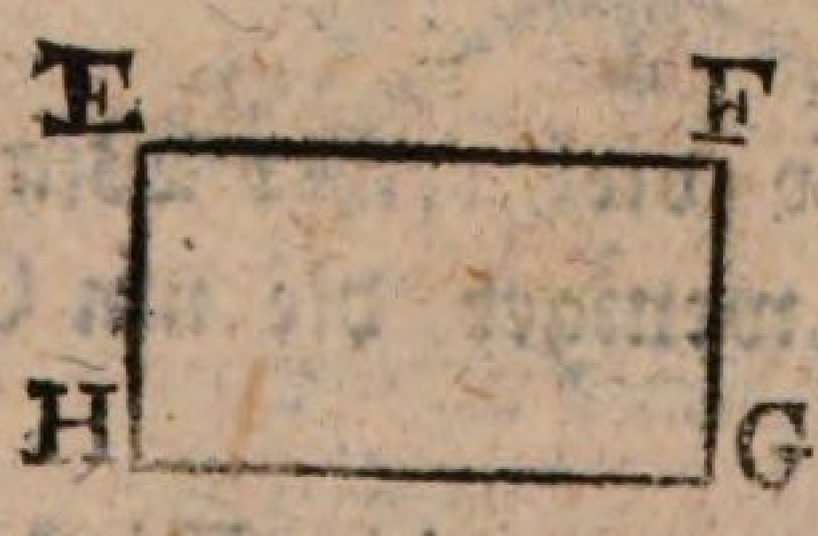
L. Da auch VielEkke eingehende Winkel haben können, wie an den Winkeln E und H des SechsEkks DEFGHI zu sehn; so gilt auch von ihnen die beim VielEkke (§ 127) gemachte Bemerkung.

III. Von Parallelogrammen.

Erklärung.

§ 129.



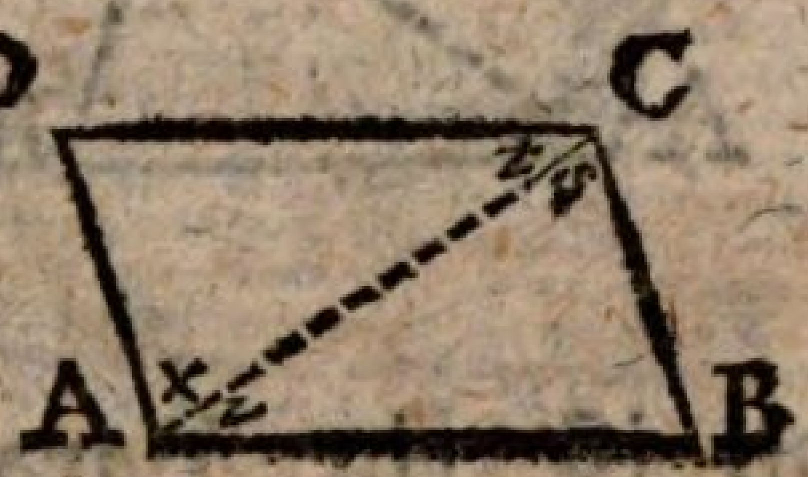


L. Eine von zwei Par gleichlaufenden Linien eingeschlossene Figur heisst ein **Parallelogramm**. Sein Zeichen ist ▱ — Die Richtung beider Par gleichlaufenden Linien gegen einander ist gleichgültig. Sie können nämlich schief, wie in ABCD, oder senkrecht, wie in EFGH, gegen einander stehn. —

Der neunte Satz.

§ 130.

Wie ist es aber mit der Länge der Seiten der Parallelogramme? Lässt sich darüber nichts bestimmen? — Wir wollen eine EckLinie AC ziehn, vielleicht ist die uns behülflich zu Auflösung unsrer Zweifel.



S. AB ∦ DC (§ 130)

t = v (§ 112)

Ferner AD ∦ BC (§ 130)

s = x (§ 112)

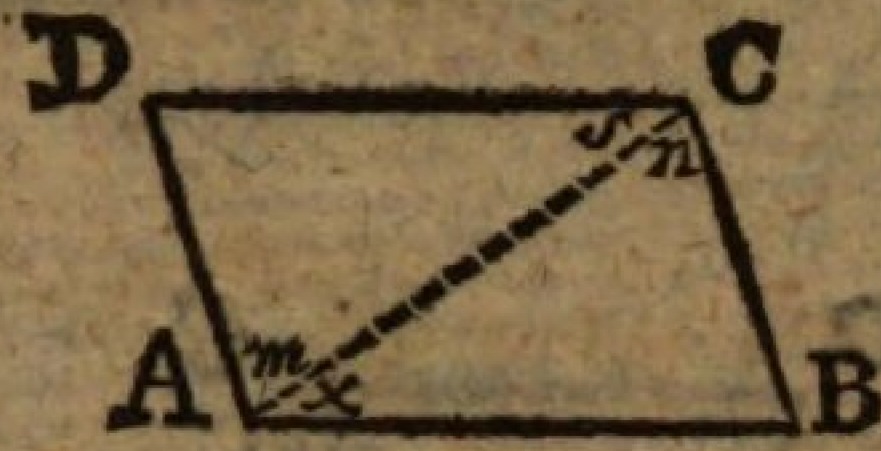
Da also t = v
und s = x } (§. 131)
und AC = AC (§ 29)

△ ACB ≌ △ ACD (§ 94)

AB = CD
BC = DA } (§ 24)

L. Das Resultat also ist: In Parallelogrammen sind die GegenSeiten gleich lang.

§ 131.



L. Ein Parallelogramm hat gleich lange GegenSeiten (§ 130): wie lautet dieser Saz umgekehrt?

S. Ein VierEkk was gleichlange GegenSeiten hat, ist ein Parallelogramm: das heisst seine GegenSeiten sind gleichlaufend (§ 129).

L. Und wie wird er bewiesen?

S. Ich werde eine EkkLinie ziehn, wie vorhin (§ 130). Dan ist

AB = CD } (VS.)
AD = CB }
AC = CA (§ 29)

△ACB ≅ △CAD (§ 63).

s = x } (§ 24)
m = n }

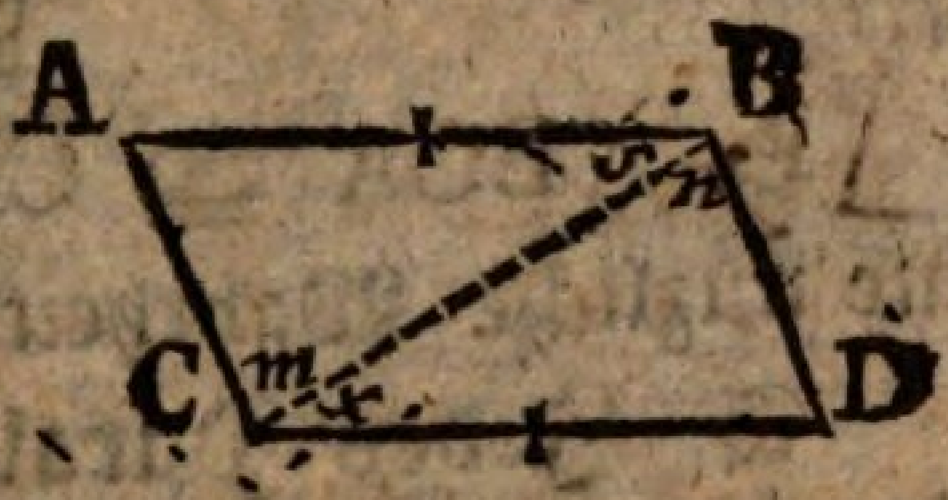
AB # DC } (§ 102)
AD # BC }

ABCD ▱ (§ 129).

Der zehnte Satz.

§ 132.

L. Zwei gleichlaufende, gleichlange Linien, AB und CD, werden an ihren nach einer Seite belegenen End-Punkten, durch zwei gerade Linien AC und BD, verbunden. — Die Frage ist: Wie verhalten AC und BD sich zu einander? Sind sie gleich, oder ungleich?



S. Ich werde wieder eine HülfsLinie BC ziehn. Dan ist

$$AB = DC \text{ (VS.)}$$
$$BC = CB \text{ (§ 29)}$$
$$s = x \text{ (§ 112)}$$
$$\triangle BCA \cong \triangle CBD \text{ (§ 56)}$$
$$AC = DB \text{ (§ 24)}.$$

L. Und was ist nun erwiesen?

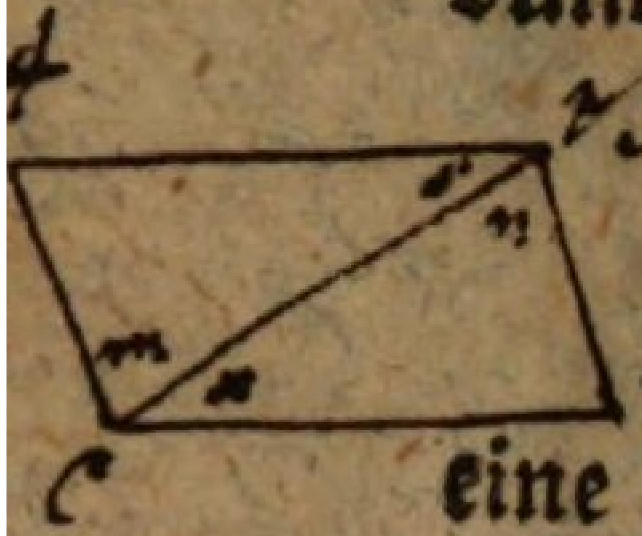
S. Gerade linien welche gleichlaufende gleich lange linien an ihren nach einer Seite belegenen EndPunkten verbinden, sind gleich lang.

L. Und ein VierEkk was gleich lange GegenSeiten hat, wie ABDC, was ist das für eine Figur?

S. Ein Parallelogramm (§ 131).

L. Der jezt gefundene Satz lässt sich also noch anders einkleiden.

S. Wenn zwei gleichlaufende Linien von gleicher Länge an ihren nach einer Seite liegenden EndPunkten, durch gerade Linien verbunden werden; so entsteht ein Parallelogramm.



§ 133.

L. △BCA ≌ CBD (§ 131) — Hierin liegt eine nüzliche Wahrheit. Welche ist es?

S. Jedes Parallelogramm wird durch eine EkkLinie in zwei gleichähnliche DreiEkke geteilt.

L. Aus dieser Wahrheit folgt eine zweite: Wie verhalten sich die GegenWinkel A und D zu einander.

S. Sie sind gleich groß. (§ 24).

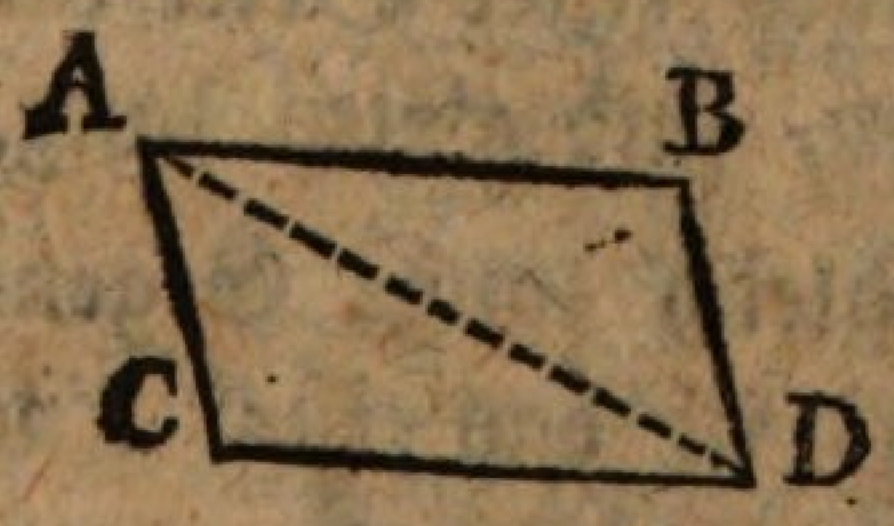
L. Solte von den beiden andern GegenWinkeln B und C sich nicht ein Gleiches erweisen lassen?

S. O ja.

$$\left.\begin{array}{l} s = x \\ n = m \end{array}\right\} (\S\ 131)$$

$$s + n = x + m \quad (\S\ 36)$$

oder $B = C$ (§ 45).



L. Der Beweis läßt sich auch führen mittels einer zweiten EkkLinie AD. Es ist dan

$$\frac{\triangle ADB \cong \triangle ADC\ (\S\ 163)}{B = C}$$

Das Resultat hiervon ist?

S. In jedem Parallelogramm sind die einander schräge gegenüber stehenden Winkel gleich groß.

§ 134.

§ 134.

L. Hier ist ein Parallelogramm ABCD, von welchem bekant ist, daß es einen rechten Winkel A hat. Was für ein Winkel ist nun der ihm gegenüber stehende C?

S. Wenn A ein rechter Winkel ist, so ist der ihm gegenüber stehende C auch ein rechter (§ 133).

L. Wie groß aber sind B und D?

S. $A + B + C + D = 4\llcorner$ (§ 125)

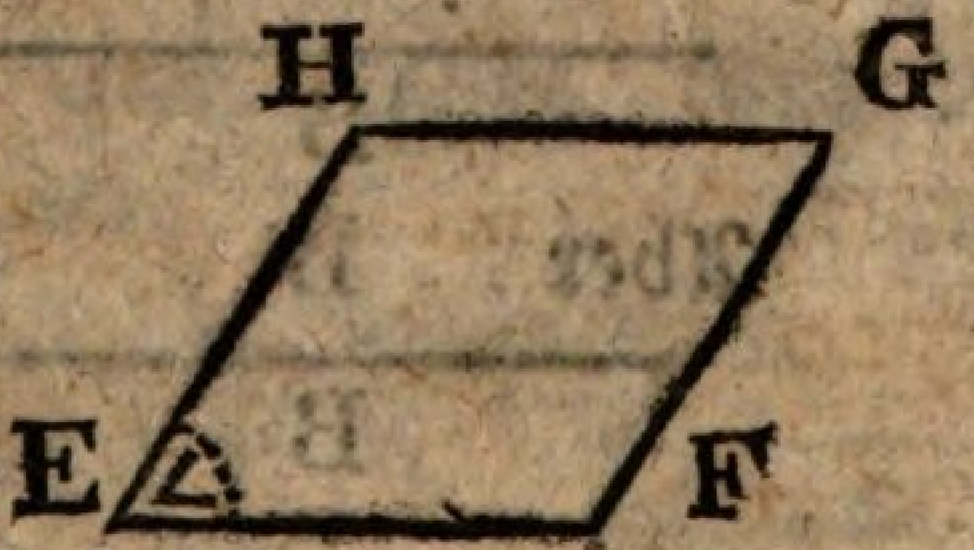
$A + C = 2\llcorner$ (§ 134)

$B + D = 2\llcorner$

Aber $B = D$ (§ 133)

$B = \llcorner = D$

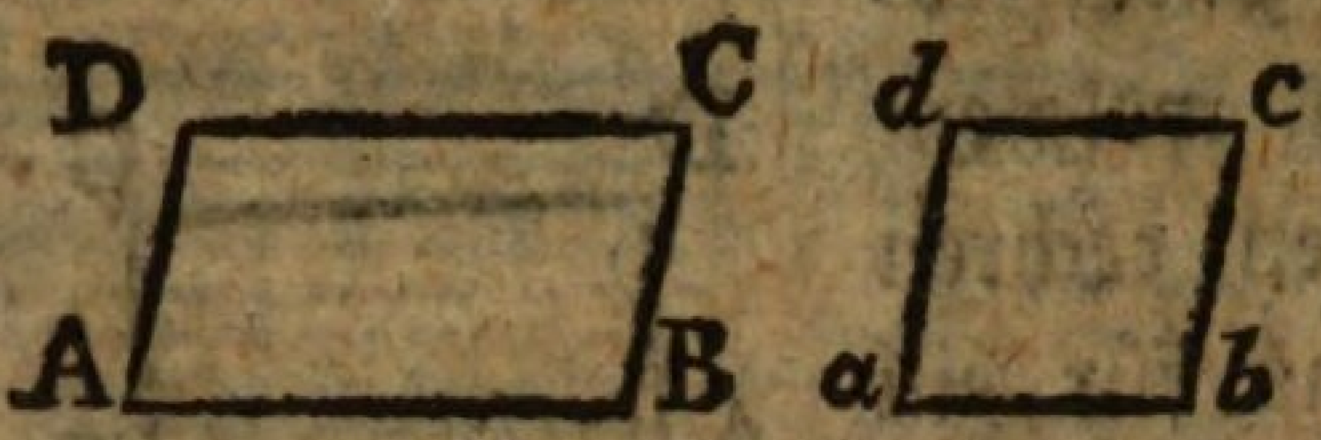
L. Ein Parallelogramm also mit einem rechten Winkel hat lauter rechte Winkel. — Gesetzt aber ein Winkel E wäre schief?



S. Dan ist der ihm gegegenüber liegende G auch schief (§ 133). Und nun können die beiden übrigen F und H auch nicht anders als schief seyn, indem sie zusammen entweder grösser, oder kleiner als zwei rechte seyn müssen (§ 125).

L. Ein Parallelogramm also mit einem schiefen Winkel hat lauter schiefe Winkel.

§ 135.



L. Hier sind zwei Parallelogramme ABCD, und abcd, in welchen

$$\angle A = \angle a$$

wie verhalten nun die Winkel, C und c, sich zu einander?

S. $C = A$, $c = a$ (§ 133)

$A = a$ (§ 32)

L. Aber die Winkel B und b, D und d?

S. $A + B + C + D = 4\llcorner = a + b + c + d$ (§ 125)

$A + B + C + D = a + b + c + d$ (§ 31)

$B + D = b + d$ (§ 37)

Aber $B = D$ und $b = d$ (§ 133)

$B = b$ und $D = d$ (§ 43)

L. Wenn also in einem Parallelogramme AC, ein Winkel A gleich ist, einem Winkel a eines andern Parallelogramms ac?

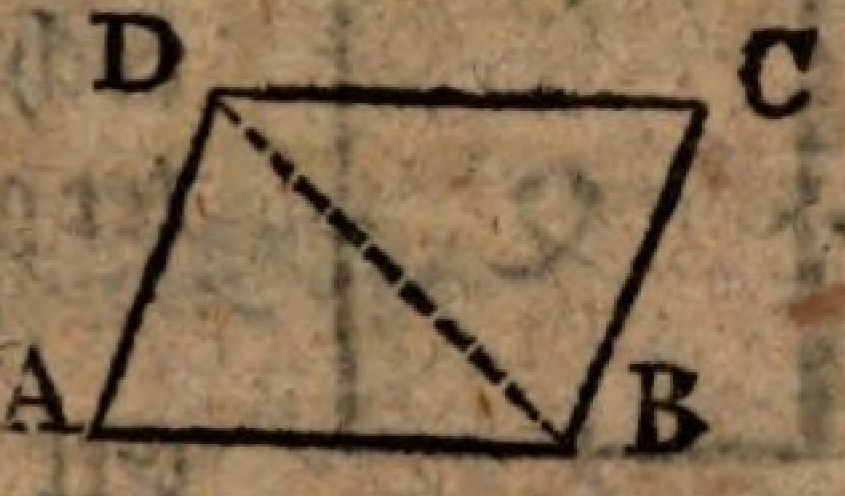
S. So sind alle gleichliegende Winkel beider Parallelogrammen einander gleich.

Der

Der eilfte Saz.

§ 136.

L. Es wird gegeben ein Winkel A, und zwei ihn einschliessende Seiten AB und AD; und wird verlangt ein Parallelogramm daraus zu machen, oder das angefangene zu vollenden. . . (Solte der Schüler auf die Auflösung nicht von selbst verfallen, so wird er auf § 130 und § 131 verwiesen).



S. Ich schliesse den Winkel A durch die Linie BD, und verfertige auf BD ein dem DreiEkke BDA gleichähnliches DreiEkk DBC (§ 90).

L. Aber ist ABCD auch wirklich ein Parallelogramm. Welches sind die Eigenschaften eines Parallelogramms?

S. Gleichlaufende, und gleich lange Gegen-Seiten (§ 129, 130). Nun ist

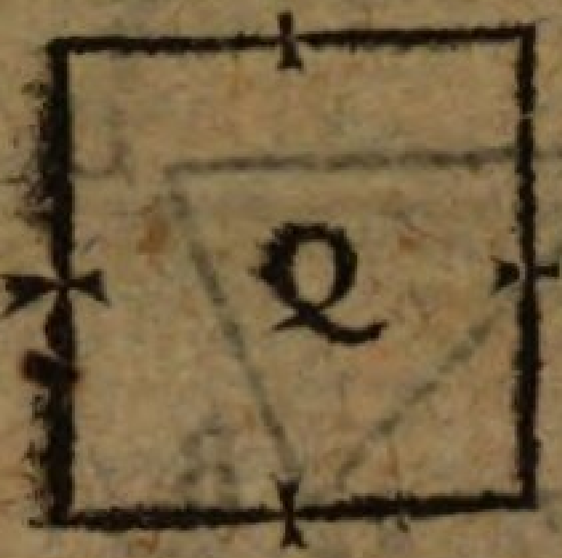
AB = CD } (Verf.)
AD = CB }
―――――――――
ABCD ▱ (§ 130)

Erklärung.

§ 137.

Der gegebenen Winkel (§ 136) kan recht oder schief, und die ihn einschliessenden Seiten können gleich, oder ungleich seyn. — Angenommen der

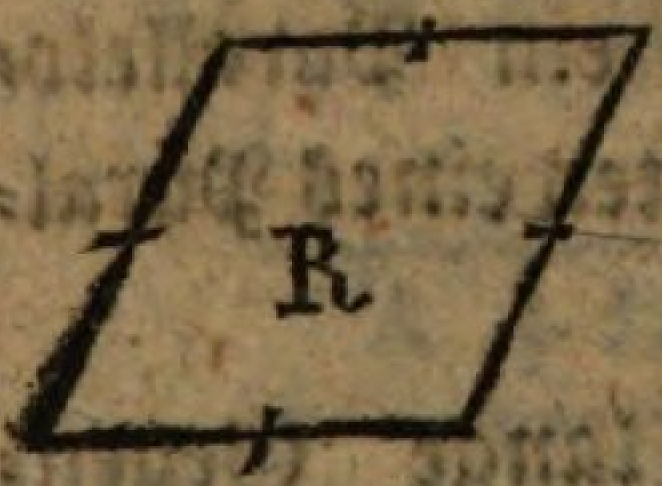
der gegebene Winkel wäre ein rechter, und die gegebenen Seiten wären gleich; was für eine Figur entstünde aus dem Verfahren § 136?



S. Ein VierEkk mit lauter rechten Winkeln (§ 134) und lauter gleichen Seiten (§ 130) wie Q.

L. Recht! Und ein solches VierEkk heisst ein Quadrat. — Wenn aber der gegebene Winkel recht, und die Seiten ungleich wären?

Dan entstünde ein VierEkk O mit lauter rechten Winkeln, (§ 134) aber nicht lauter gleichen Seiten, sondern nur die einander gegenüber stehenden wären gleich (§ 130.)



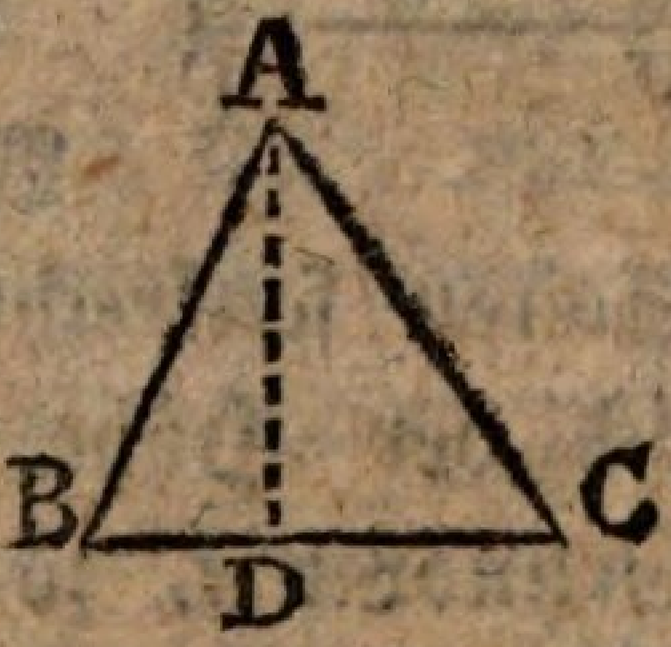
L. Und ein solches heisst ein RechtEkk, (rectangulum, oder oblongum) — Ein VierEkk was lauter schiefe Winkel und lauter gleiche Seiten hat, wie R, heisst eine Raute; (rhombus) und ein VierEkk wie r mit lauter schiefen Winkeln, in welchen nur die GegenSeiten gleich sind, heisst eine längliche Raute rhomboides) — Nur diese vier Arten von VierEkken sind Parallelogramme; alle andere heissen unordentliche VierEkke trapezia, wie T.

IV. Von Verwandung der geradlinigen Figuren.

Erklärungen und GrundSätze.

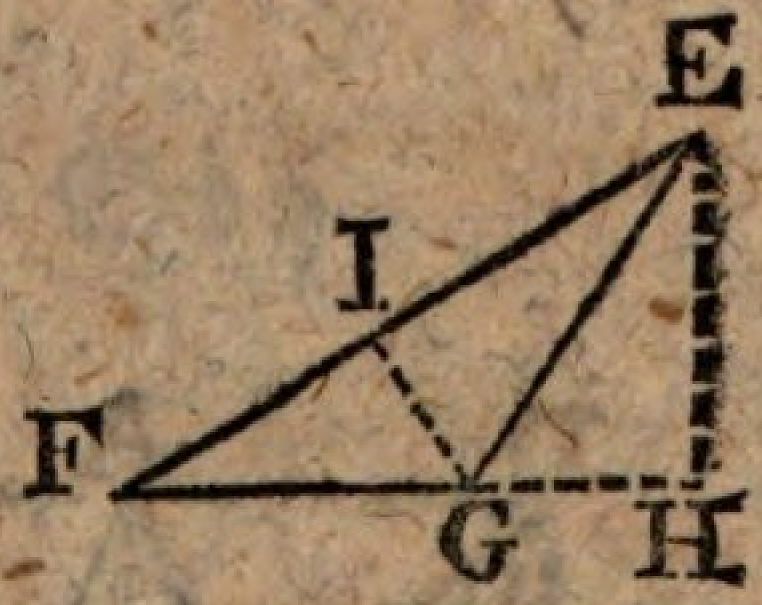
§ 138.

L. Die Höhe einer Figur ist eine eine ihrer Seiten, oder deren Verlängerung, von der entlegensten Spitze, gezogene senkrechte Linie. — Welches ist nun die Höhe eines DreiEkks ABC?



S. Die auf die GrundLinie BC von der gegenüber stehenden Spitze gezogene senkrechte Linie AD.

L. Und die Höhe des DreiEkks EFG?

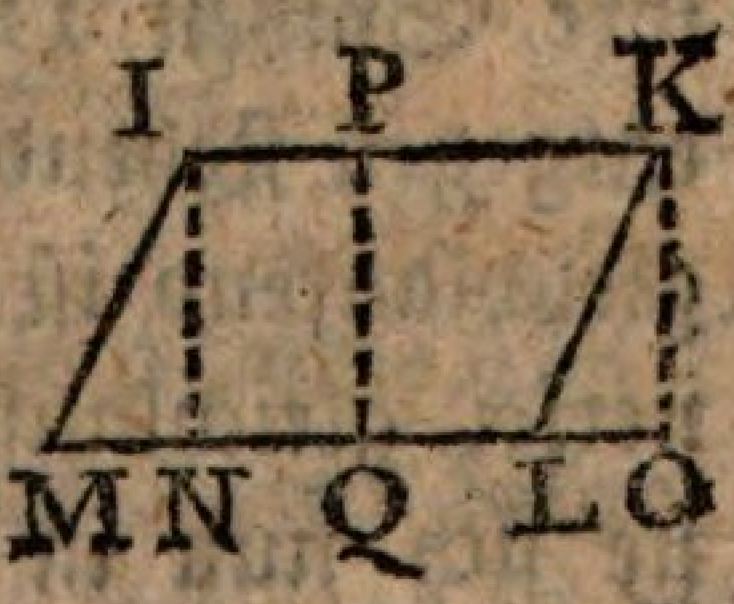


S. Die von der Spitze E auf die verlängerte GrundLinie fallende senkrechte Linie EH.

L. Wenn man aber EF zur GrundLinie des DreiEkks EFG annähme, welches wäre dan seine Höhe?

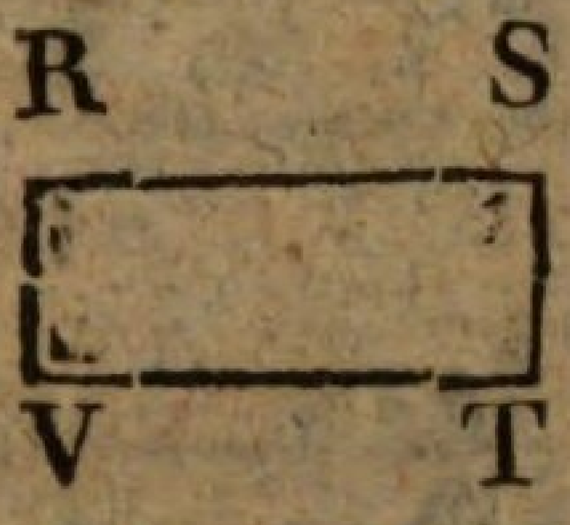
S. Dan wäre es die senkrechte Linie GI.

L. Welches aber ist die Höhe eines Parallelogramms IKLM?



S. Die senkrechte Linie IN, oder KO.

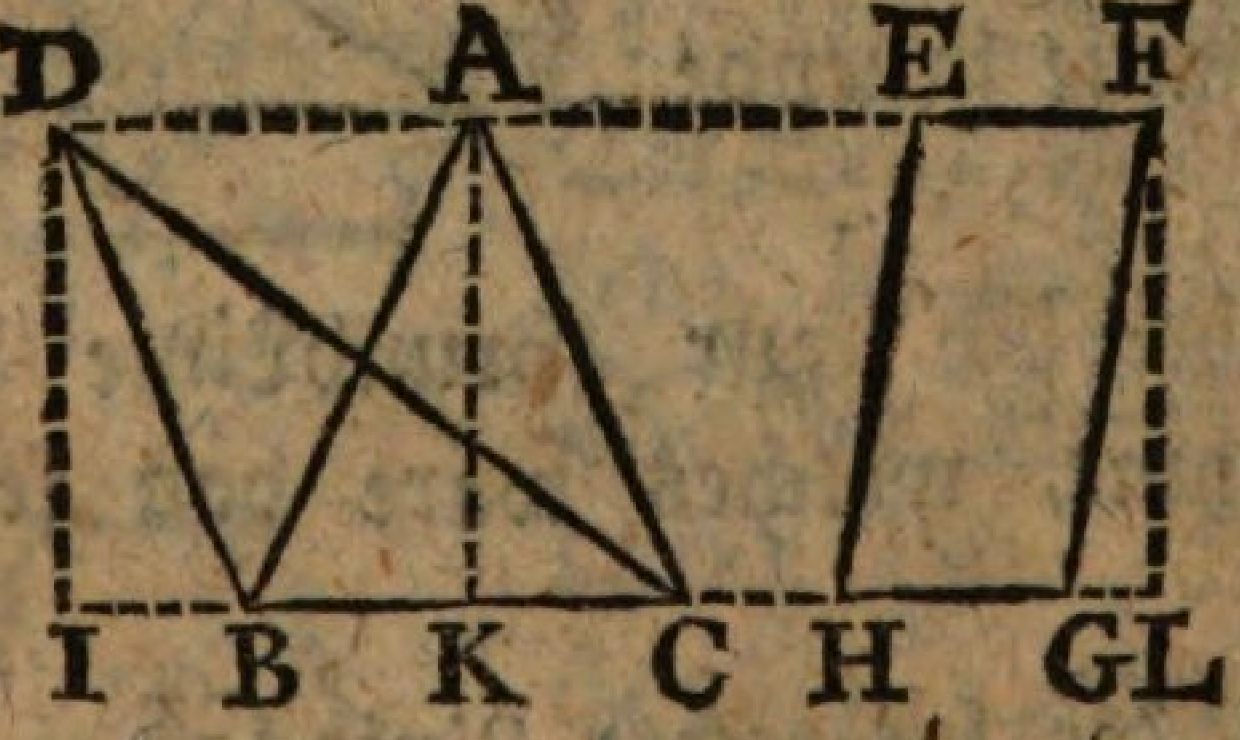
L. Da ML und IK gleichlaufend sind (§ 129), und gleichlaufende Linien überall gleiche Entfernung von einander haben (§ 97); so sind alle senkrechte Linien von IK auf ML gleich lang (§ 85); und die Höhe des Parallelogramms IKLM wird also durch jede von IK auf ML gezogene senkrechte Linie PQ gemessen. Am leichtesten wird die Höhe eines RechtEkks gefunden. Welches ist die von RSTV?



S. Da ein RechtEkk lauter rechte Winkel hat (§ 137), so stehn seine Seiten senkrecht auf einander (§ 47), und sind folglich der Höhe gleich. Nimt man nämlich VT zur GrundLinie, so ist VR die Höhe: nimt man aber VR zur GrundLinie, so ist VT die Höhe.

L. Im RechtEkk also ist die mit der Grundlinie zusammen stossende Seite seiner Höhe gleich.

§ 139.



L. Wenn Figuren ABC, DBC, EFGH, mit ihren GrundLinien BC und HG, auf einerlei geraden Linie IL stehn; eine durch ihre Spitzen D, A, oder durch die der GrundLinie entgegen stehende Seite DF aber ihren GrundLinien gleichlaufend ist: so stehn diese Figuren zwischen einerlei gleichlaufenden Linien. — Wie verhalten sie sich nun in Ansehung ihrer Höhe zu einander?

S.

S. DI = AK = FL (§ 97).

L. Figuren also die zwischen einerlei gleichlaufenden Linien stehn ...?

S. Haben gleiche Höhe.

L. Aber kan man auch umgekehrt annehmen: Figuren von gleicher Höhe können zwischen einerlei gleichlaufenden Linien stehn?

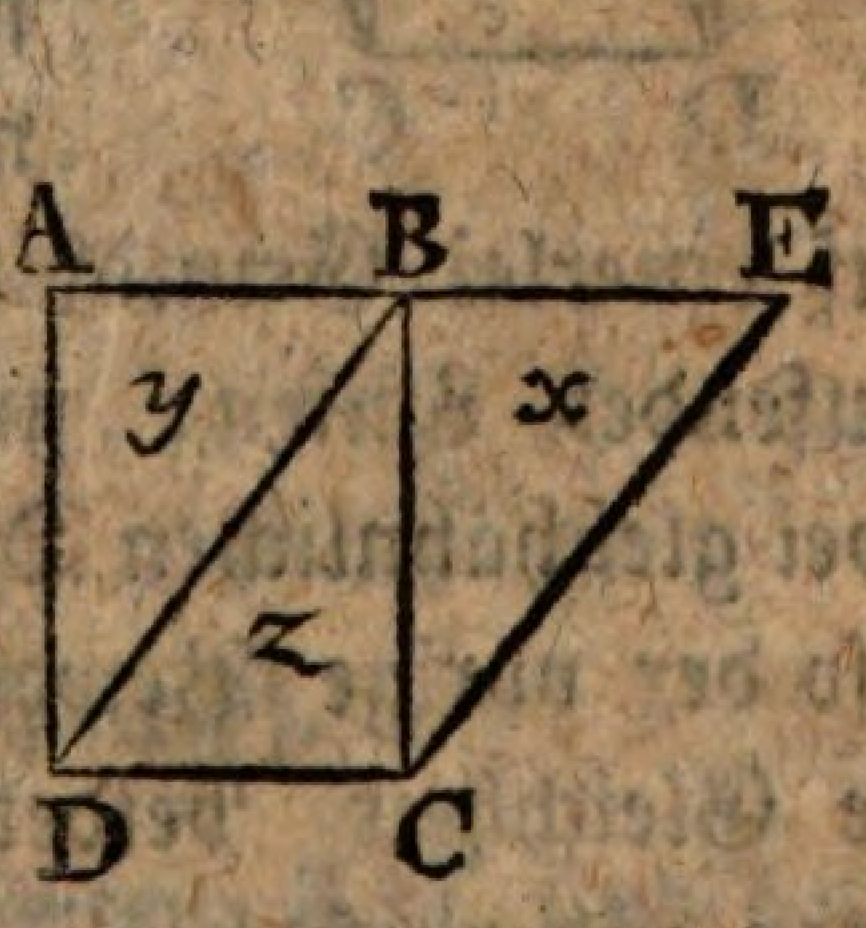
S. Allerdings. Denn eine Linie DI, welche die Höhe der Figur misst, die misst auch den Abstand der Parallelen von einander. Da nun dieser Abstand immer derselbe bleibt (§ 97), und die Höhen DI, AK, FL auch alle gleich sind; so müssen sie, wenn eine in den ZwischenRaum passt, alle drin passen.

L. Wir können also die Ausdrükke zwischen einerlei gleichlaufenden Linien stehn und gleiche Höhe haben, künftig als gleichbedeutend annehmen.

Der zwölfte Saz.

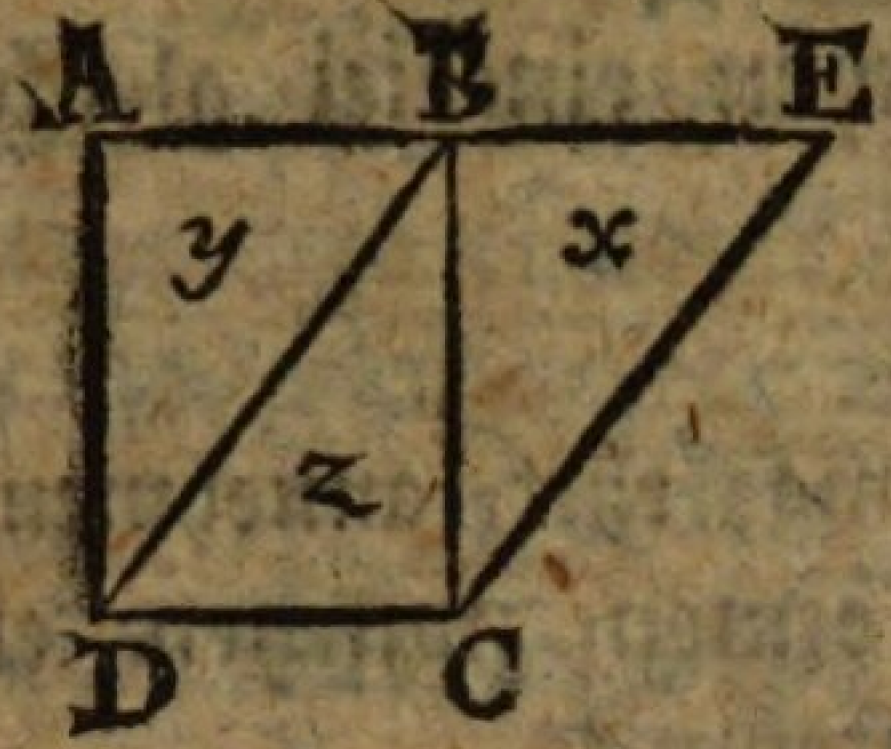
§ 140.

L. Es wird ein willkührliches Parallelogramm ABCD gezeichnet: hierauf eine EkkLinie DB gezogen, AB unbestimmt, über B hinaus, verlängert, und mit DB eine Linie CE gleichlaufend gezogen.



So haben wir zwei Parallelogramme ABCD und BECD (§ 129). Was ist von diesen bekant?

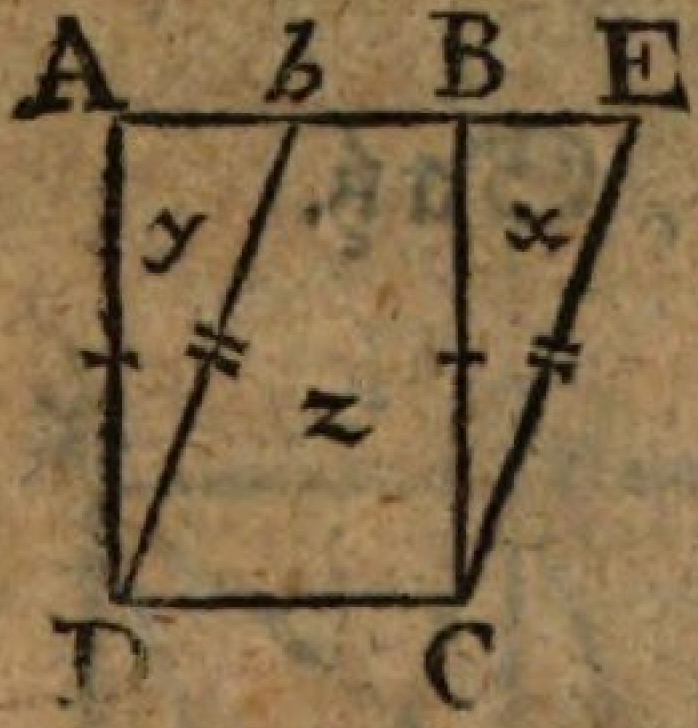
S.



S. Sie stehn auf einerlei GrundLinie DC, und zwischen einerlei gleichlaufenden Linien DC und AE: und sind jedes aus zwei DreiEkken y und z, x und z zusammengesetzt.

L. Recht! Und da das DreiEkk z beiden gemein ist, so bleiben, um über die Grösse beider Parallelogramme zu entscheiden, nur die DreiEkke y und x zu vergleichen übrig. Und dieses ist hier gar leicht, wir dürfen uns nur an § 133 erinnern.

S. y = z = x § 133)
y = x § 31)
y + z = x + z (§ 36)
▱ ABCD = ▱ BECD



L. Das Parallelogramm ABCD bleibt wie vorhin die Ekke b des zweiten aber fält jezt nicht auf B, sondern zwischen A und B. — Da sind wieder zwei Parallelogramme auf einerlei GrundLinie und zwischen einerlei gleichlaufenden Linien: nur es besteht nicht jedes aus zwei gleichähnlichen DreiEkkenn wie vorhin. Es passt also der vorige Beweis nicht, und wir müssen, um die Gleichheit beider Parallelogramme darzutuhn, einen andern suchen. — Welchem Parallelogramme gehört das Trapezium z?

S. Beiden. Es ist also nur die Gleichheit der DreiEkke y und x zu beweisen.

L. Richtig! Aber wie geschieht das?

S. Die GegenSeiten jedes Parallelogramms sind einander gleich: also

AD = BC
~~bB~~ bD = EC } (§ 130)

L. Die Gleichheit zweier Dinge ist erwiesen, es fehlt noch das dritte. Wird das ein Winkel oder eine Seite seyn?

S. Es wird wol eine Seite seyn.

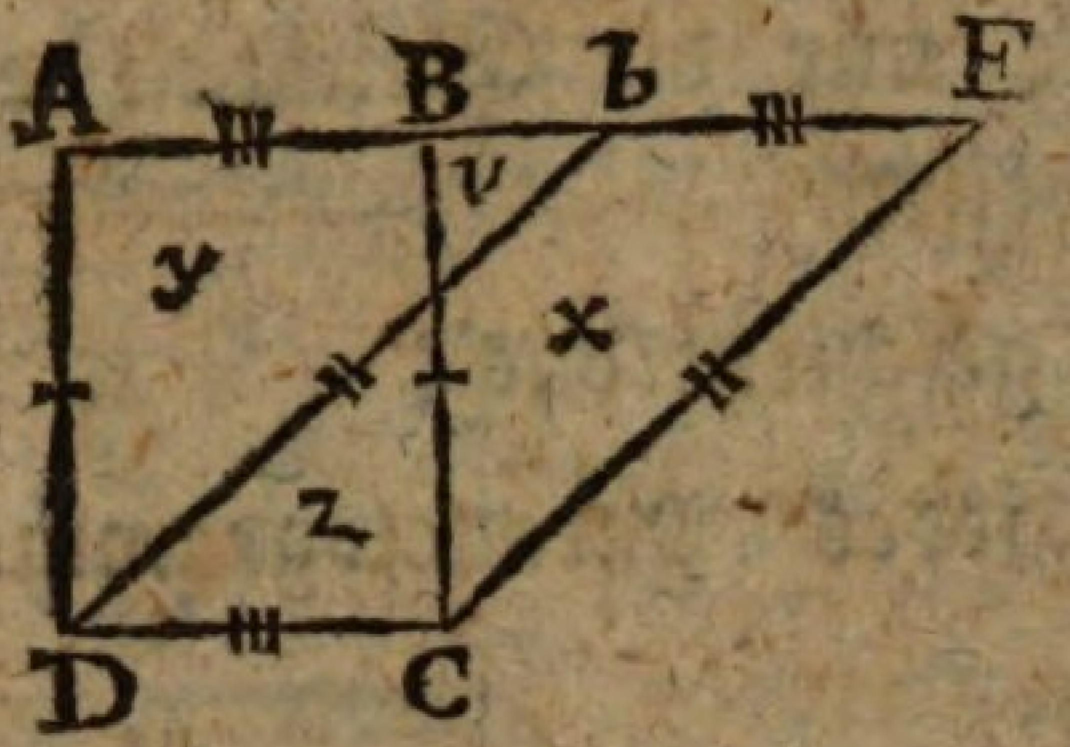
L. Es ist richtig. Die Gleichheit von Ab und BE ist zu erweisen.

S. AB = DC = bE (§ 130)
AB = bE (§ 31)
oder Ab + bB = bB + BE (§ 45)
Ab = BE (§ 37).

Nun haben wir

AD = BC
bD = CE
Ab = BE
△y = △x (§ 63)
y + z = x + z (§ 36)
oder ▱ABCD = ▱bECD (§. 45).

L. Also auch in diesem zweiten Fall sind beide Parallelogrammen einander gleich. Es ist aber noch ein dritter möglich. Das erste Parallelo-



gramm ABCD, und die GrundLinie des zweiten bleibt, aber die Ekke b, so wie die ganze Seite bE des zweiten fält auf die Verlängerung von AB. Jedes der beiden Parallelogramm besteht jezt wieder aus zwei Stükken, von denen eins, das DreiEkk z, beiden gemein ist. Wir haben also bloß die VierEkke y und x gegen einander zu vergleichen. Wie wird das aber am füglichsten geschehen?

S. Wenn man jedem VierEkk das zwischen beiden liegende DreiEkk v zusezt; so erhält man zwei DreiEkke y + v und x + v, die man gegen einander halten kan. Nimt man ihnen darauf das gemeinschaftliche v wieder ab, so bleibt y und x übrig?

L. Das ist der rechte Weg, den wollen wir denn gehn. — Welches MerkMal der GleichAehnlichkeit werden wir an den DreiEkken aufzusuchen haben?

S. Das von drei Par gleiche Seiten.

L. Wir wollen also von den Seiten Ab und BE anfangen. Sind diese einander gleich?

S. 1) AB = DC = bE (§ 130)

AB = bE (§ 31)

AB + Bb = bE + Bb (§ 36)

Ab = BE (§ 45)

2) $Ab = BE$ (Bew.)

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ bD = EC \end{array}\right\} (\S\ 130)$$

$$\triangle ADb \cong \triangle BCE \ (\S\ 63)$$

$$\triangle y+v \cong \triangle x+v \ (\S\ 45)$$

$$y = x \ (\S\ 37)$$

$$y + z = x + z \ (\S\ 36).$$

L. Gibt es noch mehr Stellungen für zwei Parallelogrammen auf einer Grundlinie, und zwischen einerlei gleichlaufenden Linien, als diese dreie?

S. Ich weis keine mehr.

L. Ich auch nicht. Alle drei Fälle also zusammen gefaßt, was lehren die?

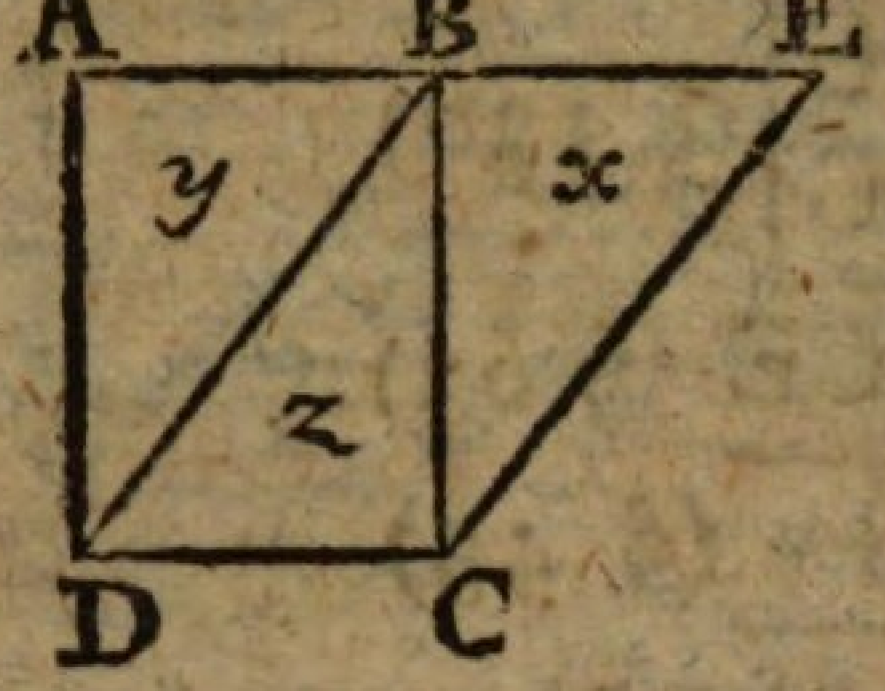
S. Parallelogrammen auf einerlei Grundlinie, und zwischen einerlei gleichlaufenden Linien, sind einander gleich.

L. Läßt sich dieser Satz nicht auch anders ausdrükken?

S. Ja. Parallelogrammen auf einerlei Grundlinie, und von einerlei Höhe, (§ 139), sind einander gleich.

§ 141.

L. Gleiches zu Gleichen hinzugetahn gibt Gleiches (§ 36): aber gibt Aehnliches zu Aehnlichen hinzugetahn auch Aehnliches?



S. Nicht immer. Bei der ersten Zeichnung des vorigen Paragraphs, z. B. sind die DreiEkke y und x nicht nur ähnlich, sondern auch gleich, und bilden dennoch, mit z vereinigt, zwei einander sehr unähnliche Parallelogramme ABCD und BECD.

L. Aehnliches also zu Aehnlichem hinzugetahn gibt nicht immer Aehnliches. Woher kömt das?

S. Bei der Aehnlichkeit kömt es nicht allein auf Gleichheit und Aehnlichkeit der Teile, sondern auch auf die Lage und ZusammenSezung derselben an (§ 24). So können in der erwähnten Zeichnung, die DreiEkke y und x nicht ähnliche Parallelogrammen bilden, weil sie auf verschiedenen Seiten von z liegen.

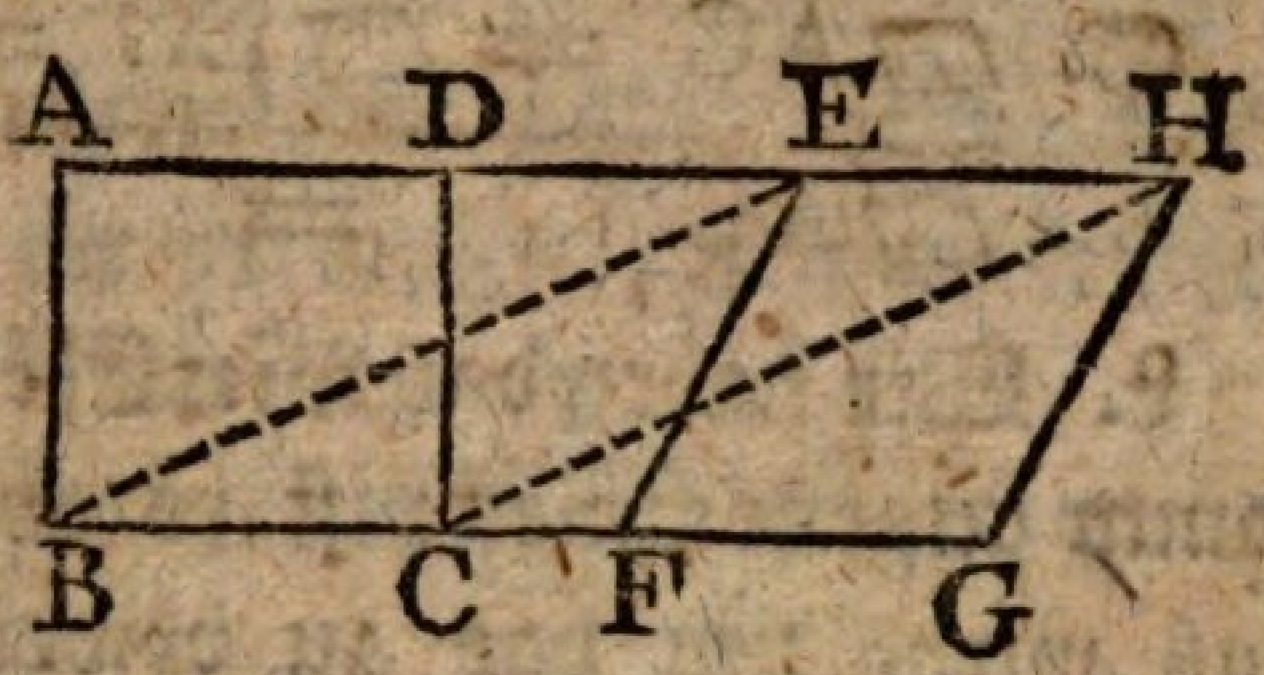
L. Man muß daher, wan bloß von Gleichheit der Figuren die Rede ist, ja nicht Aehnlichkeit mit darunter verstehn: denn bei Verwandlung der Figuren kömt es bloß auf Gleichheit, aber nicht auf Aehnlichkeit, an.

Der dreizehnte Saz.

§ 142.

L. Vorhin standen zwei Parallelogrammen auf einer GrundLinie; jezt wollen wir sie auf verschiedene, jedoch gleiche GrundLinien stellen. Es wer-

werden, zu dem Ende, zwei gleichlaufende Linien AH und BG gezogen (§ 103), und zwischen dieselben zwei Parallelogramme ABCD und EFGH, auf gleichen GrundLinien BC und FG, übrigens aber willkührlich, gezeichnet. — Die Frage ist: Sind alle diese Parallelogramme gleich groß, oder nicht?



S. Da die GrundLinien gleich sind, so dekken sie einander (§ 26). Man kan sie sich also auf einander gelegt vorstellen, und dan ist es, als ob die Parallelogrammen einerlei GrundLinie hätten (§ 140).

L. Euklides braucht die DekkungsBeweise nur da wo keine andre vorhanden sind. Es scheint als ob sie nicht so einleuchtend und überzeugend wären. — Es werden zwei HülfsLinien, BE und CH, gezogen. So entsteht ein VierEkk BEHC, welches mit den beiden Parallelogrammen die GrundLinien BC und EH gemein hat, und mit ihnen zwischen einerlei gleichlaufenden, Linien steht. Wäre dieses VierEkk nun ein Parallelogramm, wie würde es sich, zu den beiden andern Parallelogrammen, ABCD und EFGH, in Ansehung der Grösse verhalten?

S. Es würde jedem derselben gleich seyn. (§ 140)

L. Und was würde für die beiden Parallelogrammen daraus folgen?

S. ▱AC = ▱EC = ▱EG

▱AC = ▱EG § 31).

L. Wir haben das VierEkk EC für ein Parallelogramm angenommen: ist es aber auch wirklich eins? Was wird, um das zu beweisen, zuerst erfordert?

S. Der Beweis daß BC und EH gleich, und gleichlaufend seien. Das Lezte sind sie nach der VorausSezung: das Erste lässt sich so beweisen:

EH = FG (§ 130) = BC VS.)

EH = BC

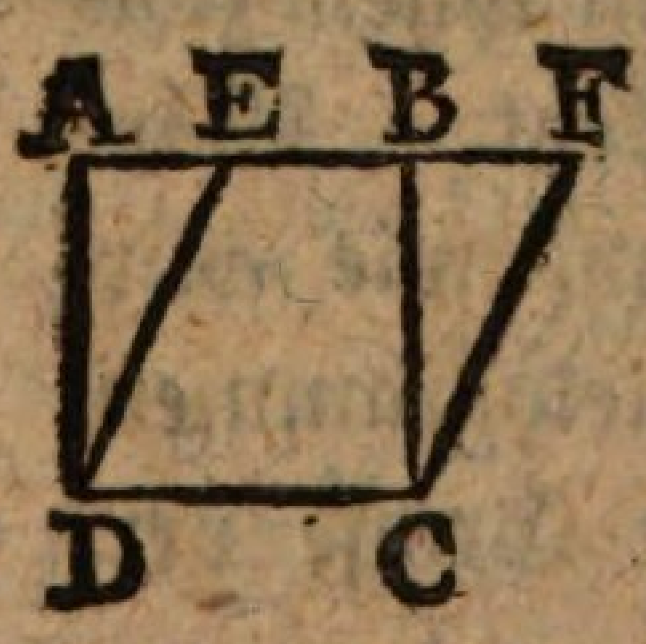
Aber auch EH ‡ BC (VS.)

BEHC ein Parallelogramm (132).

L. Nun ist der Beweis vollständig: Parallelogrammen von gleichen GrundLinien und gleichen Höhen sind einander gleich.

Der vierzehnte Saz.

§ 143.



L. Es wird ein Parallelogramm ABCD, (es kan ein rechtwinkliges seyn), gegeben; lässt sich wol ein anderes ihm gleiches, aber nicht ähnliches, danach verfertigen?

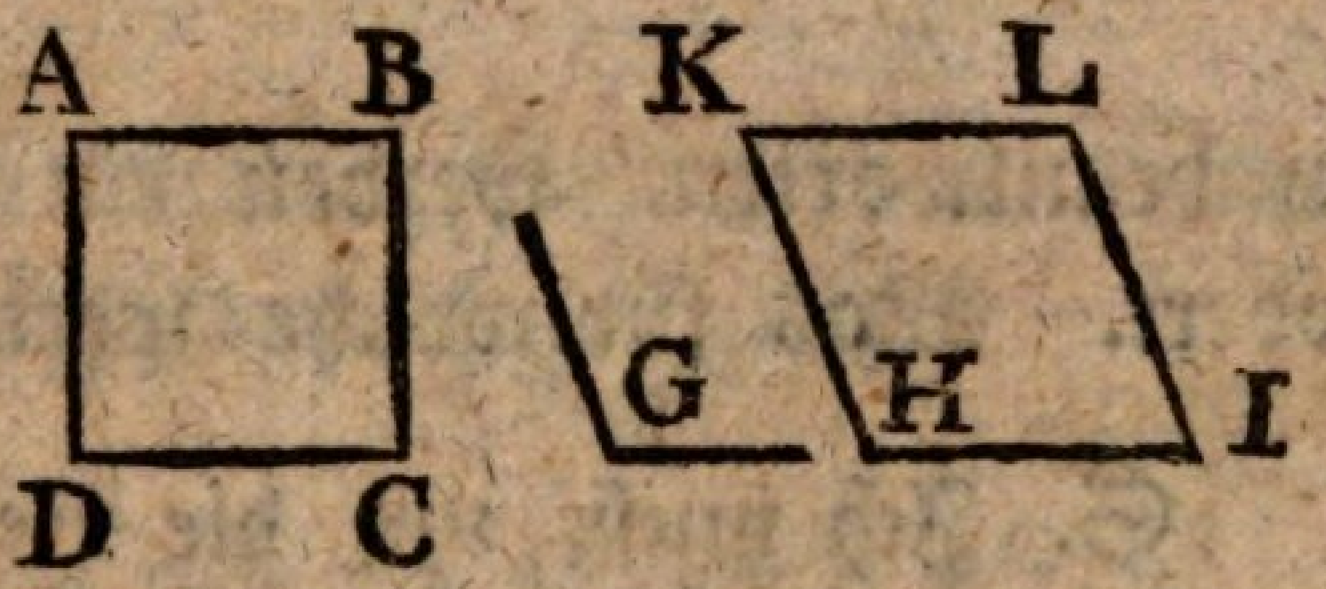
S. Auf einerlei GrundLinie mit ihm? Oder auf einer andern?

L. Zuerst auf eben der GrundLinie.

S. Da muß ich eine Seite AB verlängern, und von den EndPunkten der andern DC gleichlaufende Linien bis an die verlängerte Parallele ziehn; so erhalte ich:

▱DEFC = ▱ABDC (§ 140).

L. Nun auch auf verschiedenen GrundLinien, und zwar nach einem gegebenen Winkel G.



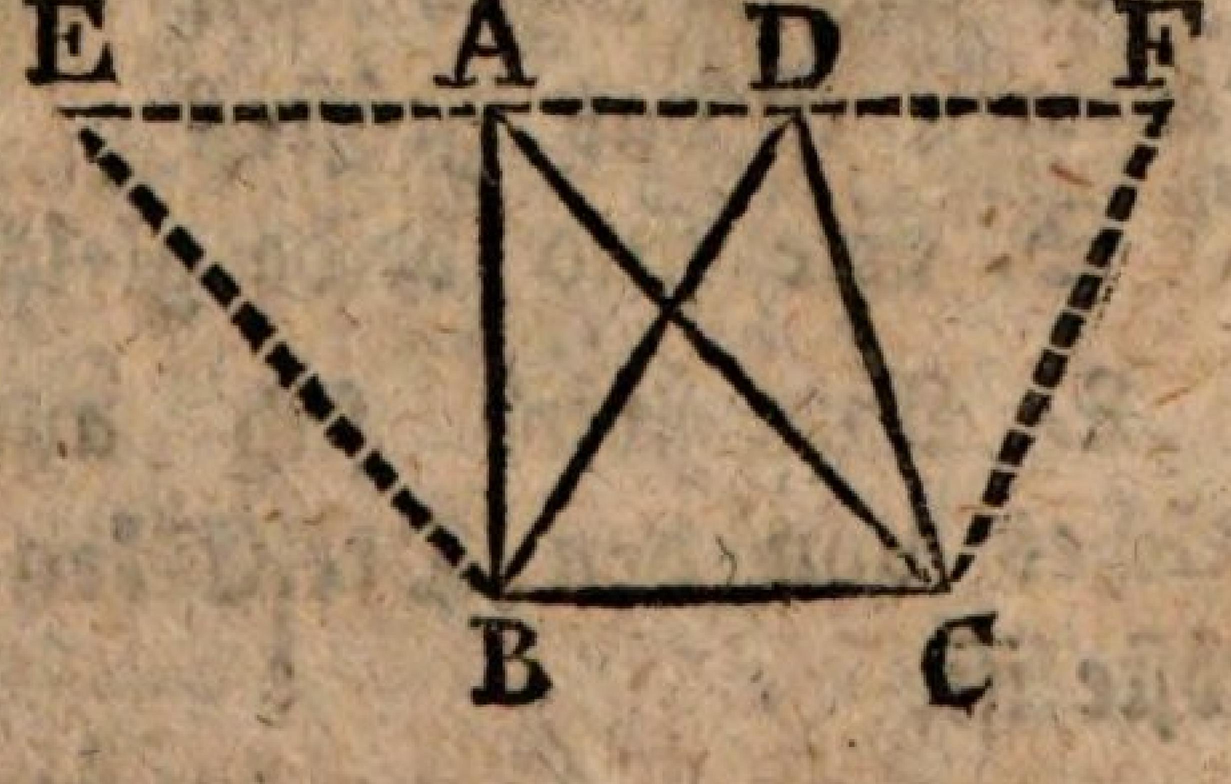
Dan trage ich die GrundLinie DC weiter nach HI, und mache bei H einen Winkel KHI gleich dem gegebenen G (§ 91), und vollende nun das Parallelogramm HILK = ABCD (§ 141).

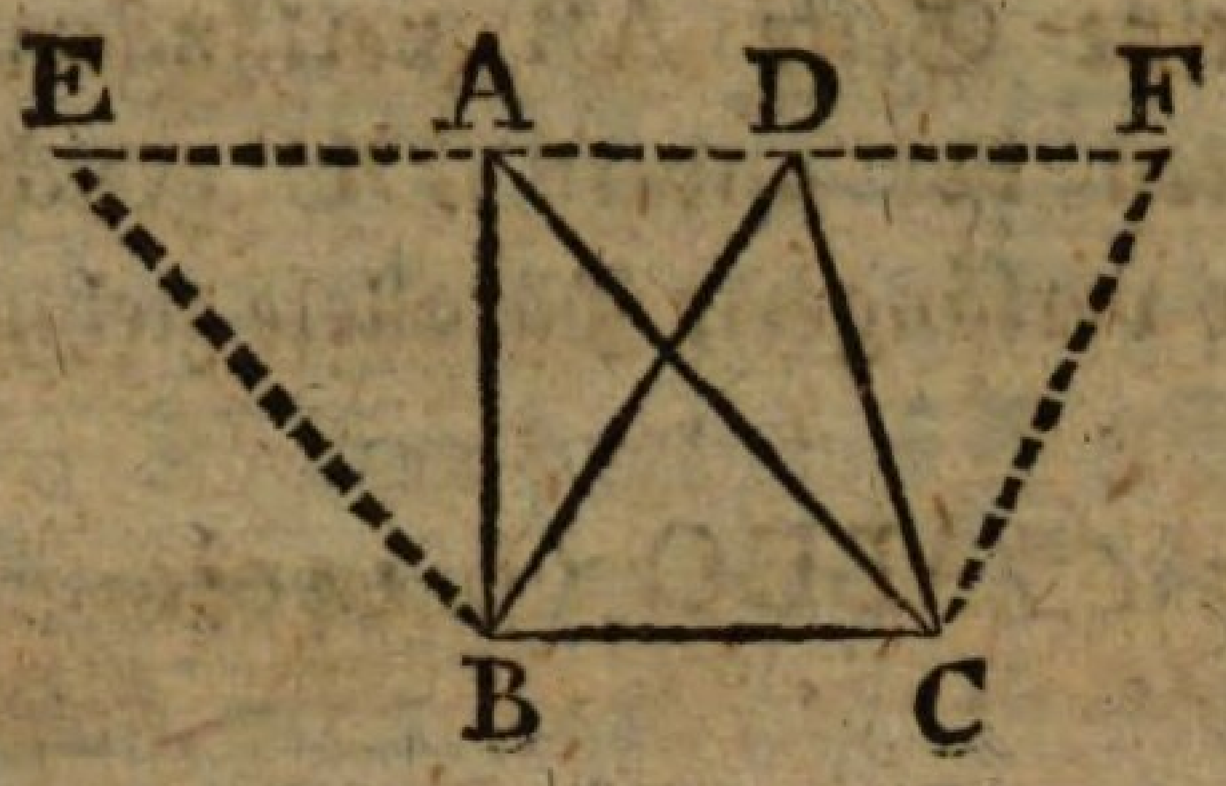
L. Es lässt sich also ein gegebenes Parallelogramm in ein andres verwandeln, das einen gegebenen Winkel hält.

Der funfzehnte Satz.

§ 144.

L. Es werden zwei gleichlaufende Linien nach Willkühr gezogen, und zwischen dieselben werden, auf gemeinschaftlicher GrundLinie BC,





zwei beliebige Drei=Ekke ABC und DBC von gleicher Höhe, (§ 139) gezeichnet. Sind diese DreiEkke gleich, oder ungleich? — Um diese Frage zu beantworten, werden ein Par HülfsLinien erfodert. Was für welche werden das seyn?

S. Ich muß, um die Vergleichung anzustellen, aus den DreiEkken Parallelogrammen machen, und zu dem Behuf, mit den Seiten CA und BD, aus B und C gleichlaufende Linien BE, CF ziehn.

L. Ganz recht! Aber entstehn auf solche Art auch Parallelogrammen?

S. O ja	EA # BC	(VS.)
und	DF # BC	
Und	BE # CA	(Verfert.)
	CF # BD	
	ABCD ▱	(§ 129).
und	DBCF ▱	

L. Und welches von diesen beiden Parallelogrammen ist das gröste?

S. Sie sind beide gleich groß (§ 140)

L. Nun wird sich auch beantworten lassen, welches von den DreiEkken ABC und DBC das gröste ist.

S. ▱CE = ▱BF (§ 140)

△ABC = ½ CE ⎫
△DBC = ½ BF ⎬ (§ 133)

△ABC = △DBC (§ 43).

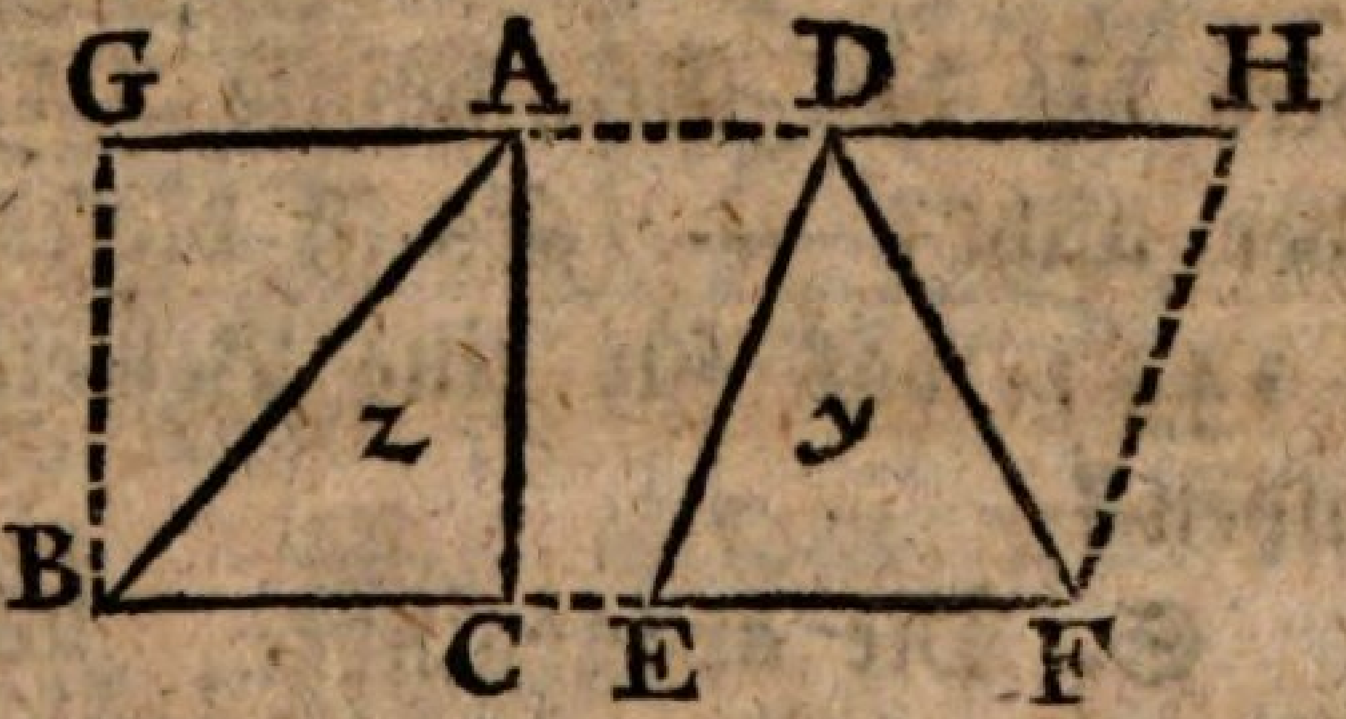
L. Was für einen LehrSatz haben wir nun gefunden?

S. DreiEkke auf einerlei GrundLinie, und von gleicher Höhe, sind einander gleich.

Der sechszehnte Satz.

§ 145.

L. Es werden wiederum ein Par gleichlaufende Linien gezogen, und zwischen dieselben zwei DreiEkke, ABC und DEF nicht auf einerlei, sondern auf gleichen GrundLinien BC und EF gezeichnet. — Sind diese DreiEkke, die wir z und y nennen wollen, einander gleich oder nicht?



S. Ich ziehe wieder mit CA und ED gleichlaufende Linien BG und FH; so entstehn zwei Parallelogrammen CG und EH (§ 129). Nun ist

▱CG = ▱EH (142)

z = ½ CG ⎫
y = ½ EH ⎬ (§ 133).

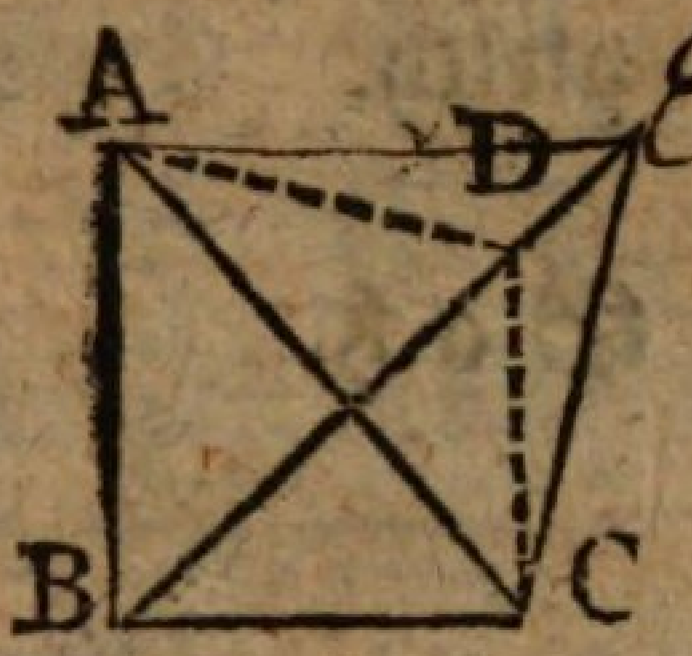
z = y (§ 43)

L. Also = = ?

S. DreiEkke auf gleichen Grundlinien, und von gleicher Höhe, sind einander gleich.

Der siebenzehnte Satz.

§ 146.



L. Zwei DreiEkke ABC und DBC, sind gleich groß, haben einerlei GrundLinie BC, und liegen nach einerlei Seite von BC. Wenn man nun durch ihre Spitzen A und D eine gerade Linie AD zieht, wird die der GründLinie BC gleichlaufend seyn, oder nicht? — Es ist dieses der GegenSatz von § 144: was für eine BeweisArt wird also Stat finden?

S. Die apagogische. Wir nehmen also an AD sei nicht gleichlaufend mit BC, und ziehn durch A eine andre Linie, welche BD schneidet in E, und untersuchen ob diese mit BC gleichlaufend seyn könne.

L. So weit recht! Aber wie nun weiter?

S. Ich werde eine HülfsLinie EC ziehn.

L. Gut!

S. Ist nun AE $\#$ BC

so ist $\triangle EBC = \triangle ABC$ (§ 144) $= \triangle DBC$
(VS)

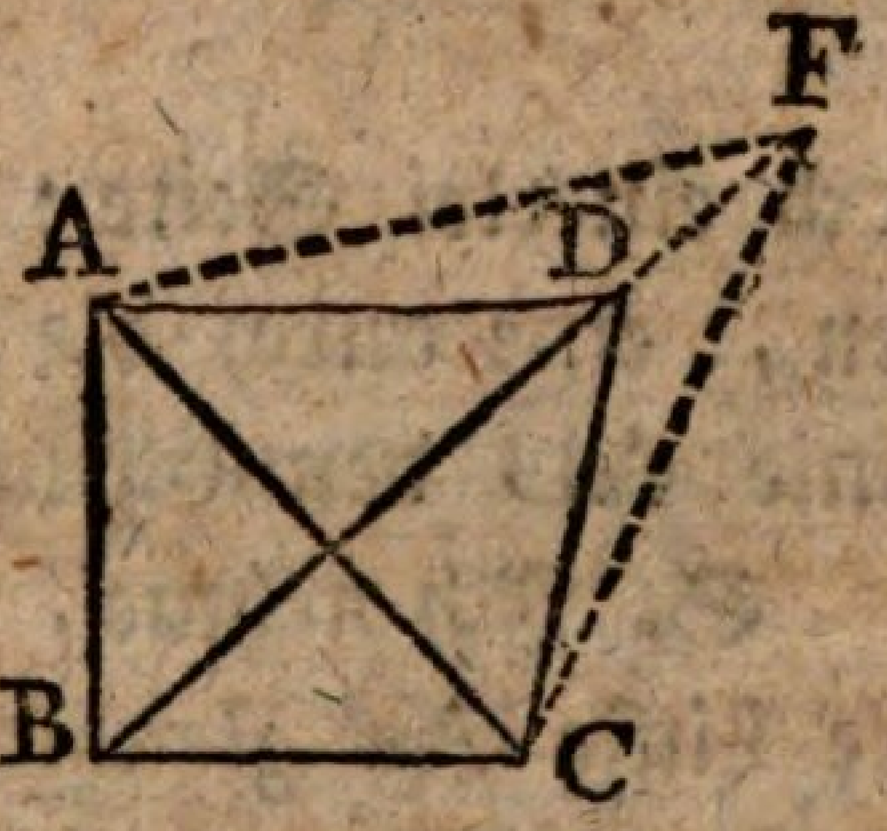
folglich $\triangle EBC = \triangle DBC$ §31)

welches ungereimt ist (§ 45).

L.

L. Eine Linie also welche, wie AE, die Linie BD schneidet, kan nicht gleichlaufend mit BC seyn. Wie aber, wenn man durch die Verlängerung von BD eine Linie AF zöge, solte die nicht mit BC gleichlaufend seyn können?

S. Wir müssen eine Linie CF ziehn.
Ist nun AF # BC
so ist △FBC = △ABC = △DBC
folglich △FBC = △DBC.
Da ist nun die vorige Ungereimtheit.



L. Also eine der GrundLinie BC gleichlaufende Linie, welche durch eine DreiEkksSpitze A geht, kan der andern nicht ausweichen, weder ober- noch unterwärts. Wie werden wir diese Wahrheit als LehrSatz umkleiden?

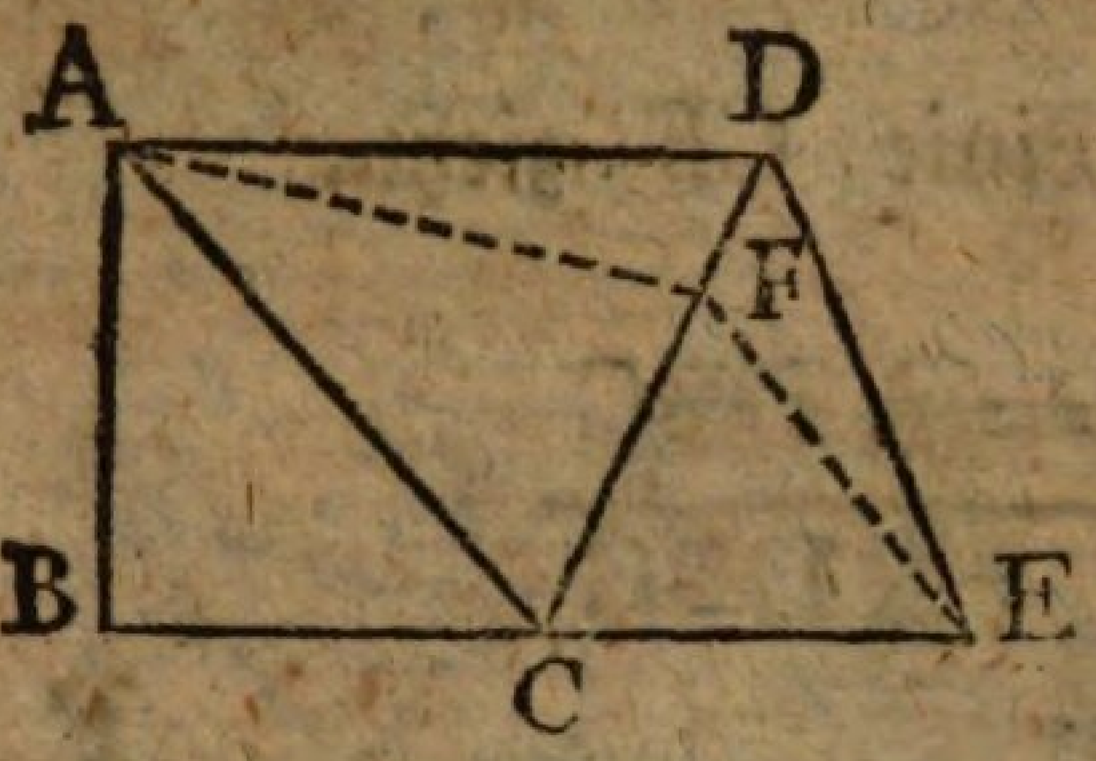
S. Gleiche DreiEkke, welche einerlei Grundlinien haben, und nach einerlei Seite liegen, sind zwischen einerlei gleichlaufenden Linien.

L. Und haben noch überdies einerlei Höhe (§ 139).

Der

Der achtzehnte Satz.

§ 147.

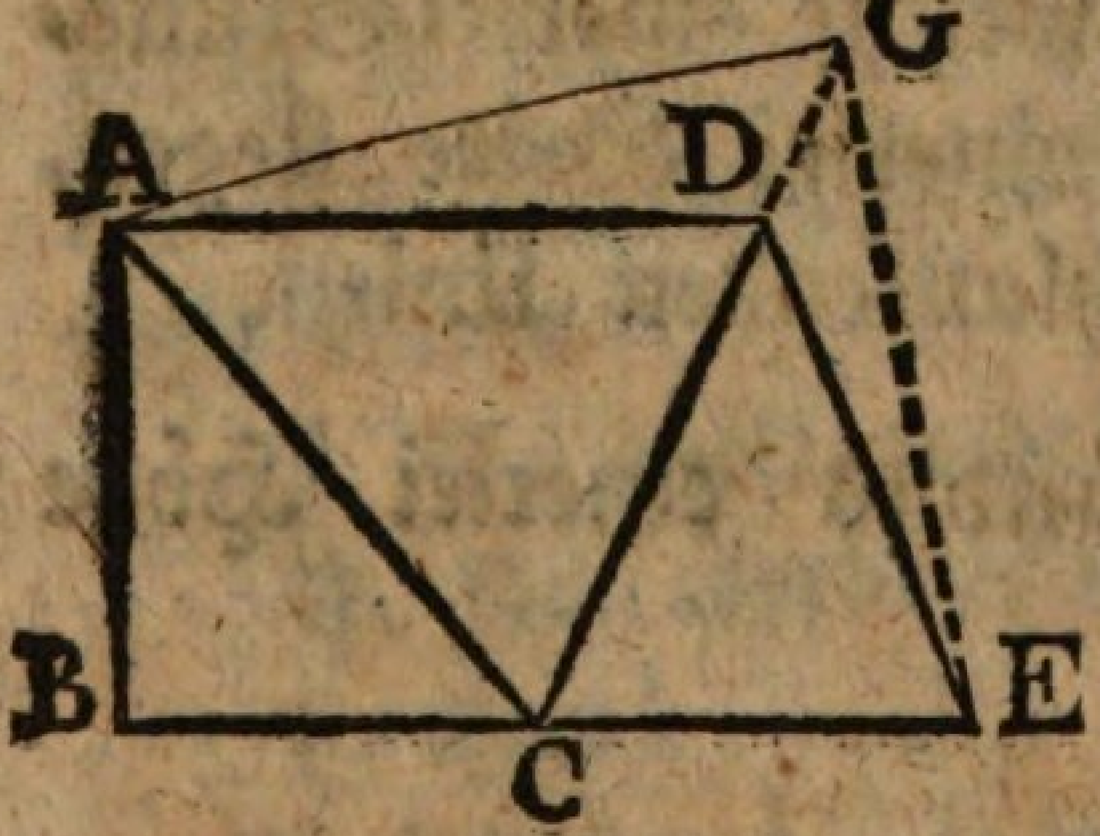


L. Zwei DreiEkke ABC und DCE sind gleich groß, und haben gleiche, in gerader Richtung liegende GrundLinien BC und CE, und beide DreiEkke liegen nach einerlei Seite: wird unter diesen Bedingungen, eine durch die Spitzen A und D gezogene Linie AD den GrundLinien gleichlaufend seyn?

S. Ich nehme, wie vorhin (§ 146) eine andre Linie AF gleichlaufend BE an, und ziehe FE: so ist △FCE = △ABC (§ 145) = △DCE (VS.)

△FCE = △DCE (§ 31)

welches unmöglich ist (§ 45).



L. AF also ist nicht gleichlaufend BE. Aber könte es eine andre, die Verlängerung von CD schneidende, Linie AG nicht seyn?

S. Ich ziehe GE; so ist

△GCE = △ABC = △DCE

△GCE = △DCE;

welches eben so unmöglich ist.

L.

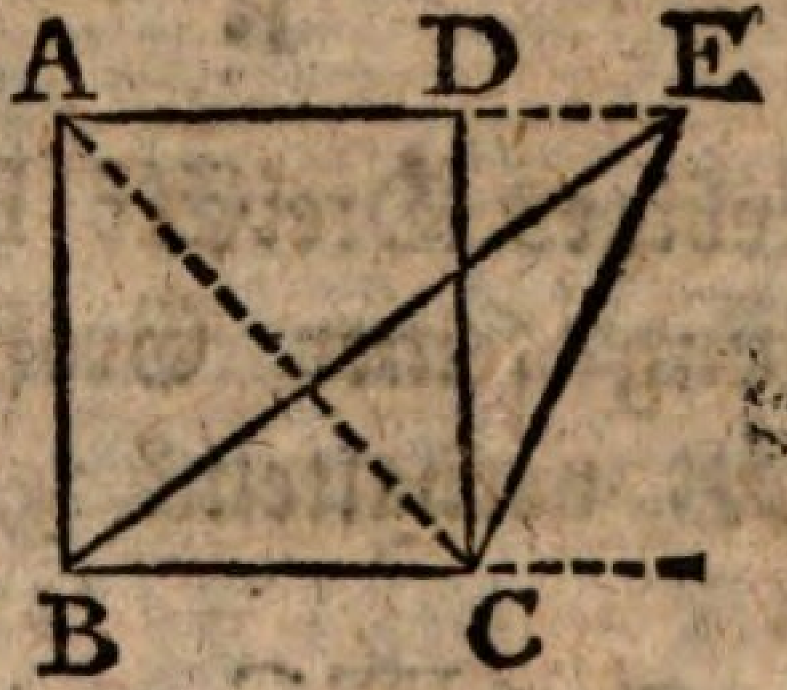
L. Wenn also gleiche DreiEkke gleiche in gerader Richtung liegende, GrundLinien haben, und nach einer Seite derselben liegen; so sind sie zwischen einerlei gleichlaufenden Linien.

L. Und welche Eigenschaft haben sie noch ausserdem?

S. Sie haben auch einerlei Höhe (§ 139).

Der neunzehente Saz.

§ 148.



L. Es werden zwei gleichlaufende Linien gezogen, und zwischen dieselben werden, auf einerlei GrundLinie, übrigens nach Willkühr, ein Parallelogramm ABCD, und ein DreiEkk EBC, gezeichnet. — Wenn man nun das Parallelogramm durch eine EkkLinie, AC in DreiEkke zerschneidet, wie verhält sich eins derselben, ABC, zum Parallelogramm BD?

S. Es ist die Hälfte vom ihm (§ 133).

L. Und zum DreiEkke EBC?

S. $\triangle ABC = \triangle EBC$ (§ 144).

L. Aber wie das DreiEkk EBC zum Parallelogramm BD?

S. $\triangle ABC = \frac{1}{2} \square BD$

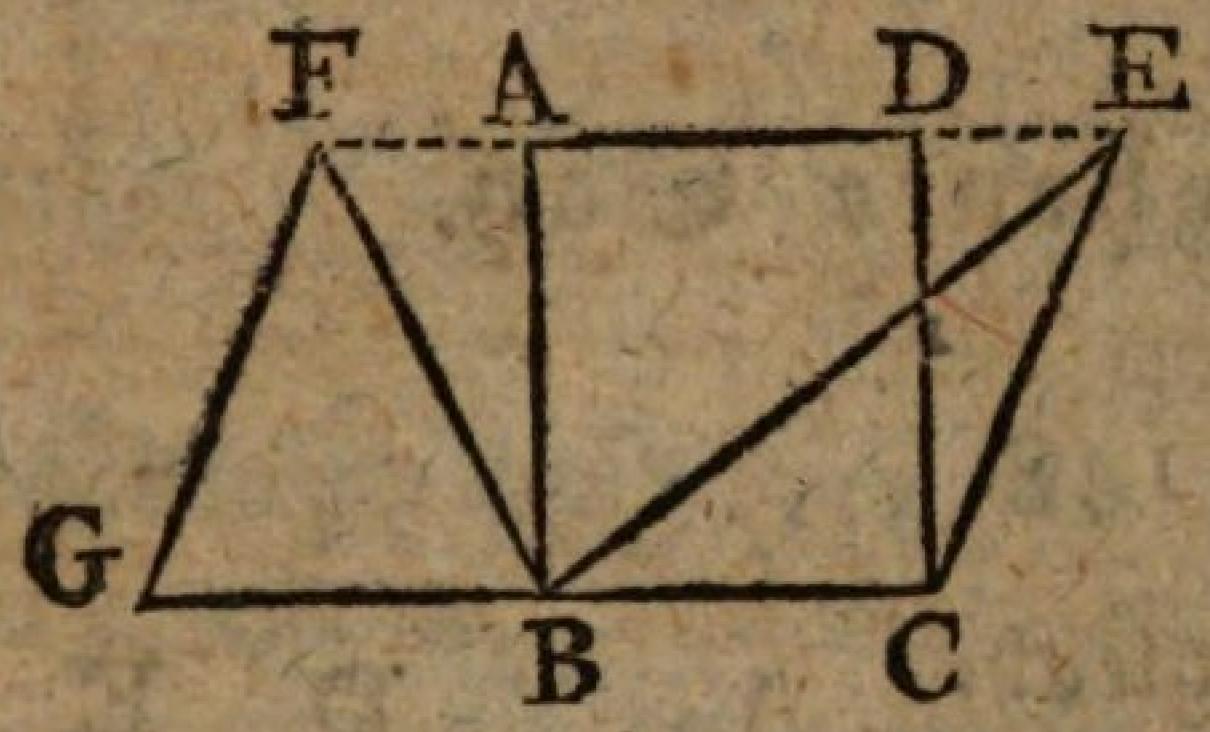
$\triangle EBC = \frac{1}{2} \square BD$ (§ ~~43~~ 27).

L.

L. Ein DreiEkk also, welches mit einem Parallelogramm einerlei Grunddlinie, und einerlei Höhe hat..?

S. Ist die Hälfte von ihm.

§ 149.



L. Wir nehmen in der vorigen Zeichnung BG gleich BC, und beschreiben über BG, und zwischen den vorigen Parallelen, ein beliebiges DreiEkk FBG. Wie wird dieses in Ansehung seiner Grösse sich zu dem Parallelogramm DB verhalten?

S. $\triangle$FBG = $\triangle$EBC (§144) = $\frac{1}{2}$ ▱DB (§144)

$\triangle$FBG = $\frac{1}{2}$ ▱DB (§31).

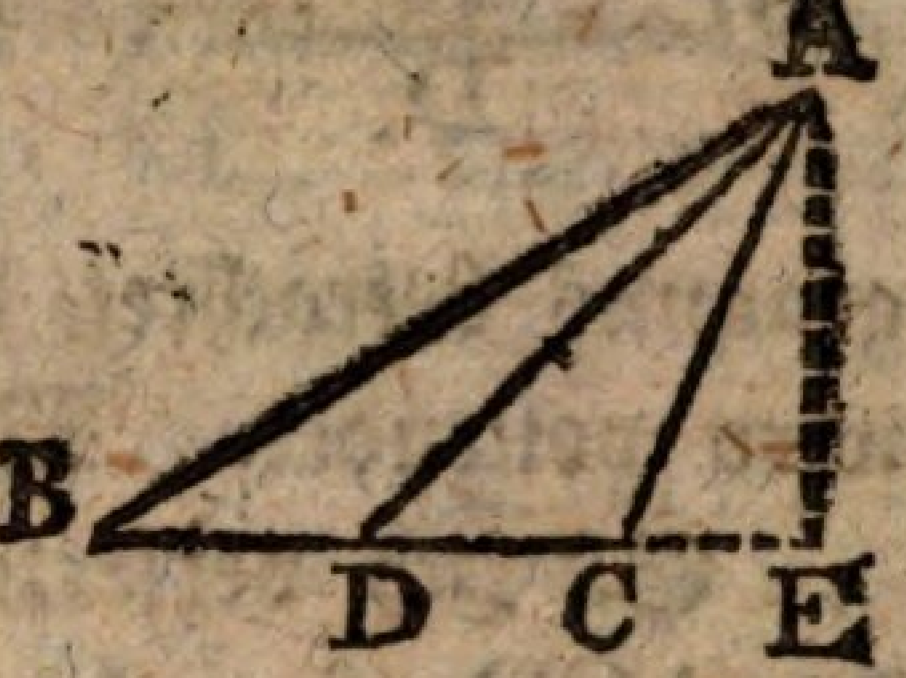
L. Das heisst?

S. Wenn ein DreiEkk und ein Parallelogramm gleiche Grunddlinien und gleiche Höhe haben; so ist das DreiEkk halb so groß als das Parallelogramm.

Der

Der zwanzigste Saz.

§ 150.



L. Es wird gegeben ein beliebiges DreiEkk ABC, und verlangt es zu halben, das heisst, in zwei gleiche Teile zu teilen. Wie wird das bewerkstelligt?

S. Ich muß die GrundLinie halben, (§ 66) in D, und dan die Linie AD ziehn.

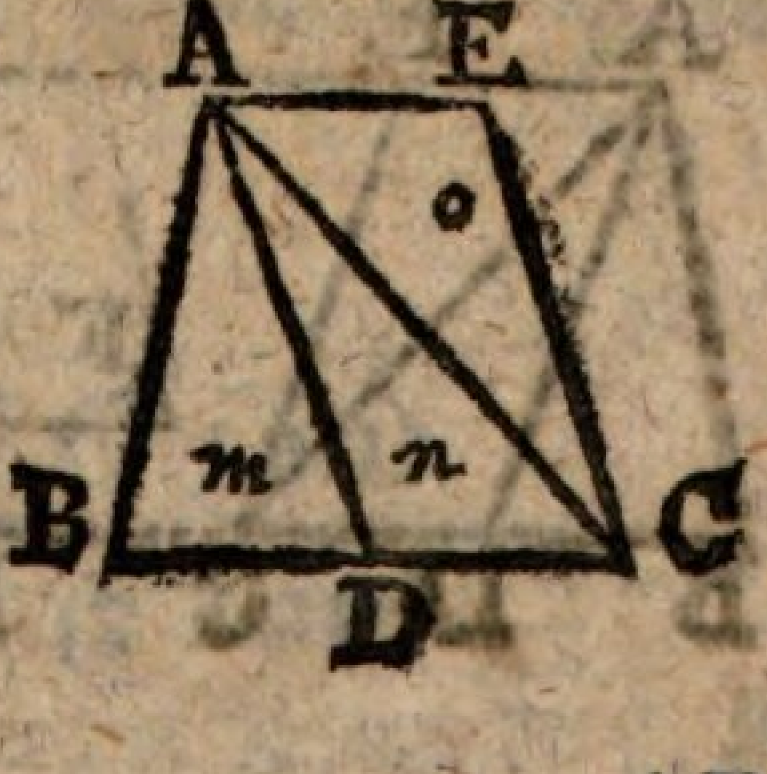
L. Halbt diese aber auch wirklich das DreiEkk ABC? Das muß bewiesen werden.

S. DB = DC (Verf.) und eine von der Spitze A auf die GrundLinie BC gefällte senkrechte Linie AE bezeichnet die Höhe beider DreiEkke ADB und ADC (§ 138). Beide also sind einander gleich (§ 145).

L. Recht! Wir wissen also ein gegebenes DreiEkk zu halben.

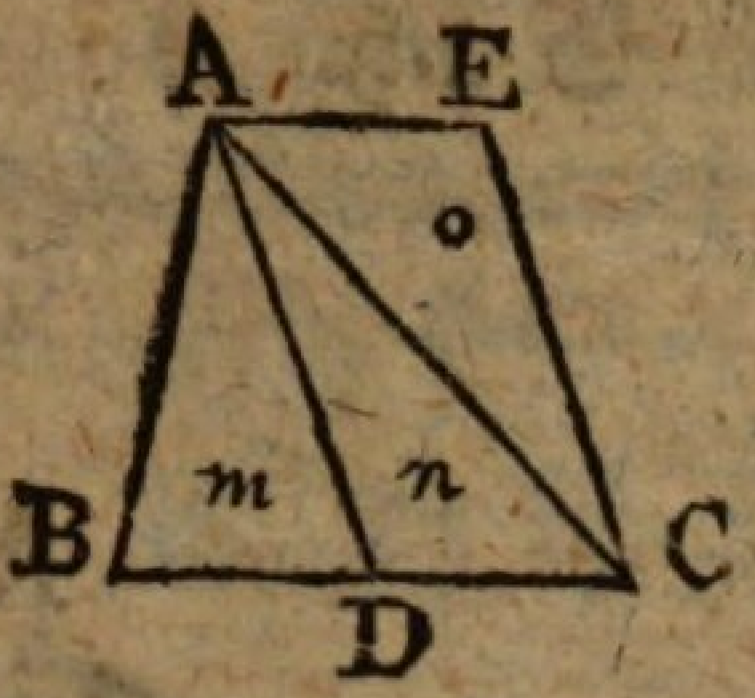
Der ein und zwanzigste Saz.

§ 151.



L. Es wird wieder ein willkührliches DreiEkk ABC gezeichnet. Wie wird das wol am füglichsten in ein Parallelogramm von gleicher Grösse verwandelt? — Das DreiEkk

ABC



ABC wird gehalbt durch eine Linie AD (§ 149). Nun werden die Linien DA, DC, und der von ihnen beschlossene Winkel ADC, als der Anfang eines zu verfertigenden Parallelogramms betrachtet, und das Parallelogramm ADCE wird vollendet. Wie geschieht das?

S. Ich verfertige auf AC ein DreiEkk ACE ≌ ACD (§ 136).

L. Wir wollen die DreiEkke ADB, ADC, ACE, mit kleinen Buchstaben m, n, o innerhalb bezeichnen. — Wie verhalten sich nun die DreiEkke m, n, o in Ansehung ihrer Grösse, zu einander?

S. m = n (Verf.)
n = o (§ 133)

m = o (§ 31)

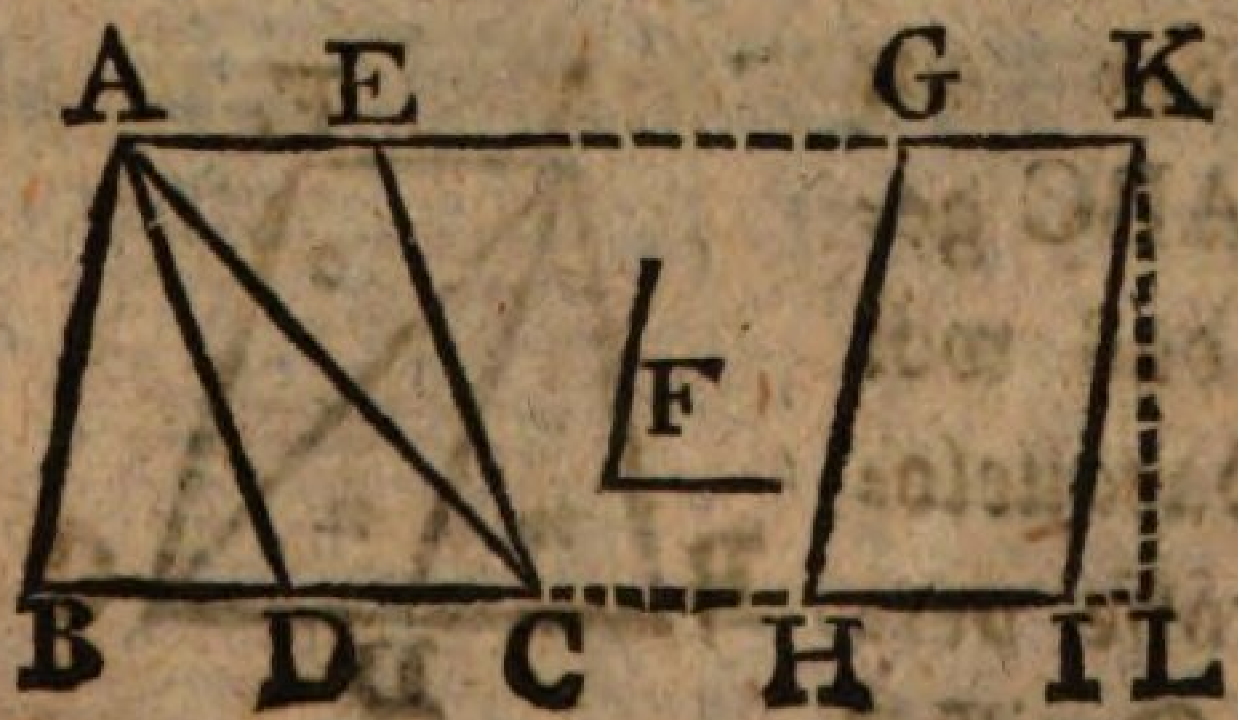
L. Und wie das Parallelogramm ADCE zum DreiEkk ABC ?

S. m = o (Bew.)

n+m = n+o (§ 36)

Oder △ABC = ▱ABCD

L. Das hieß ein gegebenes DreiEkk in ein willkührliches Parallelogramm verwandeln: gesetzt aber es wäre ein Winkel F gegeben, den es haben sollte?



S. Dan muß ich das Parallelogramm DE wieder in ein an=

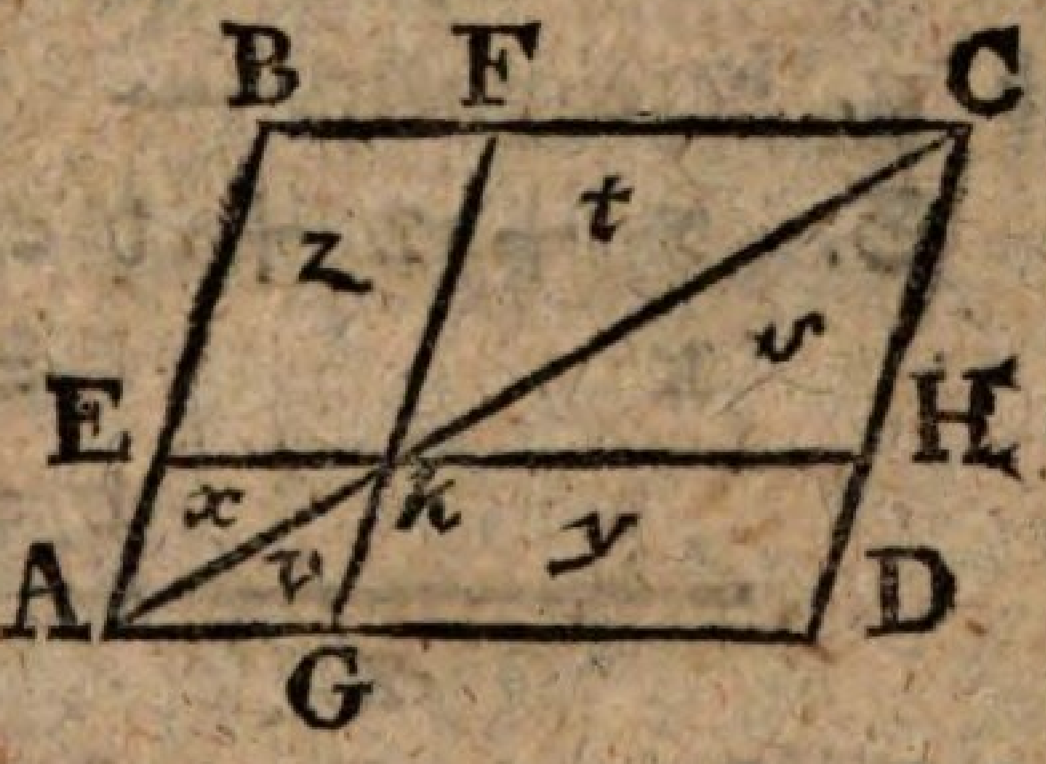
andres G verwandeln, was den gegebenen Winkel hält (§ 143).

L. Es ist auch klar daß das Parallelogramm GI sich ohne vorhergegangene Zeichnung des Parallelogramms DE, bloß aus der Grundlinie HI = DC, dem Winkel F, und der Höhe KL, verfertigen läſſt.

Der zwei und zwanzigste Satz.

§ 152.

L. Es wird ein willkührliches Parallelogramm ABCD gezeichnet (§ 129, 135). In demselben wird eine Ecklinie AC gezogen. Auf derselben wird ein Punkt k, nach Belieben angenommen, und durch diesen werden mit AB und AD gleichlaufende Linien, GkF und EkH, gezogen (§ 103). — Welche Stellung hat nun GF gegen DC? Ist sie auch mit ihr gleichlaufend?



S. Ja. Denn DC # AB (§ 129) # GF (VS.)

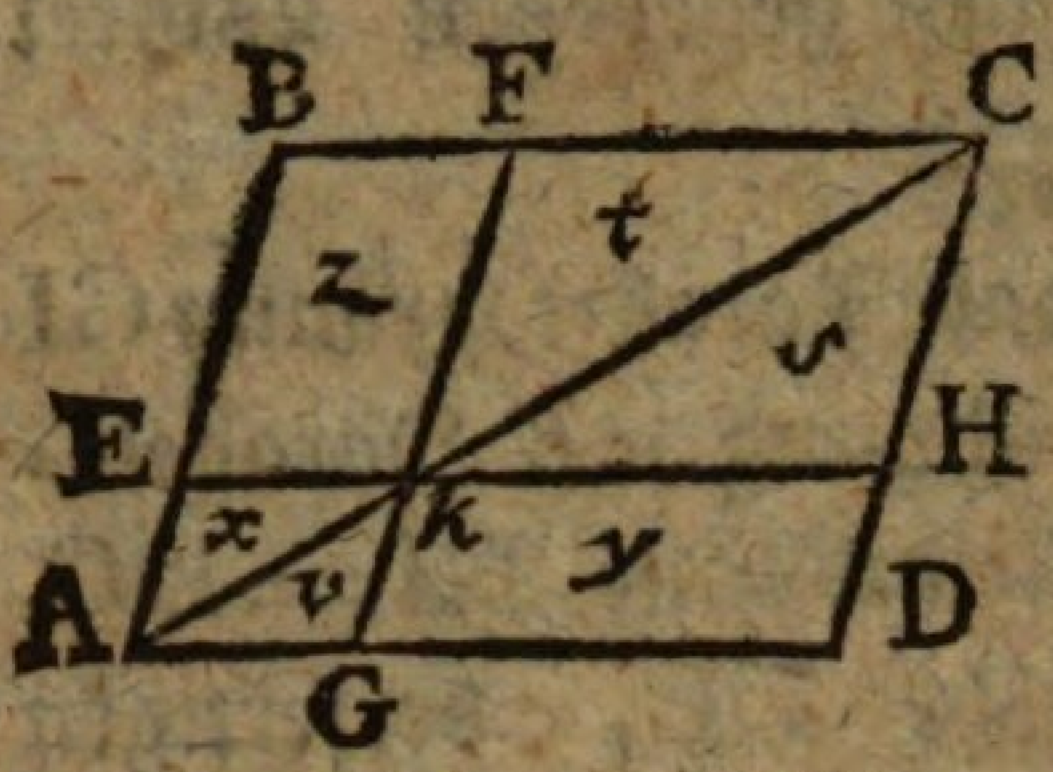
DC # GF (§ 116)

L. Aber EH und BC, wie stehn die gegen einander?

S. Auch gleichlaufend: denn

EH # AD (VS.) # BC (§ 129)

EH # EC (§ 116).



L. Das Parallelogramm BD ist also in vier kleinere Parallelogramme zerstükkt, durch deren zweie, EG und FH, die EkkLinie AC nur geht. Die beiden andern kD und kB durch welche sie nicht geht, heissen Ergänzungen der vorigen. Diese Ergänzungen nun sind gleich groß: der Bequemlichkeit wegen wollen wir die DreiEkke in welche die beiden ersten Parallelogramme zerteilt sind, mit x und v, t und s; die beiden ungeteilten aber mit z und y, bezeichnen. — Und nun zum Beweise!

S. $$\left.\begin{aligned} x + z + t &= v + y + s \\ x &= v \\ t &= s \end{aligned}\right\} (\S\ 132)$$

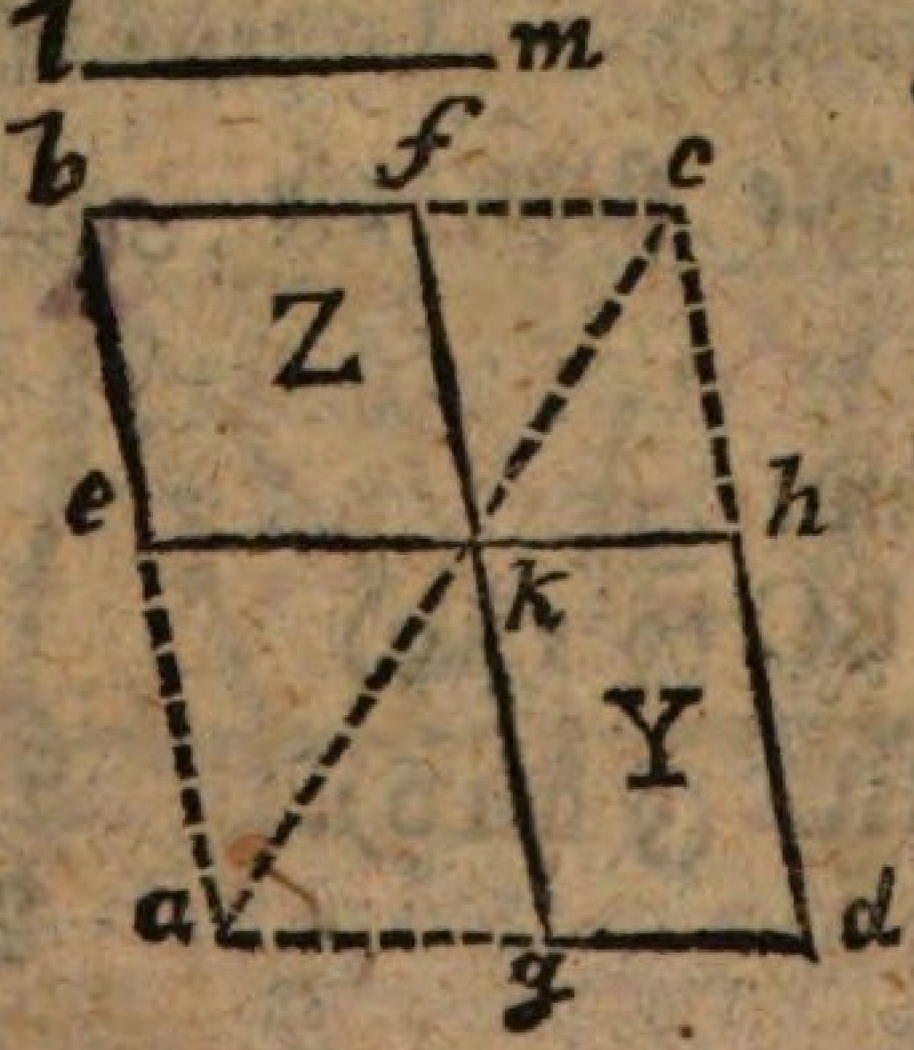
$$z = y \quad (\S\ 37)$$

L. Das heisst = = ?

S. In jedem Perallelogramm sind die Ergänzungen einander gleich.

Der drei und zwanzigste Saz.

§ 153.



L. Es wird gegeben ein Parallelogramm lekf oder z, und verlangt ein andres Y zu verfertigen, welches dem gegebenen gleich sei, aber zwei Seiten von bestimmter Länge lm habe.

S.

S. Ich verlängere die Seiten be unbestimmt, fk aber so, daß kg gleich lm werde; ziehe durch g, gleichlaufend mit bf und ek, eine Linie welche die Verlängerung von be in a schneidet; verlängere bf; ziehe von a durch k eine Linie, welche die Verlängerung von bf schneidet in c; ziehe von c, gleichlaufend mit ba und fg eine Linie welche die Verlängerung von ag schneidet in d; und endlich verlängere ich ek bis sie die Linie cd schneidet in h; so ist das Parallelogramm kgdh, oder Y, gleich dem gegebenen Z. (§ 151)

L. Mit der Auflösung wären wir fertig; nun fehlt es noch am Beweise. Sind das ganze bd, desgleichen Z und Y, auch Parallelogrammen?

S. agd # bfc # ekh }
und chd # fkg # bea } (Verf.)

bd ▱, Z ▱, Y ▱ (§ 129).

L. Wir müssen die Auflösung noch einMal aufmerksam durchgehn, um zu sehn ob sonst noch etwas darin eines Beweises benötigt seyn möchte.

(S. wiederholt die Auflösung)

L. Halt! Werden die Verlängerungen von bf und ak auch notwendig sich schneiden?

S. Ja; denn $\angle b + \angle a = 2\llcorner$ (§ 114)

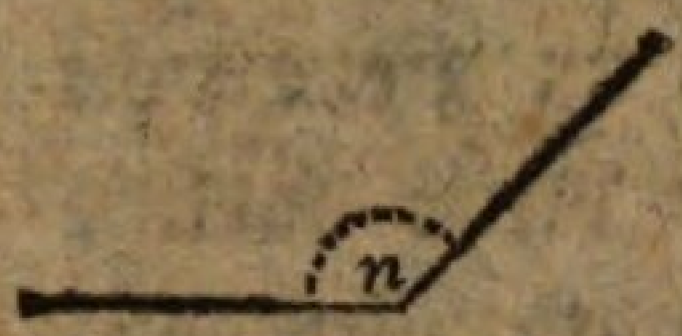
$\angle b + \angle bac < 2\llcorner$ (§ 45, 36)

Folglich stossen bf und ak genugsam verlängert, zusammen. (§ 108).

L. Das Y = Z ist aus § 151, und daß kg = lm, aus der Verfertigung klar. Der Aufgabe also ist ein Genüge geschehn.

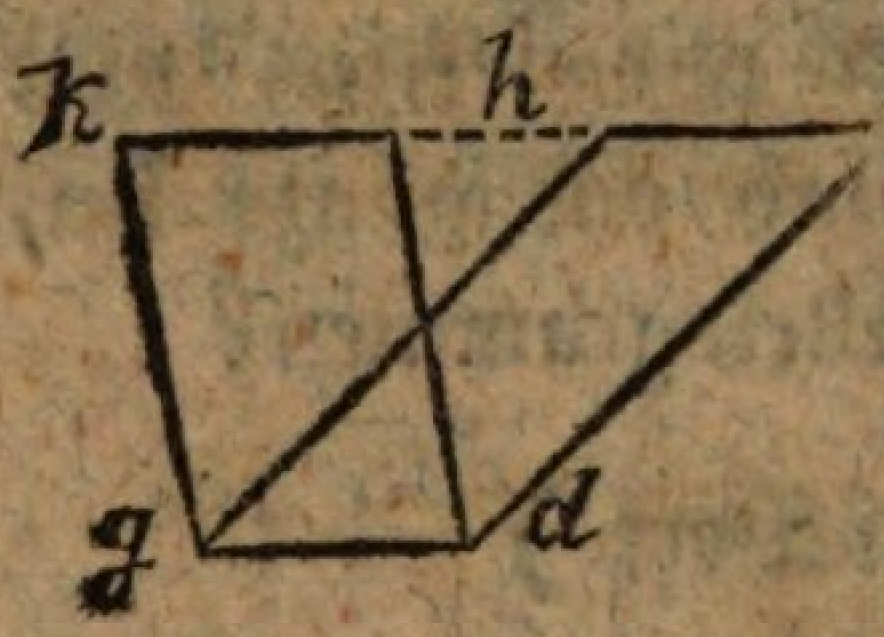
§ 154.

L. Man könte die Forderung noch weiter treiben, und begehren das verlangte Parallelogramm solle, ausser der gegebenen Seite lm, auch noch einen gegebenen Winkel n enthalten.



S. Dan müste ich das gefundene Parallelogramm Y in ein andres von der verlangten Beschaffenheit verwandeln (§ 143).

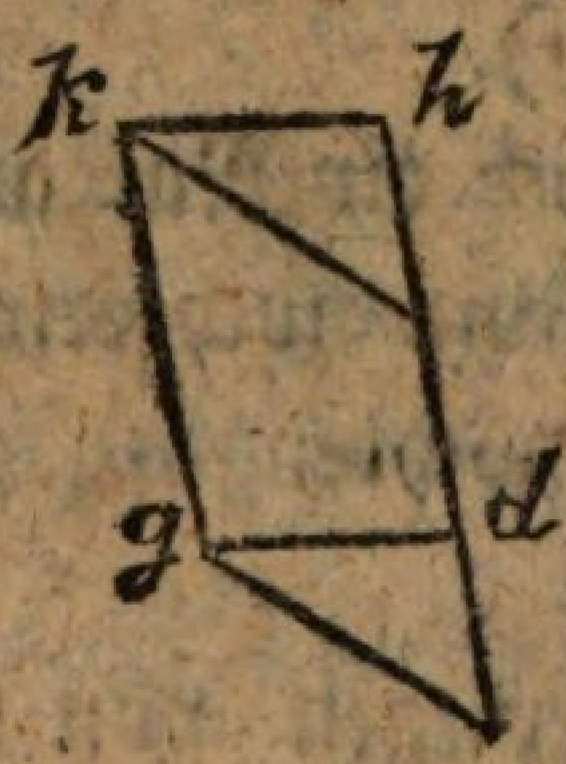
L. Mit gehöriger Behutsamkeit mag das angehn.



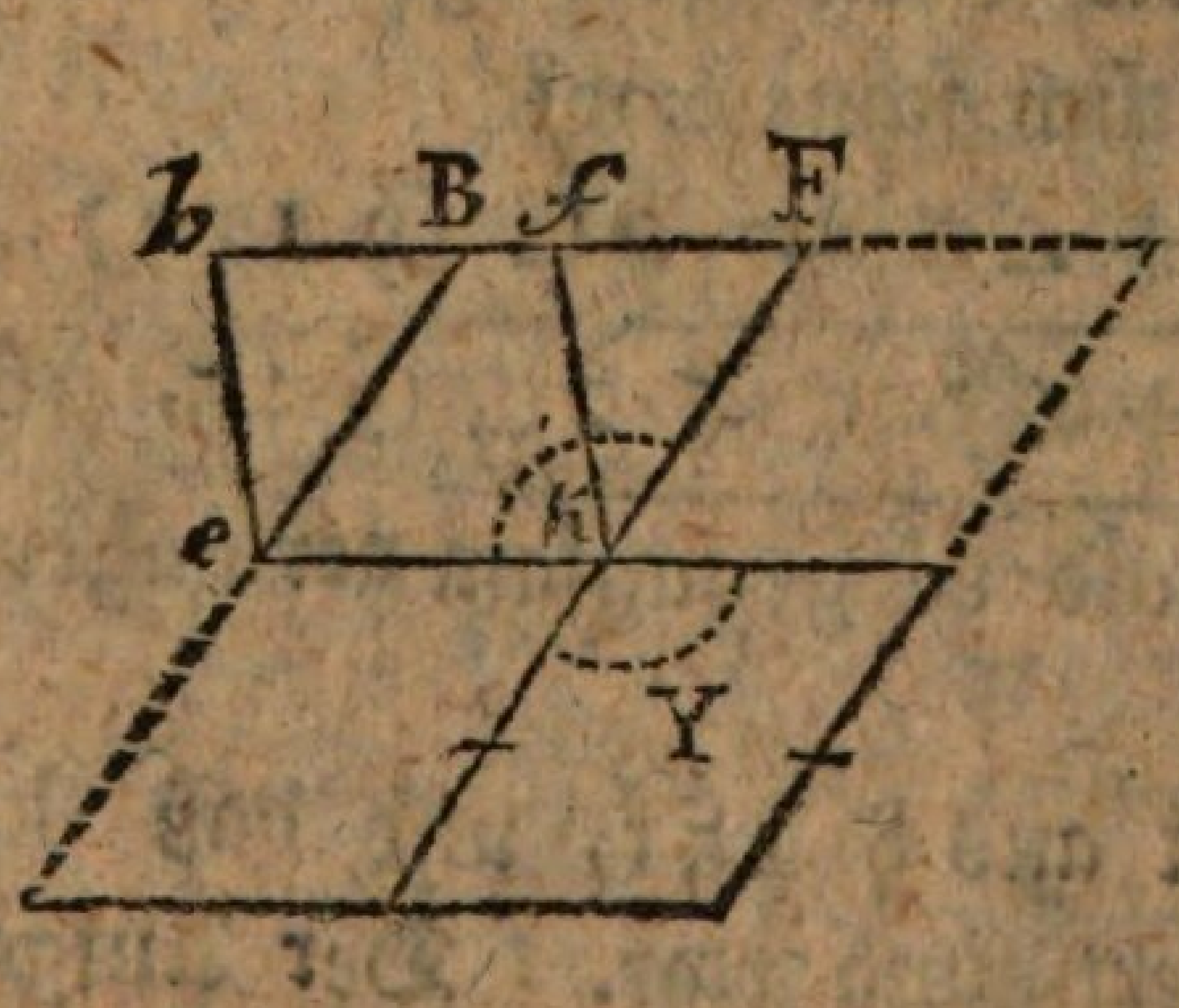
S. Nein es geht nicht; die Seiten kg und hd verändern ihre Länge.

L. Ist das nicht zu verhüten?

S. Man muß sie zu Grund-Linien nehmen, dan behalten sie ihre Länge.



L. Das ist wahr. Es gibt aber noch ein andres Mittel zu Auflösung dieser Aufgabe.



L. Ich kan dem Parallelogramm bekf = BekF, den gegebenen Winkel bei k anbringen, so erhält Y ihn auch (§ 75).

L. Nun sind alle Schwirigkeiten gehoben.

§ 155.

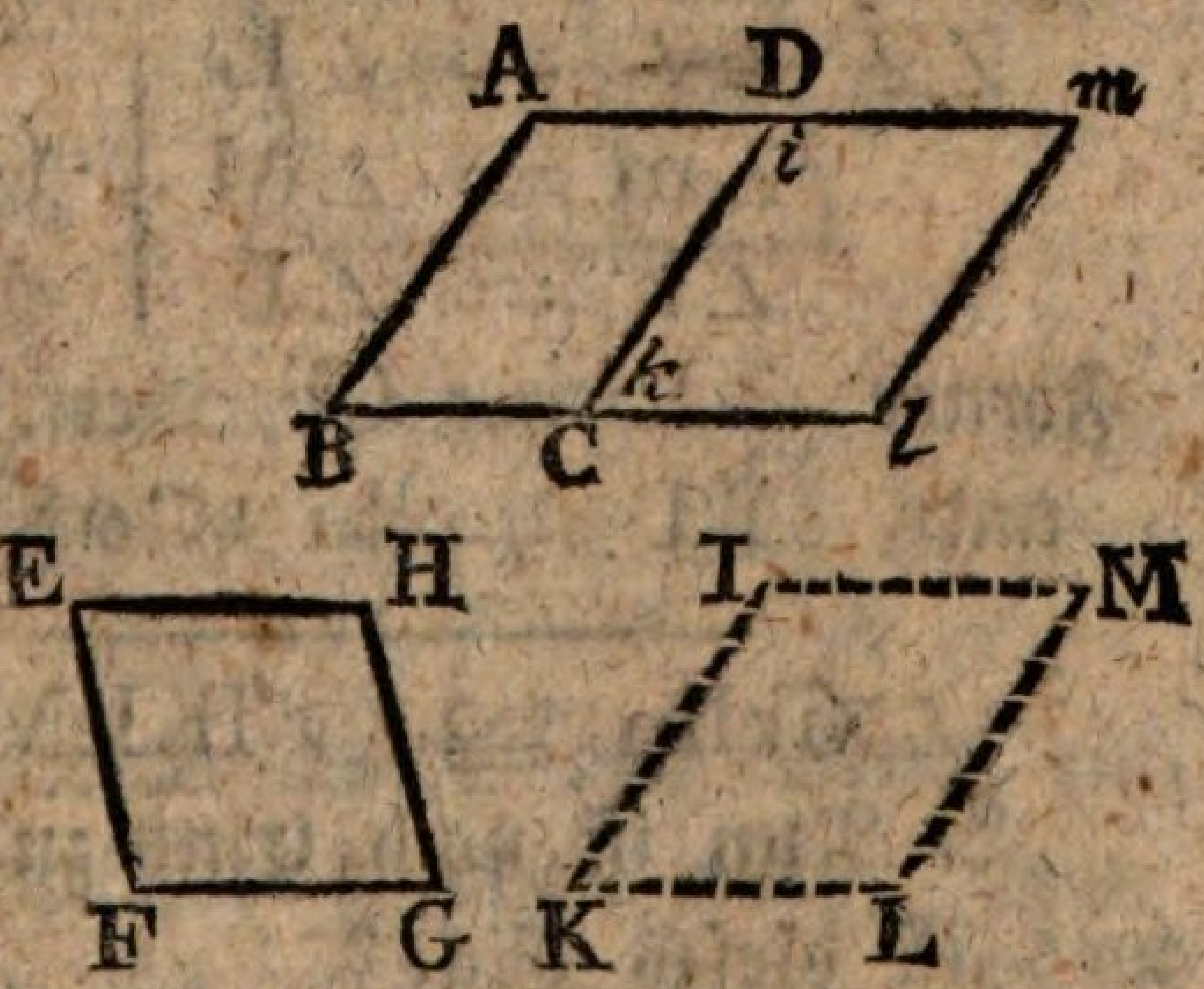
L. Und nun wird es auch nicht schwer seyn ein gegebenes DreiEkk ABC in ein Parallelogramm zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel n, und eine gegebene Linie l enthielte.

S. Ich verwandle zuerst das DreiEkk in ein Parallelogramm DECF mit dem verlangten Winkel ECF = n (§ 143): und ECF verwandle ich wieder in ein andres P, dessen Seite CG = l = HI (§ 152).

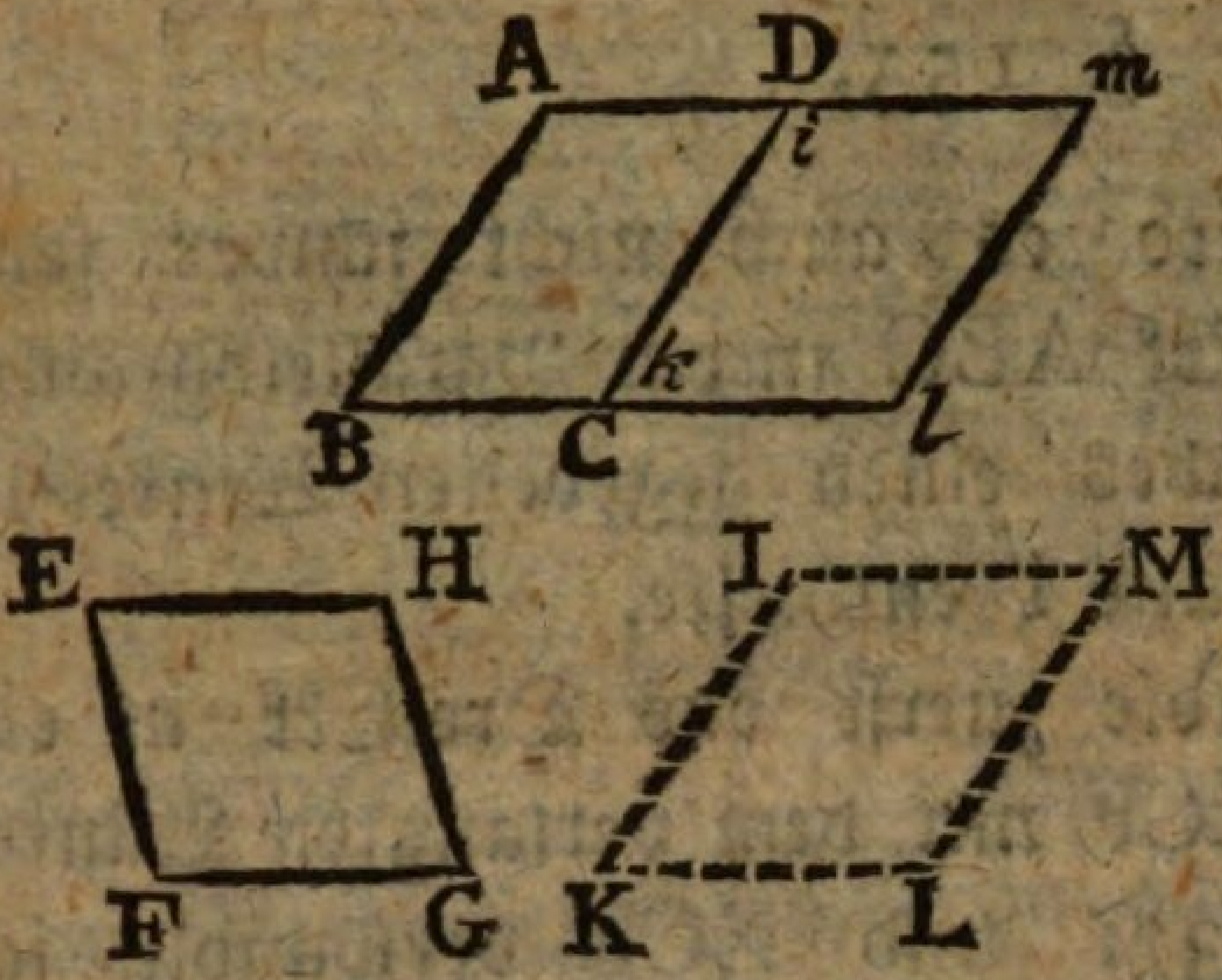
Der vier und zwanzigste Saz.

§ 156.

L. Hier sind zwei Parallelogrammen, ABCD und EFGH von verschiedener Art, lassen sich beide wol in ein Parallelogramm zusammen schmelzen?



S. O ja; ich verlängere zwei GegenSeiten AD und BC des einen Parallelogramms AC, und verwandle das andre EFGH in ein Parallelogramm IKLM was da hinein passt; das heisst von welchem zwei GegenSeiten IK und LM, die Länge der Seite CD (§ 153) und zwei GegenWinkel, K und M, die Grösse des Winkels DCl (§ 154) haben.



L. Recht! Aber wie bringe ich das Parallelogramm IKLM, oder ein ihm gleichähnliches nun in die gehörige Stelle neben ABCD?

S. Ich mache Cl = KL, und ziehe lm # DC (§ 103); so erhalte ich ein Parallelogramm DClm oder iklm (§ 129).

L. Das ist richtig; nur daß das Parallelogramm DClm dem IKLM gleich und ähnlich sei, ist noch zu erweisen.

S. $\angle k = \angle K$ (Verf.)

$\angle i$ ~~$\angle l$~~ $= \angle L$
$\angle m = \angle M$ } (§ 135).
$\angle i = \angle I$

Ferner KL = Cl (Verf.) = Dm
und KI = ki (Verf.) = lm } (§ 30).

▱iklm ≌ ▱IKLM (§ 24)

L. Nun ist noch Eins zu beweisen übrig: und was ist dieses Eine?

S. Daß ABlm ein Parallelogramm sei. AD # BC (§ 129).

Aber Dm und Cl sind Verlängerung von AD und BC; folglich auch einander gleichlaufend.

Ferner lm # DC (Verf.) # AB (§ 129).

Folglich lm # AB (§ 116)

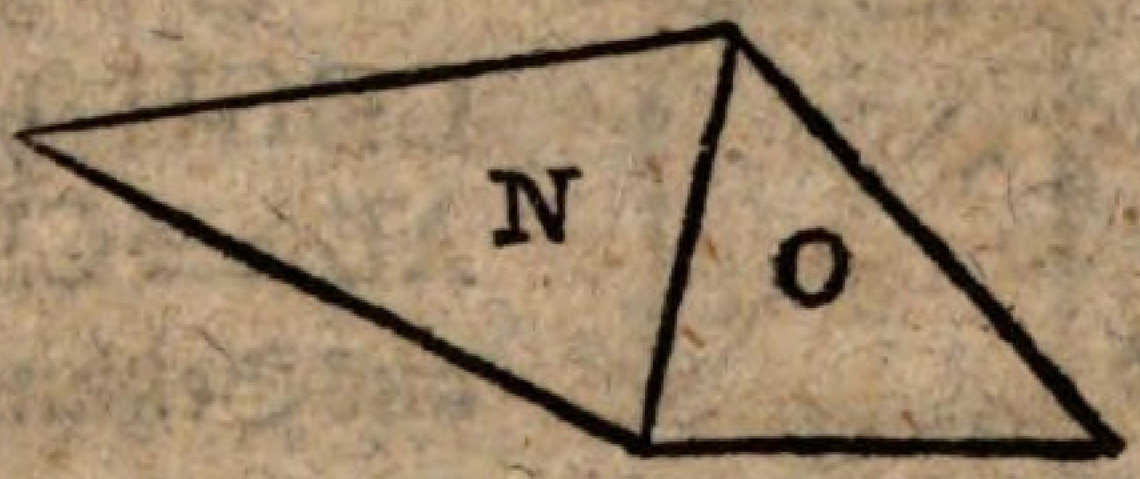
Folg=

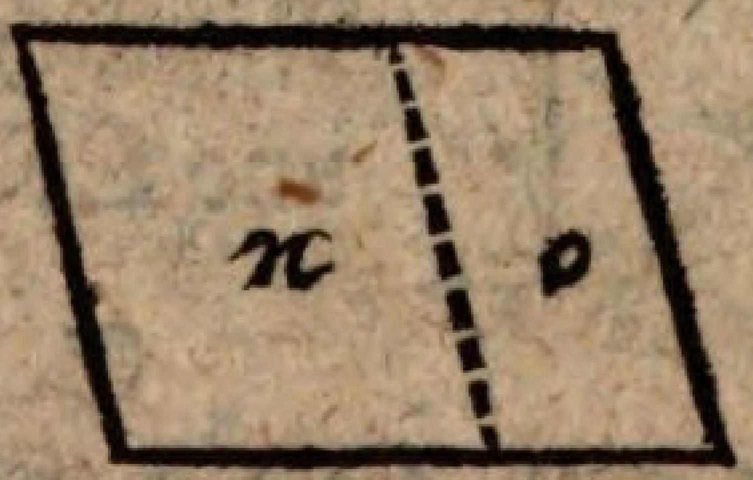
Folglich ABlm ein Parallelogramm (§ 129).

L. Nun ist, meines Erachtens, nichts mehr zu beweisen übrig. Es ist auch klar, daß wenn ein drittes Parallelogramm gegeben wäre, man auch solches mit Al zusammen schmelzen; überhaupt so viel Parallelogramme als verlangt wird, in ein Parallelogramm verwandeln könne.

§ 157.

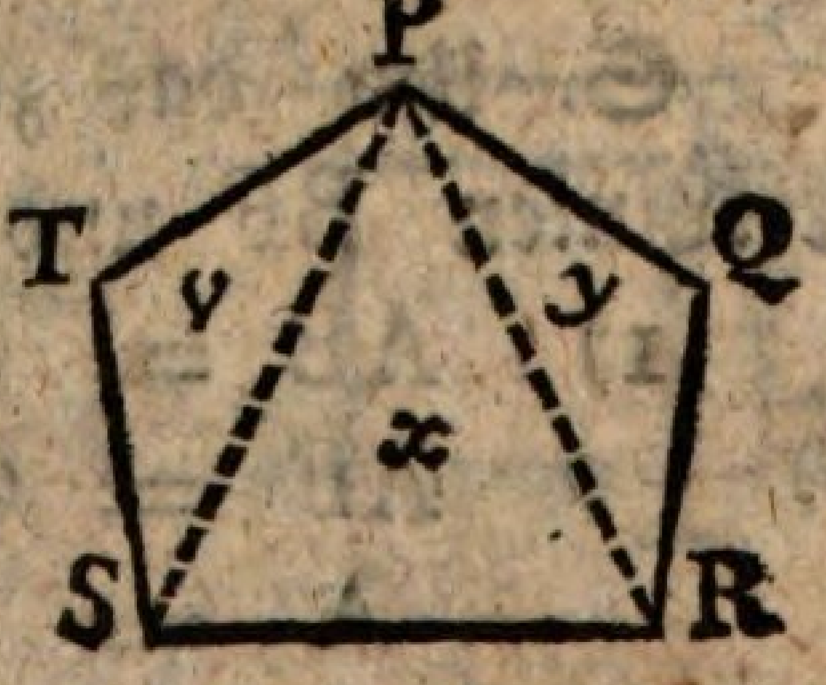
L. Parallelogramme also lassen sich in eins schmelzen; (§ 156) aber lassen sich auch wol ein Par DreiEkke N, O in ein Parallelogramm verwandeln?





S. O ja; man muß jedes der DreiEkke erst in ein Parallelogramm verwandeln (§ 151), und diese beiden Parallelogramme dan in eins n + o bringen (§ 156).

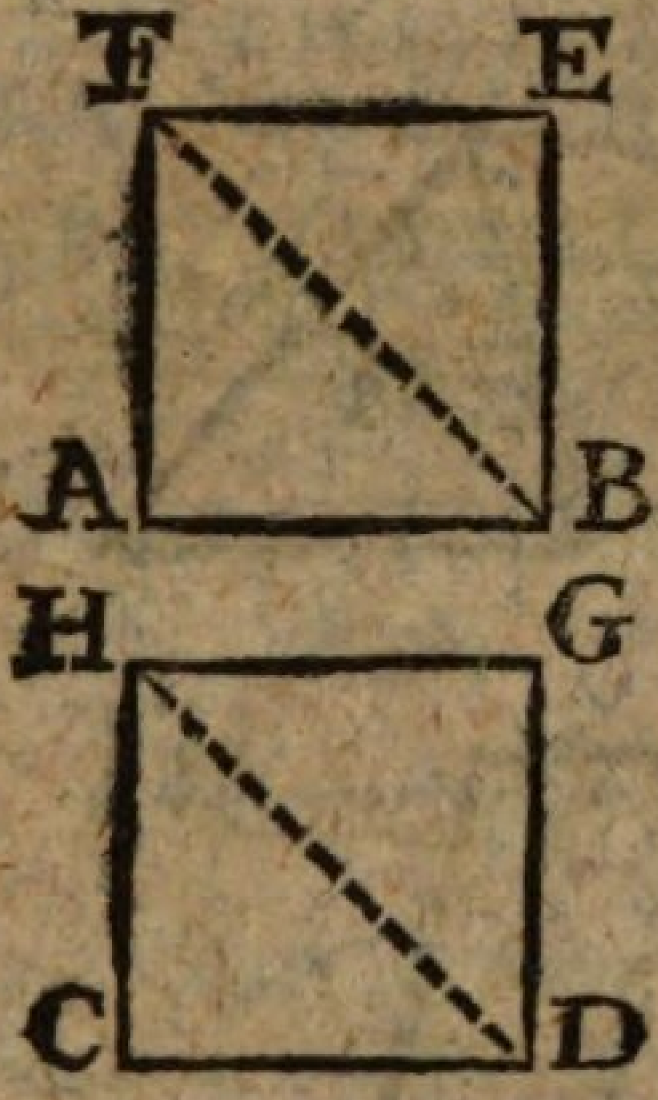
L. Und es ist wiederum klar, daß wenn ein drittes, viertes etc. DreiEkk gegeben wäre, man auch dieses mit n + o in eins schmelzen könte. Und da jede geradlinige Figur PQRST, sich in DreiEkke v, x, y auflösen lässt; so lässt sich jede geradlinige Figur in Parallelogramm verwandeln, zu welchem ein Winkel und eine Seite gegeben sind.



V. Eigenschaften der Quadrate und recht-winkligen DreiEkke.

Der fünf und zwanzigste Saz.

§ 158.



L. Zwei Quadrate ABEF und CDGH haben gleiche GrundLinien AB = CD: sind unter dieser Voraus-Sezung, auch ~~ihre~~ übrigen Seiten beider Quadrate einander gleich? Nämlich AF der CH, BE der DG und EF der GH.

S. Ja: denn nach der Voraus-Sezung sind sie alle den gleichen Linien AB und CD gleich; folglich auch einander gleich (§ 32).

L. Also wenn eine Seite eines Quadrats gleich ist einer Seite eines andern Quadrats - -?

S. So sind alle übrigen Seiten beider Quadrate einander gleich.

L. Wie aber ist es mit den Quadraten selbst? Sind die auch einander gleich?

S. Um das zu beweisen werde ich ein Par EkkLinien BF und HD ziehn müssen. Dan ist

1) AB = CD (VS.)
   AF = CH (Bew.)
   A = C (§ 137, 49)

△BFA = △DHC (§ 56)

Hier-

Hiernächst ist

2) $\triangle BFA = \triangle BFE$
$\triangle DHC = \triangle DHG$ } (§ 133)

$\triangle BFE = \triangle DHG$ (§ 32)

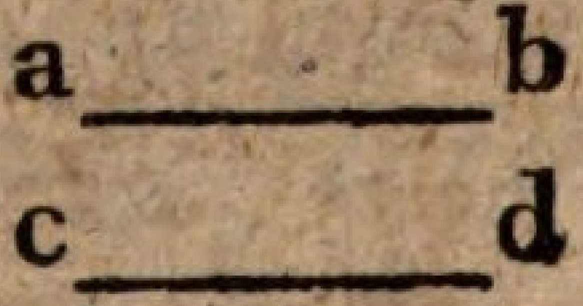
Endlich

3) $\triangle BFA + \triangle BFE = \triangle DHC + \triangle DHG$
(§ 36)

Oder $\square ABEF = \square CDGH$

L. Das heisst = = ?

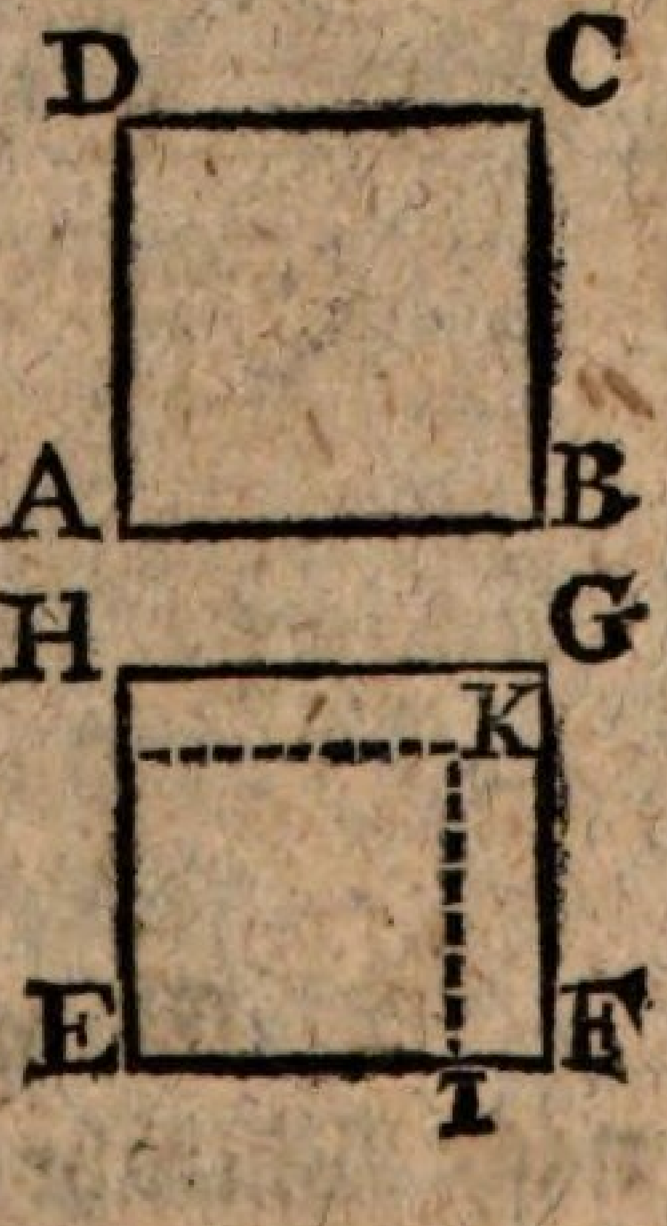
S. Wenn eine Seite eines Quadrats gleich ist einer Seite eines andern; so sind beide Quadrate einander gleich.



L. Man kan dieses auch so ausdrukken: Gleiche Linien ab und cd, geben gleiche Quadrate.

Der sechs und zwanzigste Satz.

§ 159.



L. Nun der GegenSatz des vorigen! Wie lautet der?

S. Gleiche Quadrate ABCD und EFGH haben gleiche Seiten.

L. Recht! Aber wenn das geleugnet würde?

S. So mag der Leugner von einer Seite EF den Ueberschuß über AB wegschneiden, so daß

$EI = AB$

gelte; und nun beschreibe er über EI ein Quadrat EIKL (§ 136, 137). Nun ist

□EK = □AC (§ 158) = □EG (VS.)

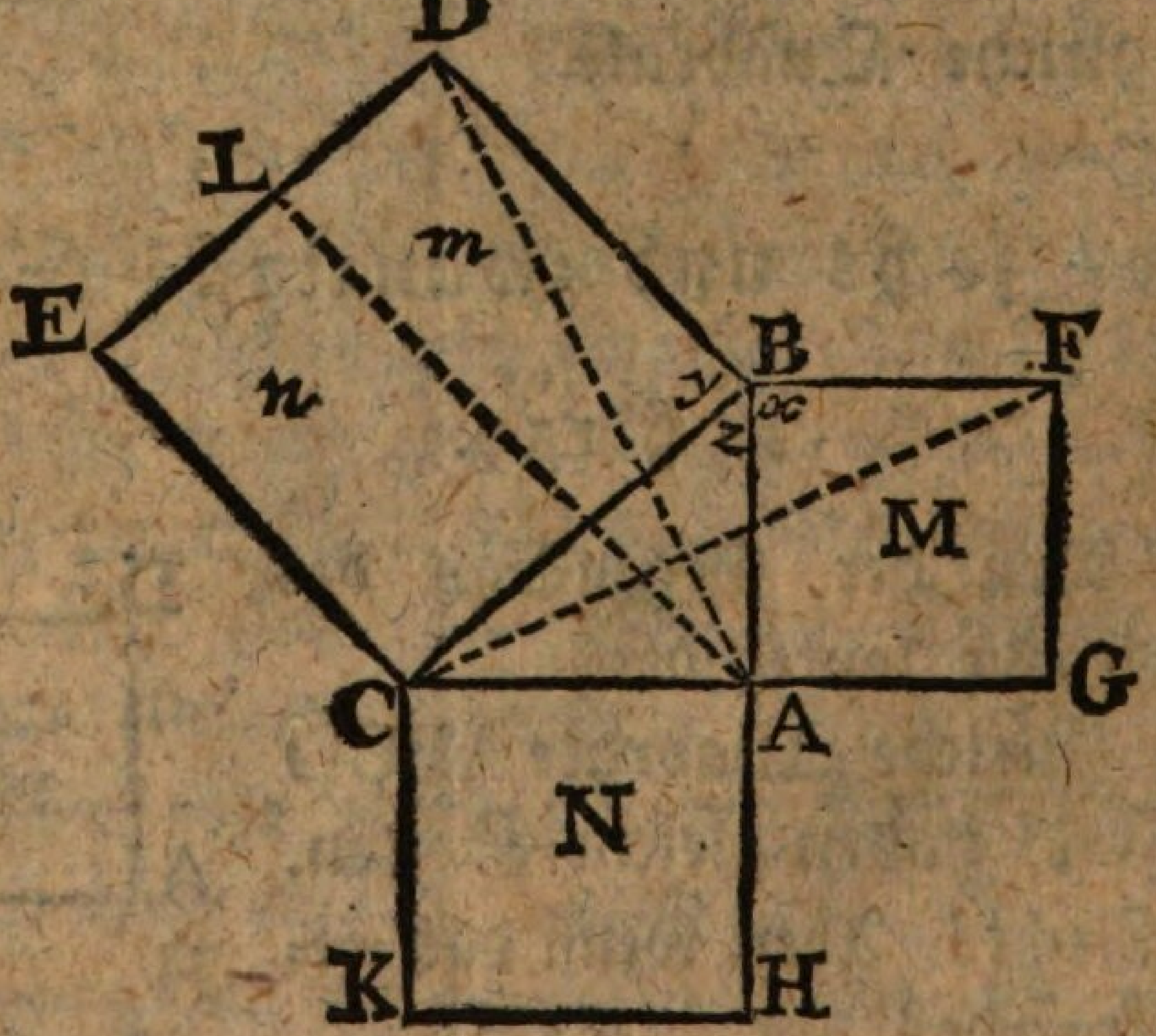
□EK = □EG (§31)

welches unmöglich ist (§ 45)

L. Auf eben die Art lässt sich beweisen daß auch EF nicht kleiner seyn kan als AB. Es bleibt also nichts übrig als zuzugeben daß beide gleich lang seien.

Der sieben und zwanzigste Satz.

§ 160.



L. Es wird ein rechtwinkliges DreiEkk ABC nach Willkühr gezeichnet, und auf jeder Seite desselben ein Quadrat beschrieben. Das der längsten Seite wollen wir BCED benennen; die andern beiden

den aber BAGF und ACKH. Hier soll nun bewiesen werden, daß das Quadrat der längsten Seite BC gleich ist den Quadraten der beiden kürzern AB und AC zusammen genommen. Dazu werden Hülfs-Linien erfodert. Die erste wird gezogen aus der Spitze A des rechten Winkels, gleichlaufend mit den Seiten BD und CE des grösten Quadrats, bis an dessen äusserste Seite DE, wo L bemerkt wird. — Was sind nun BL und CL, in welche das Quadrat BE zerteilt ist, für Figuren?

S. RechtEkke (§ 137).

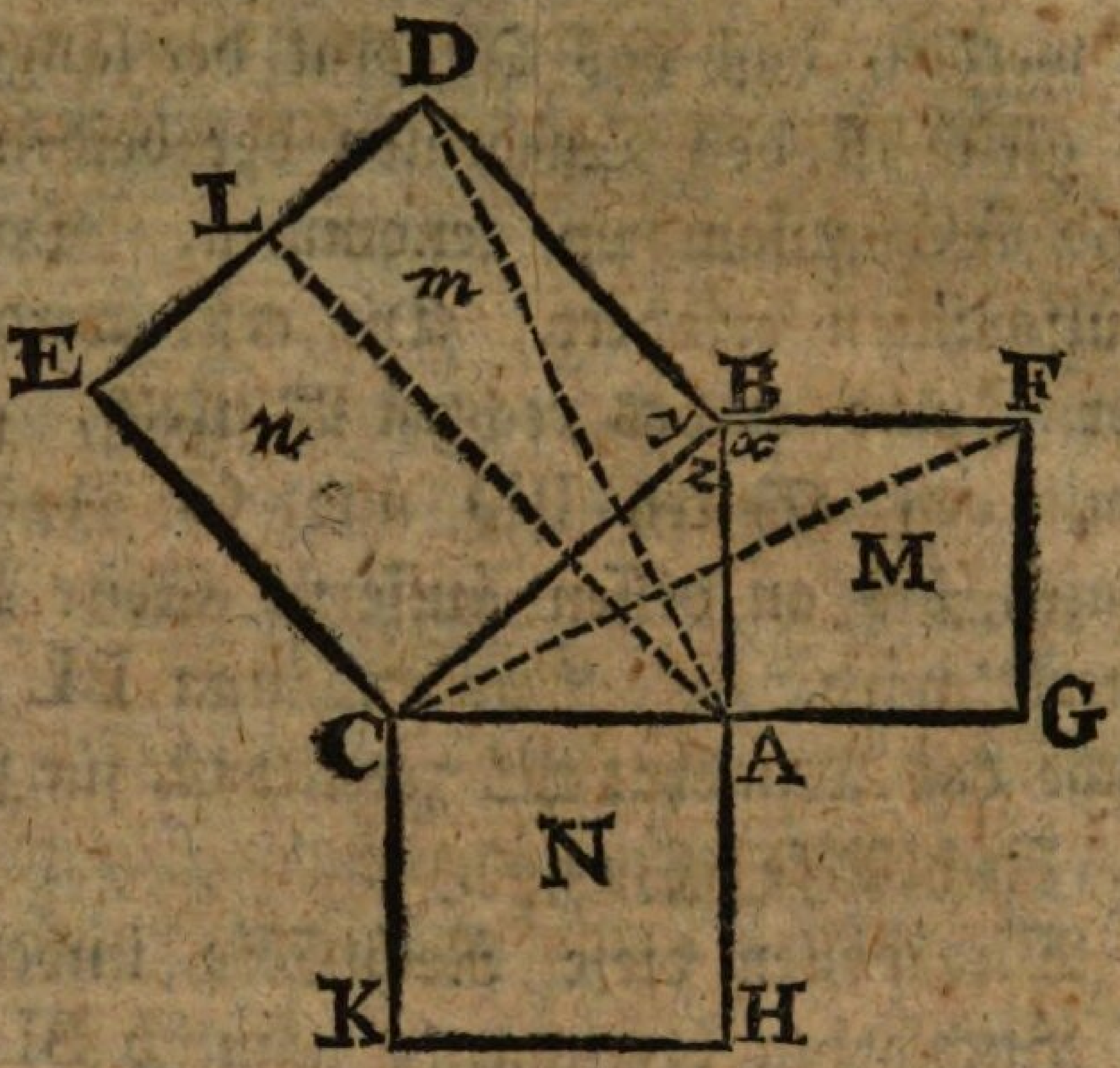
L. Wir wollen diese RechtEkke inwendig mit kleinen Buchstaben bezeichnen; nämlich BL mit m, und CL mit n; desgleichen die Quadrate BG und CH mit den der Bezeichnung der RechtEkke entsprechenden grossen Buchstaben M und N. Noch deutlicher wird alles, wenn die mit einerlei Buchstaben bezeichneten VierEkke mit einerlei Farbe überstrichen werden, m und M etwan gelb, n und N roht. Das DreiEkk ABC könte blau werden, oder auch weiß bleiben. — Jedes dieser RechtEkke nun ist dem ihm zunächst belegenen, ihm gleich bezeichneten Quadrate gleich:

nemlich $\square m = \square M$,

$\square n = \square N$,

Um dieses zu beweisen werden die Hülfs-Linien AD und CF gezogen. So entstehn zwei DreiEkke BDA, BFC, die wieder mit einerlei Farbe überstrichen werden können; aber so dünne, daß die darunter befindliche durchschimmere. Tusche wird sich am besten dazu schikken: — Die Winkel bei B werden mit

klei-



kleinen Buchstaben y, z, x, bezeichnet. — Jedes der DreiEkke BDA und BFC! steht mit einem Parallelogramm auf einer GrundLinie, und zwischen einerlei gleichlaufenden Linien. Das DreiEkk BDA, zum Beispiel?

S. Hat mit dem RechtEkk m die GrundLinie BD gemein; und steht mit ihm zwischen einerlei Parallelen BD und AL (§ 139).

L. Und das DreiEkk BFC?

S. Steht mit dem Quadrat M auf einer GrundLinie BF, und zwischen einerlei Parallelen BF und CG.

L. Wie verhalten sich beide DreiEkke nun in Ansehung der Grösse zu den Parallelogrammen m und M?

S. $\left.\begin{array}{l}\triangle BDA = \frac{1}{2} m \\ \triangle BFC = \frac{1}{2} M\end{array}\right\}$ (§ 148).

L. Nun wollen wir beide DreiEkke mit einander vergleichen, sie haben zwe Par Seiten, und die dazwischen liegenden Winkel gleich. Welches sind zuerst die gleichen Seiten?

S. $\left.\begin{aligned} BD &= BC \\ BA &= BF \end{aligned}\right\}$ (§ 137)

L. Und nun die gleichen Winkel?

S. $y = x$ (§ 137, 49)
$y+z = x+z$ (§ 36)

$\triangle BAD = \triangle BFC$ (§ 54)

L. Aber $\left.\begin{aligned} BDA &= \tfrac{1}{2}\, m \\ \text{und } BFC &= \tfrac{1}{2}\, M \end{aligned}\right\}$ (§ 148)

S. Folglich $m = M$ (§ 43)

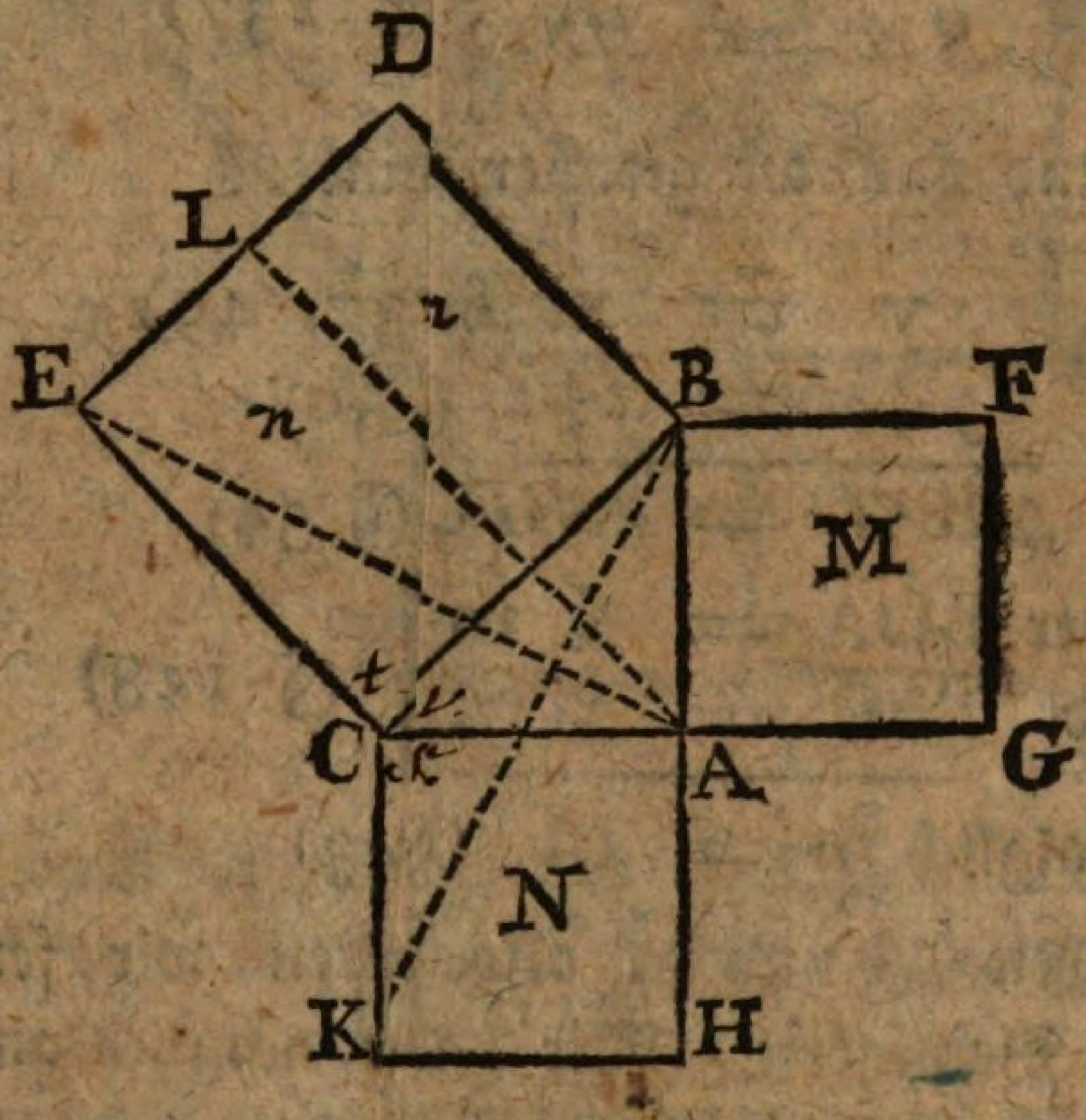
L. Mit M und m also wären wir fertig bis auf eine Kleinigkeit. Wir habn nämlich angenommen das DreiEkk BFC stünde mit dem Quadrat M zwischen einerlei gleichlaufendn Linien: das kan aber nicht eher zugegeben werdn, als bis erwiesen ist daß AC die Fortsetzung von GA sei, oder daß AC mit GA in gerader Richtung liege. — Was wird erfodert?

S. Die Winkel BAC und BAG müssen zusammen zwei rechte betragen. Nun ist aber ABC ein rechtwinkliges DreiEkk welches bei A seinen rechten Winkel; und M ein Quadrat, welches lauter rechte Winkel hat (§ 13). Also

$\angle BAC + \angle BAG = 2\llcorner$

L.

L. Nun sind wir mit dem Beweise von M=m aufs Reine, und es fehlt uns noch der von N=n. Um Verwirrung zu vermeiden wollen wir das rechtwinklige DreiEkk mit seinen drei Qua=



draten, und der Linie AC wiederholen, die Linien AD und CF aber weglassen, und dafür zwei andre HülfsLinien, AE und BK, ziehn: und endlich die Winkel bei C mit s, v, t bezeichnen; die DreiEkke CEA und CKB aber, wie vorhin, schwarz überstreichen. — Beide DreiEkke sind wieder gleich und ähnlich; jedes steht wieder mit einem Parallelogramm auf einerlei GrundLinie, und zwischen einerlei gleichlaufenden Linien: kurz es ist alles wie vorhin. Zuerst wollen wir also die Gleichheit der DreiEkke ACE und BCK, und die Parallelogramme n und N, erweisen.

L.

S. $\left.\begin{array}{l} CE = CB \\ CA = CK \end{array}\right\}$ (§ 137)

$t + v = s + v$ (§ 49, 36)

$\triangle ACE = \triangle BCK$ (§ 54)

Aber $\left.\begin{array}{l} \triangle ACE = \frac{1}{2} n \\ \triangle BCK = \frac{1}{2} N \end{array}\right.$ (§ 148)

$n = N$ (§ 43)

L. Also $m = M$

und $n = N$

$m + n = M + N$ (§ 36)

Oder $\square BCED = \square AF + \square AK$

Da sind wir mit dem Beweise fertig. Wie lautet nun unser LehrSatz?

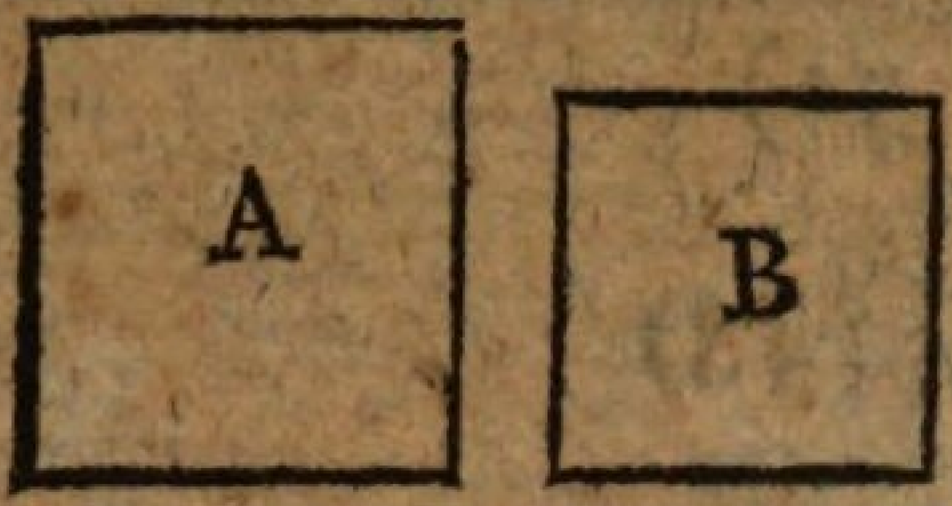
S. Das Quadrat der längsten Seite eines rechtwinkligen DreiEkks, ist so groß als die Quadrate der beiden kürzern Seiten zusammen.

L. Recht! Und dieser Saz wird von seinem Erfinder Pythagoras der pythagorische, seines ausgebreiteten Nutzens wegen auch von Einigen magister matheseos genant.

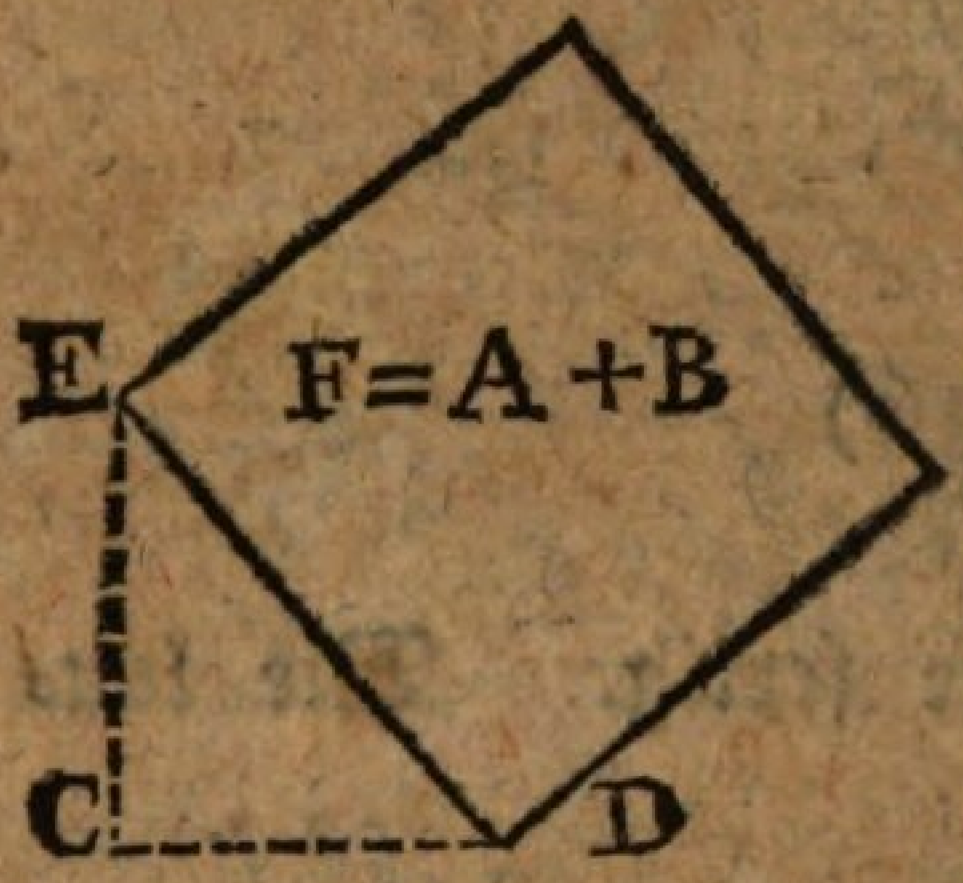
Der

Der acht und zwanzigste Satz.

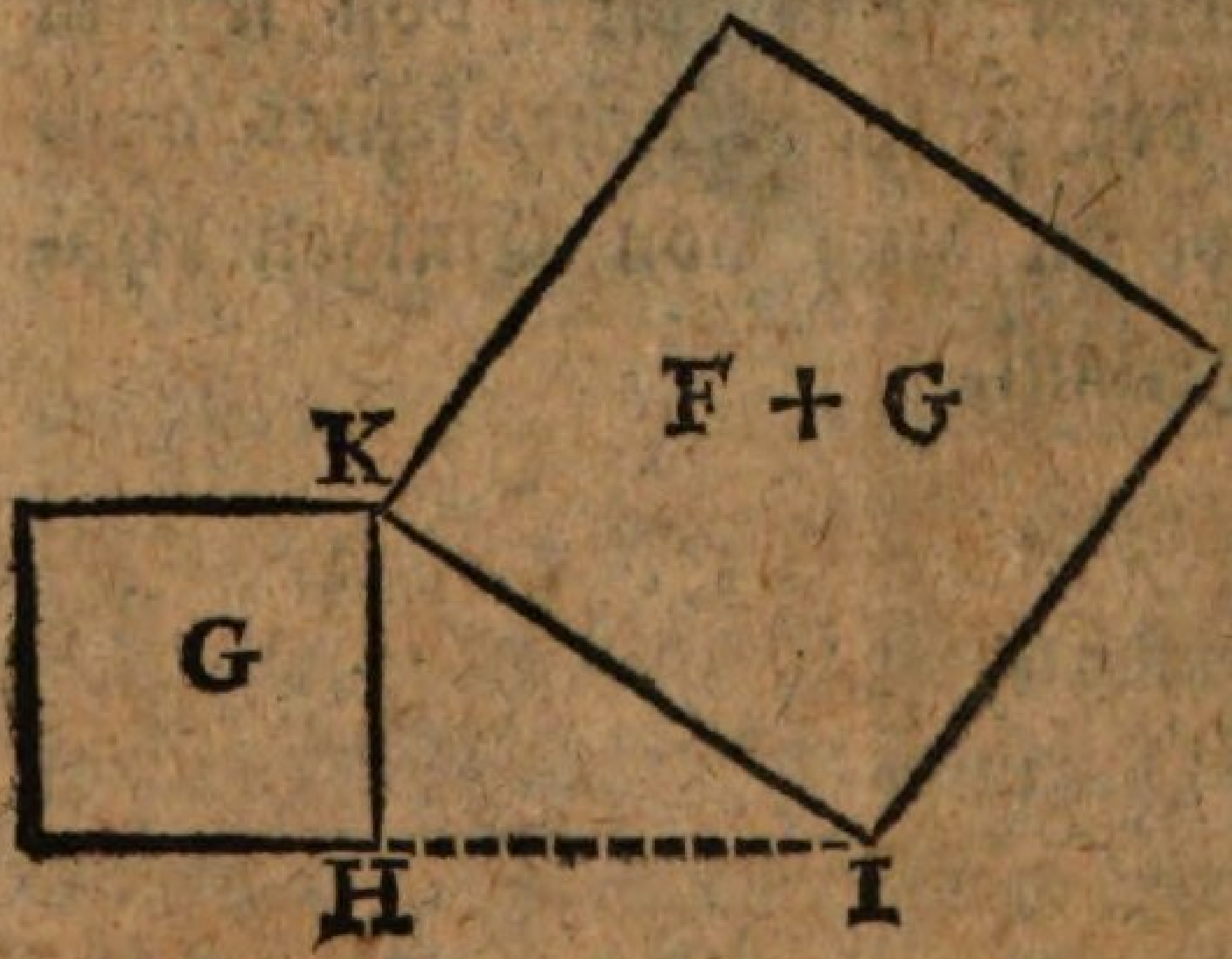
§ 161.



L. Hier sind zwei Quadrate, A und B: lässt sich aus ihnen wol ein einziges machen? Ich meyne eins welches so groß ist als beide zusammen.

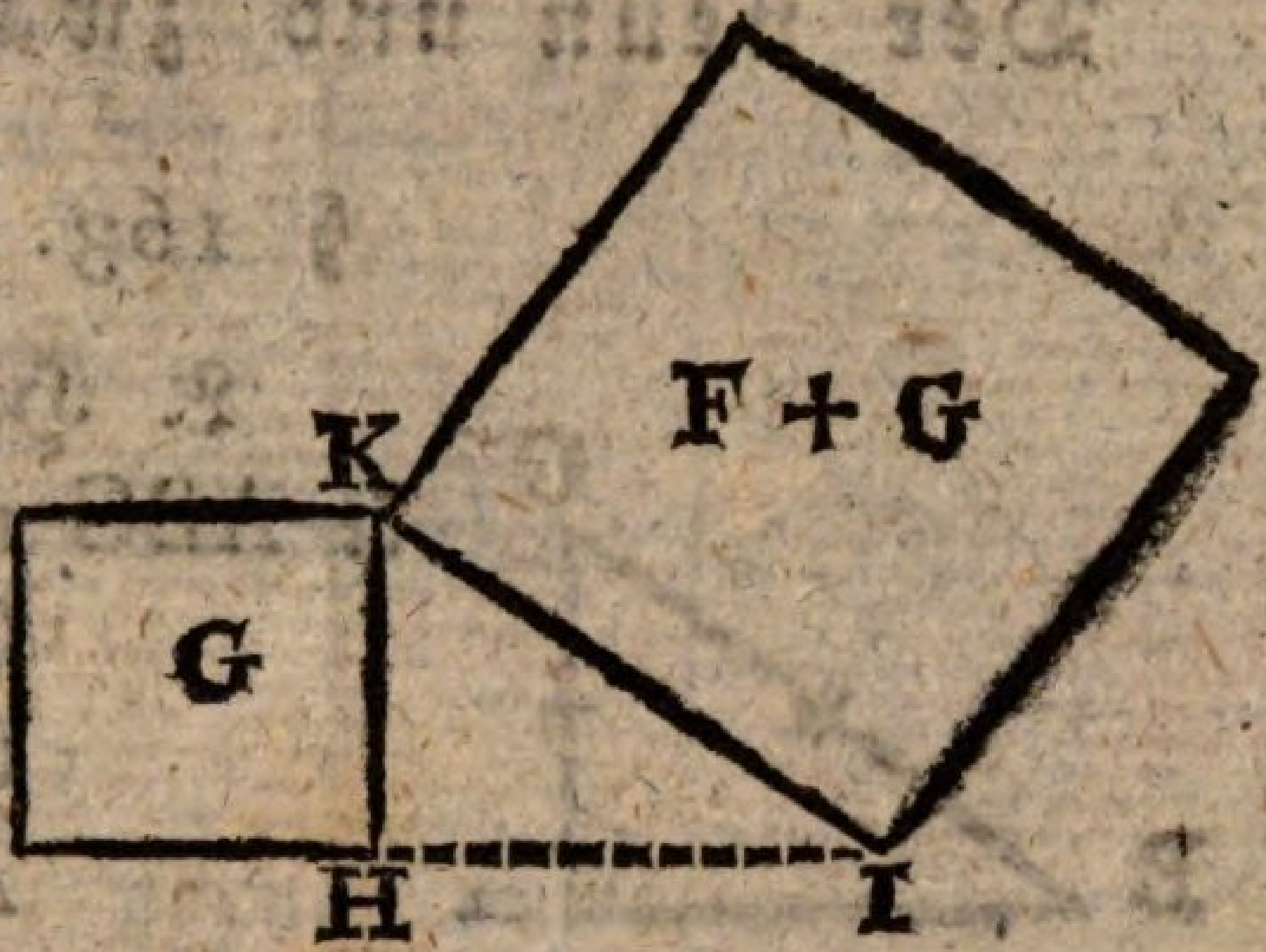


S. D. ja, ich darf beide nur rechtwinklig an einander setzen, oder auch nur einen rechten Winkel machen, dessen einen Schenkel CD der Seite des einen Quadrats A, und dessen andrer Schenkel CE der Seite des andern Quadrats B gleich sei; so ist DE die Seite eines Quadrats F, welches so groß ist als A und B zusammen (§ 160).



L. Zwei Quadrate also wären verwandelt: wenn nun aber noch ein drittes, G hinzukäme, und verlangt würde ein Quadrat zu machen welches so groß wäre als A B und G zusammen?

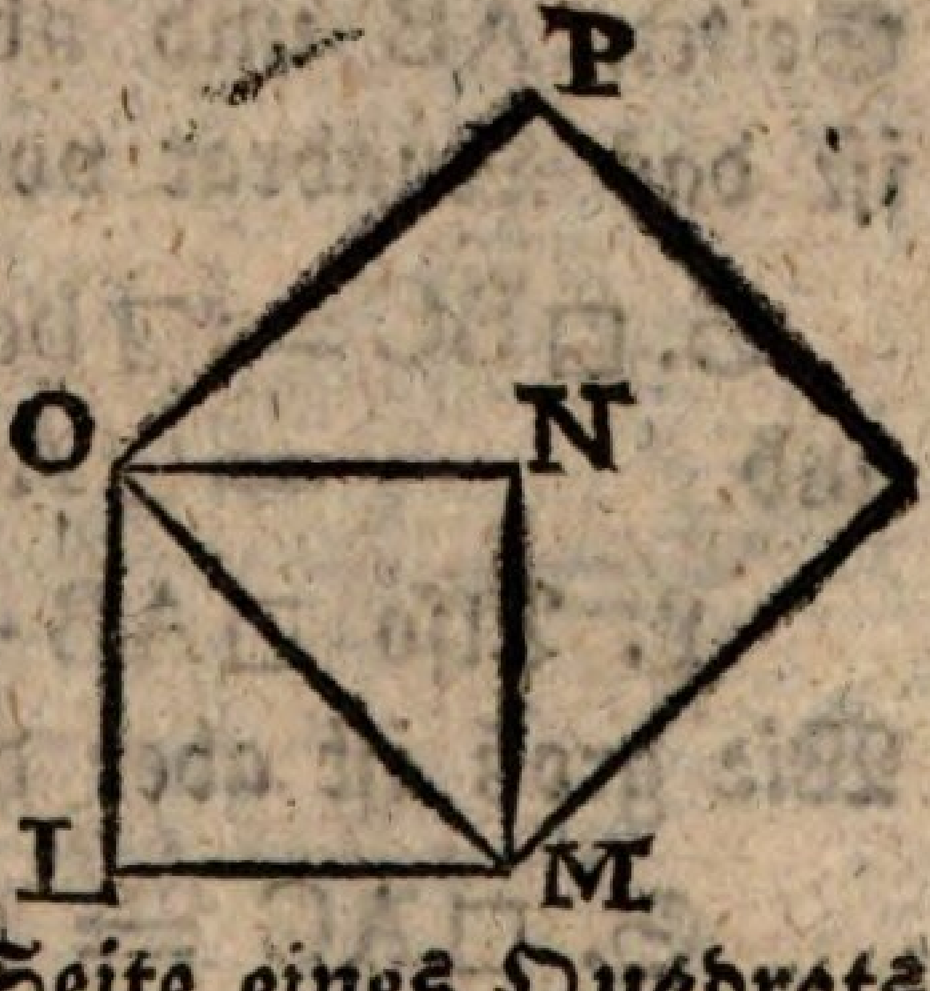
S. Es ist Wiederholung des vorigen Verfahrens. Da F = A + B; so darf ich nur die Seiten von F und G rechtwinklig zusammen setzen in HI und HK, um IK, die Seite eines Quadrats = F + G = A + B + G zu erhalten (§ 160).



L. Es ist klar daß man, auf diese Art, so viele Quadrate in eins bringen kan als verlangt wird.

§ 162.

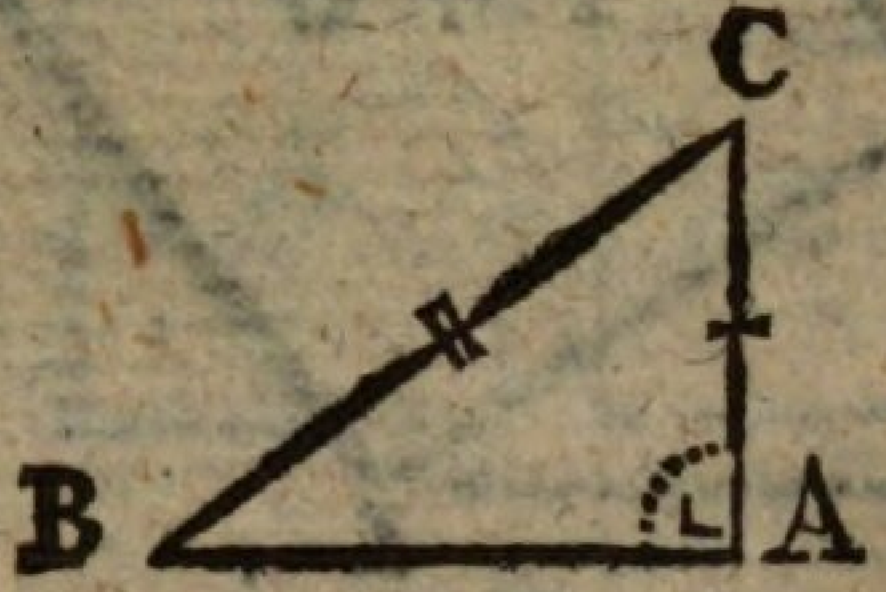
L. Eben so klar ist es daß man ein Quadrat verdoppeln kan. Gesetzt es würde ein Quadrat verlangt doppelt so groß als ein gegebenes LMNO?



S. Da alle Winkel des Quadrats rechte sind (§ 137), so ist eine EkLinie MO die Seite eines Quadrats MP = 2LN.

Der neun und zwanzigste Satz.

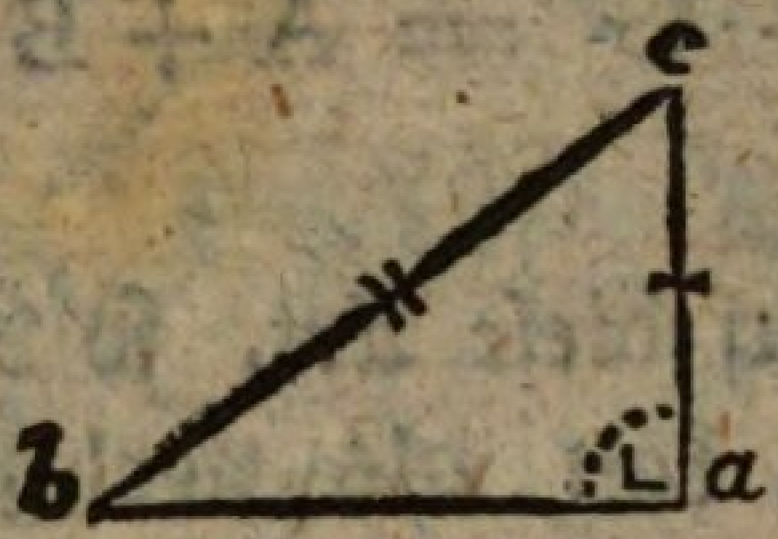
§ 163.



L. Hier sind zwei DreiEkke ABC und abc, in welchen

$$CA = ca,$$
$$CB = cb,$$
$$\angle A = \llcorner = \angle a;$$

Die Frage ist: Sind beide DreiEkke einander gleich und ähnlich? — Was ist uns, um dies zu beantworten, noch zu kennen nötig?



S. Entweder noch ein Winkel, oder noch eine Seite. (§ 97).

L. Recht! Wir wollen also die Gleichheit der Seiten AB und ab auszumitteln suchen. Wie groß ist das Quadrat von BC?

S. $\square BC = \square bc$ (§ 158) $= \square ab + \square ac$ (§ 160)
und $= \square AB + \square AC$ (§ 160).

L. Also $\square AB + \square AC = \square ab + \square ac$ (§ 32)
Wie groß ist aber das Quadrat von AC?

S. $\square AC = \square ac$ (§ 158).

L. Und nun Gleiches von Gleichem weggenommen?

S. Bleibt $\square AB = \square ab$ (§ 37)

$AB = ab$ (§ 159)

$\triangle ABC \cong \triangle abc$ (§ 56, 63).

L.

L. Wenn also in zwei rechtwinkligen DreiEkken zwei Seiten des einen DreiEkks einzeln genommen, gleich sind zwei (gleichliegenden) Seiten eines andern,,?

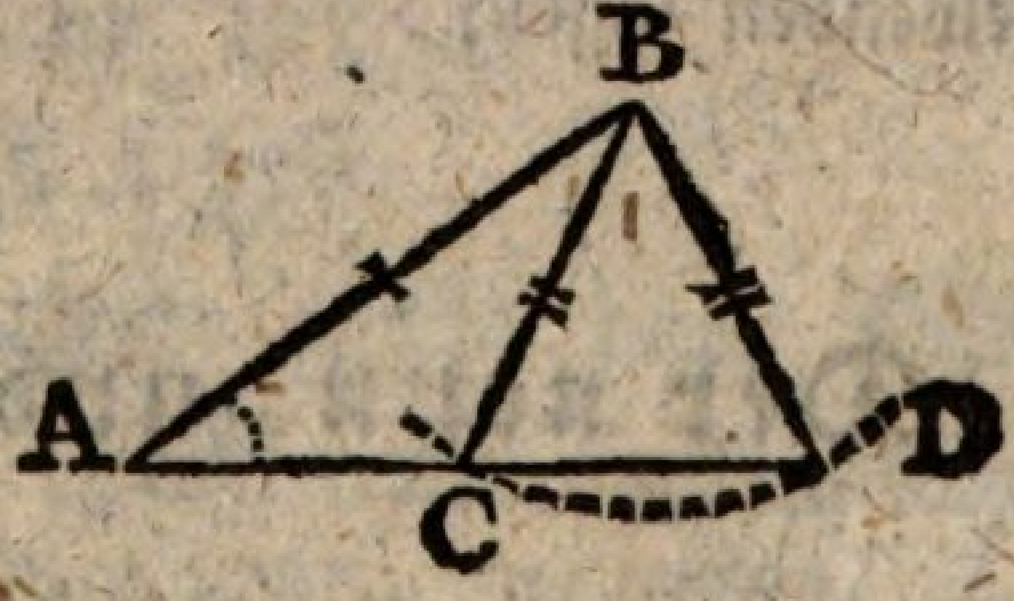
S. So sind beide DreiEkke einander gleich und ähnlich.

§ 164.

L. Dieses ist der § 97 versprochene Nachtrag zur Lehre von Gleichheit und Aehnlichkeit der DreiEkke, welcher beim Euklides in dem Beweise des vierzehnten Sazes des dritten Buchs verstekkt liegt.

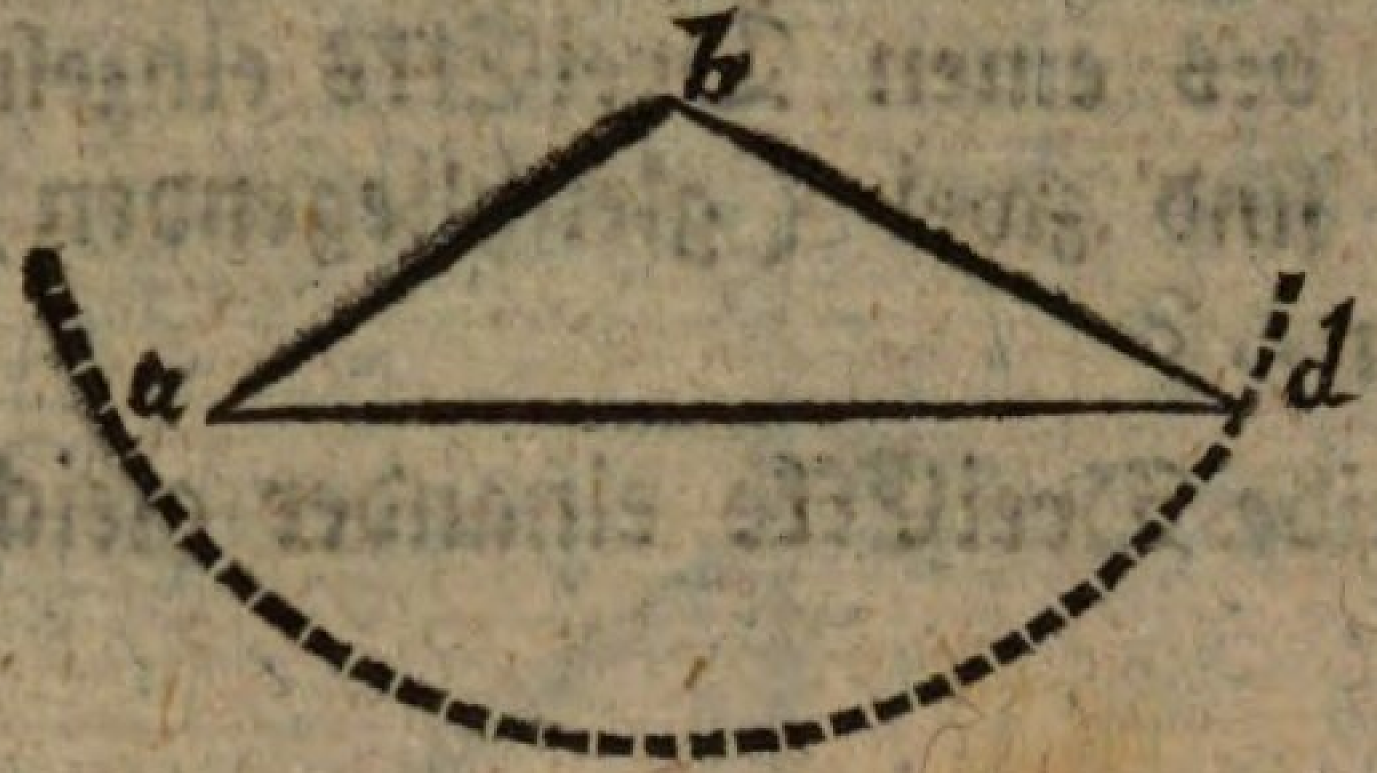
Wolf hat in seinen Deutschen AnfangsGründen der Geometrie (§ 96) den Fehler begangen diesen Saz allgemein zu machen, als ob in jedem Fall zwei Seiten und ein nicht dazwischen liegender Winkel Gleichheit und Aehnlichkeit der DreiEkke bestimmte: daß dem nicht so ist, kan das blosse Anschauen nebenstehender DreiEkke ABC und ABD lehren, in welchen

AB = AB
BC = BD
∠A = ∠A



und die demungeachtet weder gleich noch ähnlich sind (§ 145). Woran liegt das wol?

S. Die Seite BD ist kürzer als AB, daher schneidet ein mit BD = BC beschriebener Kreis die Seite AD vor der Oefnung des Winkels A zwei Mal. Wäre BD länger als AB so könte das nur ein Mal geschehn, wie bei abd zu sehn ist.



L. Wie würde also der Satz richtig zu fassen seyn?

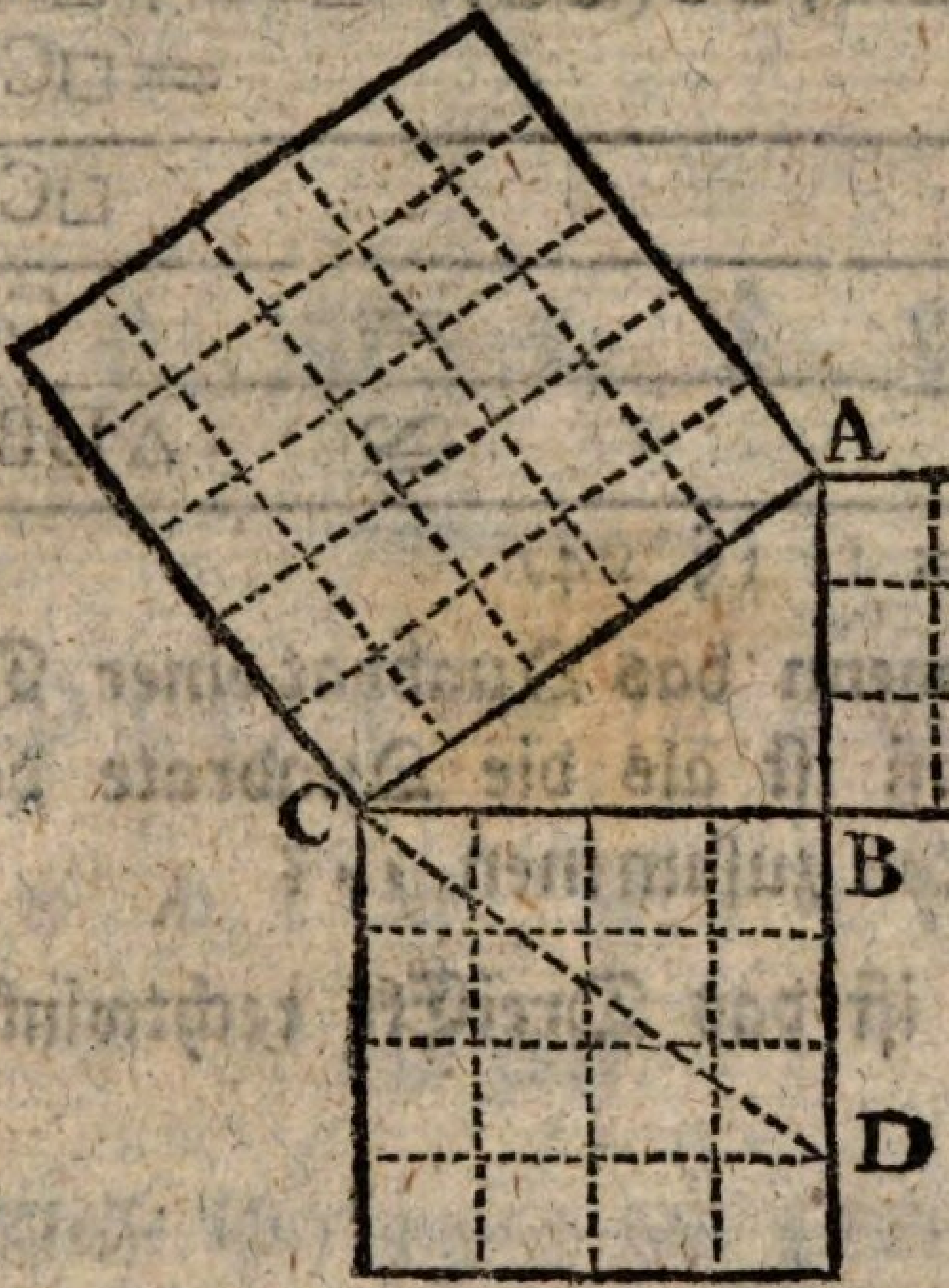
S. Wenn in einem DreiEkke zwei Seiten einzeln genommen, und ein nicht dazwischen liegender Winkel gleich sind zwei Seiten und einem gleichliegenden Winkel eines andern DreiEkks, und überdies den bekanten Seiten die dem bekanten Winkeln gegenüber stehenden länger sind als die anliegenden; so sind beide DreiEkke einander gleich und ähnlich.

L. So ist es richtig, und so ohngefähr hat Karsten diesen Satz gefasst, und erwiesen (Lehrbegriff der Math. Geom. §. 78). Da aber der Beweis weitläuftig und schwer und doch vielleicht nicht in aller Schärfe zu führen, und der Satz selbst entbehrlich ist; so wollen wir's lieber bei dieser Anzeige bewenden lassen.

Der neun und zwanzigste Satz.

§ 165.

L. Hier ist ein DreiEkk; welches aus den Seiten dreier Quadrate zusammen gesetzt ist, von denen das gröste so groß ist als die beiden kleinern zusammen. Ist das auf solche Art entstandene DreiEkk ABC rechtwinklig oder nicht?



S. Ich weis es nicht.

L. Um zur Gewisheit zu gelangen wollen wir ~~BD so lang als BA machen, und DC ziehn~~. — Was für ein DreiEkk ist nun DBC?

S. Ein rechtwinkliges (§ 137).

L. Wäre nun das DreiEkk ABC dem DBC gleich und ähnlich, so wäre ABC auch rechtwinklig (§ 24). Die GleichAehnlichkeit dieser DreiEkke aber ist erwiesen, wenn gezeigt ist daß die Linien AC und DC gleich lang sind (§ 63), und beide sind gleich lang, wenn ihre Quadrate gleich groß sind (§ 159). Die Gleichheit der Quadrate von AD und DC auszumitteln, ist also unser erstes Geschäfte.

S. 1) BA = BD (VS)
BC = BC (§ 29).

2) $\square AC = \square BA + BC$ (VS) $= \square BD + \square BC$ (§ 158)
$= \square CD$ (§ 160)

$\square AC$		$\square CD$ (§ 32)
AC	$=$	CD (§ 159)
$\triangle ABC$	$\cong$	$\triangle DBC$ (63)

$\angle ABC = \llcorner$ (§ 24)

L. Also wenn das Quadrat einer DreiEkks-Seite so groß ist als die Quadrate der beiden übrigen Seiten zusammen ,,?

S. So ist das DreiEkk rechtwinklig.

Geo-

Geometrie.

Drittes Buch.

Von dem Kreise:

und zwar:

I. Vom Kreise überhaupt; von geraden Linien in und an dem Kreise; von Winkeln im Kreise § 166 f.

II. Von Zerteilung der KreisLinie; Beschreibung ekkiger Figuren in und um den Kreis; Beschreibung des Kreises in und um ekkige Figuren; § 234. f.

I. Von dem Kreise überhaupt;

von geraden Linien in und an dem Kreise; von Winkeln im Kreise.

Erklärungen und GrundSäze.

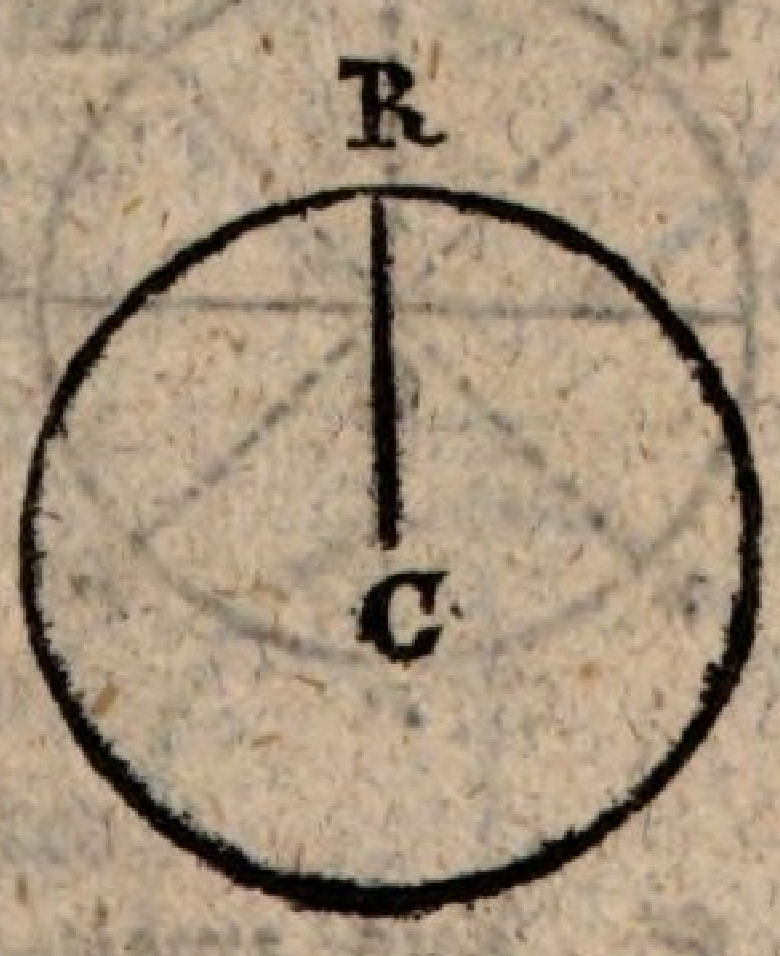
§ 166.

L. Da hier eigentlich vom Kreise gehandelt wird, so müssen wir uns zuvörderst was davon im ersten Buche (§ 20, 21, 22) beiläufig vorgekommen ist, wieder ins Gedächtniß rufen, um das noch rükkständige dran zu knüpfen. — Also: Was ist ein Kreis?

S. Der Kreis ist eine ebene Figur welche von einer Linie beschlossen wird, die von einem Punkte innerhalb überall gleich weit absteht (§ 20).

L. Recht! Und die krumme Linie welche den Kreis begrenzt heisst?

S. Die KreisLinie, oder auch der Umfang.



L. Und der Punkt C in ihrer Mitte?

S. Heisst der MittelPunkt.

L. Recht! Und die Linie CR welche vom MittelPunkt bis an den Umfang reicht?

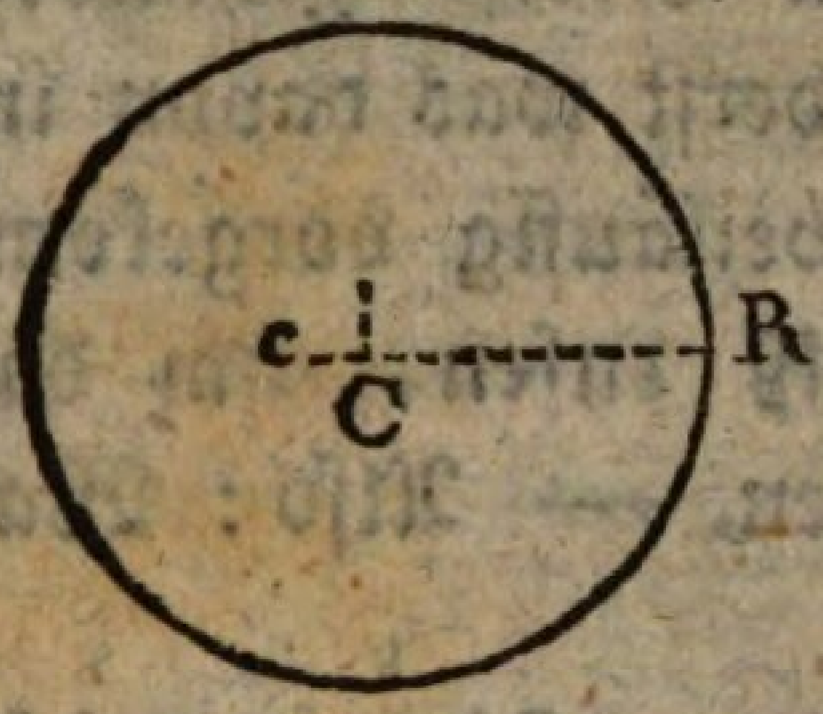
S. Heisst HalbMesser des Kreises.

L. Und welchen GrundSatz haben wir aus der Erklärung des Kreises, und des HalbMessers gezogen.

S. Alle HalbMesser eines Kreises sind gleich lang (§ 21).

§ 167.

L. Wie viel MittelPunkte kann ein Kreis haben?

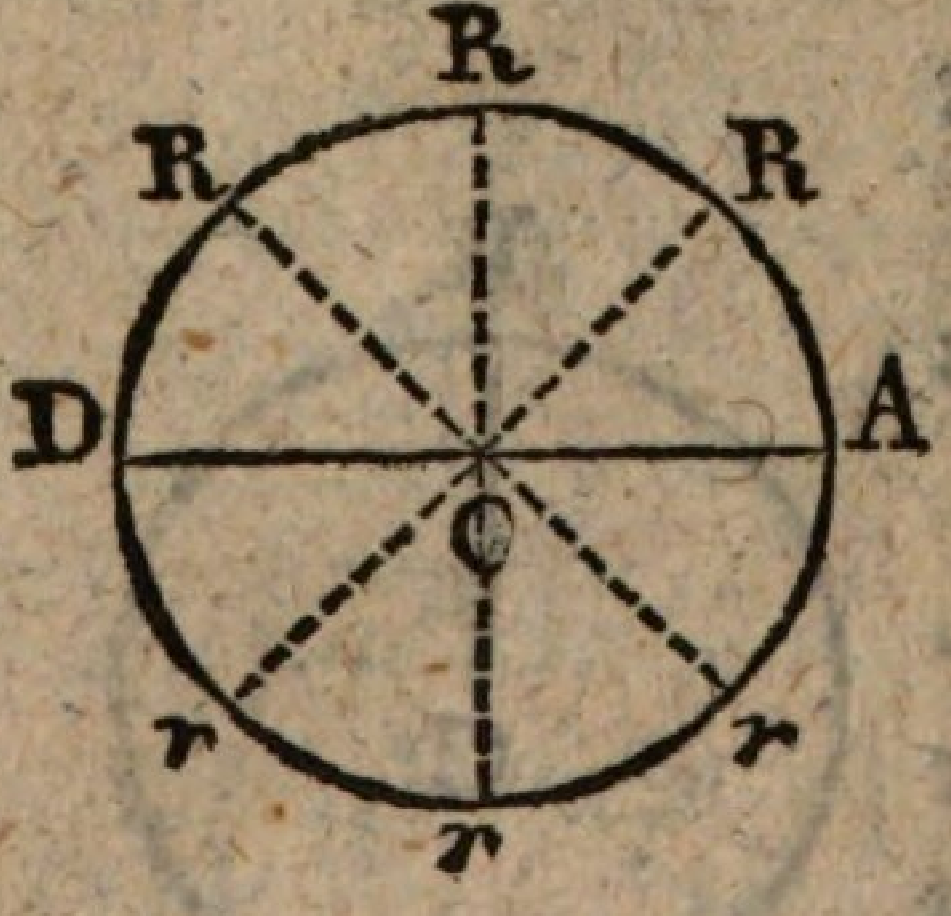


S. Nicht mehr als einen.

L. Könte er nicht zwei haben C und c?

S. Dan ist, wenn ich von c durch e eine gerade Linie cCr bis an den Umfang ziehe, cr = cCr, welches ungereimt ist (§ 45).

§ 168.



L. Eine gerade Linie ACD welche durch den MittelPunkt geht, und zu beiden Seiten vom Umfange begrenzt wird, heisst ein Durchmesser des Kreises. — Woraus besteht also ein Durchmesser?

S. Aus zwei HalbMessern CA und CD.

L. Und wie teilt der Durchmesser den Kreis?

S. In zwei gleiche Teile.

L. Das ist wahr, aber es bedarf Erläuterung. Alle HalbMesser sind gleich (§ 168). Wenn man sich nun in beiden Hälften eine unendliche Menge solcher HalbMesser RC = rC vorstellt, und nun, in Gedanken DrA auf DRA legt, so daß DA unverrükkt bleibt; wo muß jeder Punkt r hin fallen?

S. Auf einen ihm entsprechenden Punkt R (§26).

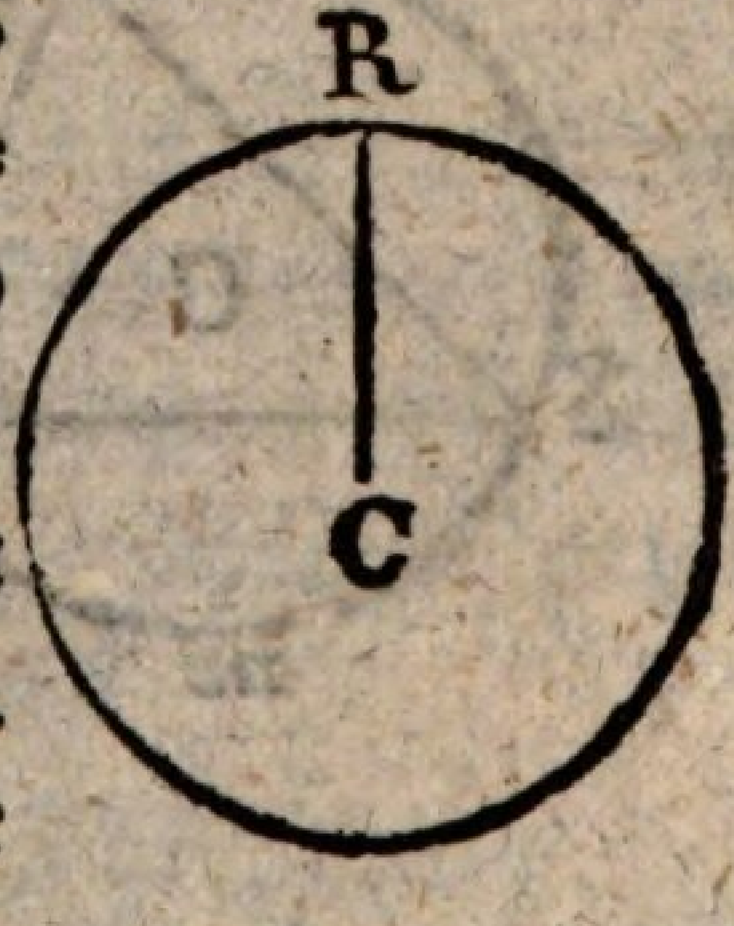
L. Aber jeder Punkt R sowol, als jeder r liegt in der KreisLinie (§ 166); wie fallen die KreisLinien also? Auf, oder neben einander?

S. Auf einander.

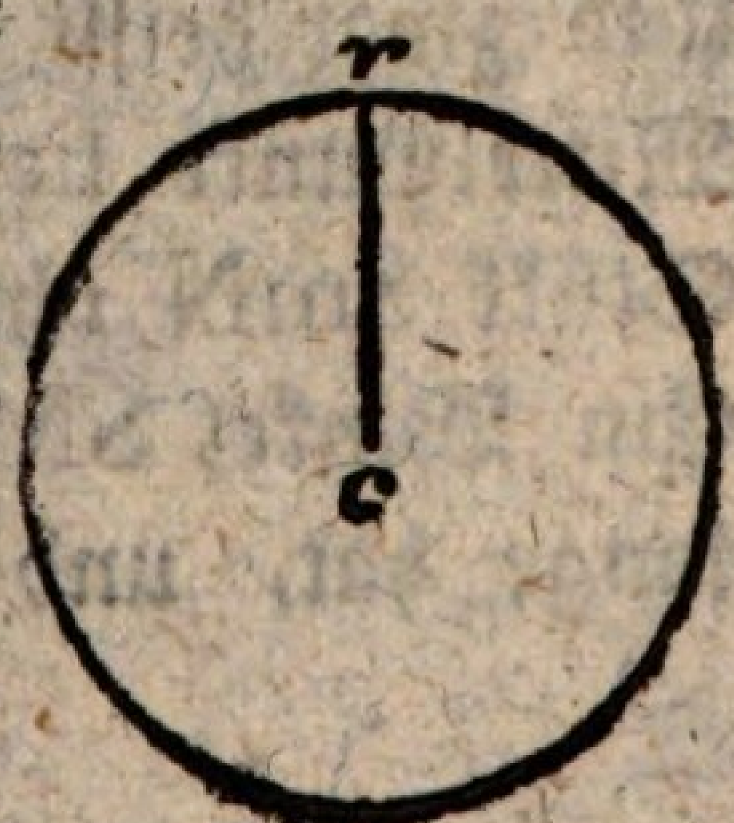
L. Recht. Und wo die KreisLinien aufhören, da werden sie von DA begrenzt. Der DurchMesser also teilt den Kreis in zwei gleichähnliche Stükke DRA und DrA welche HalbKreise heissen.

§ 169.

L. Mit gleichen HalbMessern, RC = rc, werden zwei Kreise beschrieben: welcher von beiden wird der gröste seyn?



S. Sie sind gleich groß: denn wenn ich c auf C, und cr auf CR lege, so dekken beide HalbMesser sich (§ 26). Drehe ich nun beide um ihren EndPunkt c C, so müssen ihre beiden andern EndPunkte r und R beständig auf einander bleiben, und folglich auch die von ihnen beschriebenen KreisLinien?

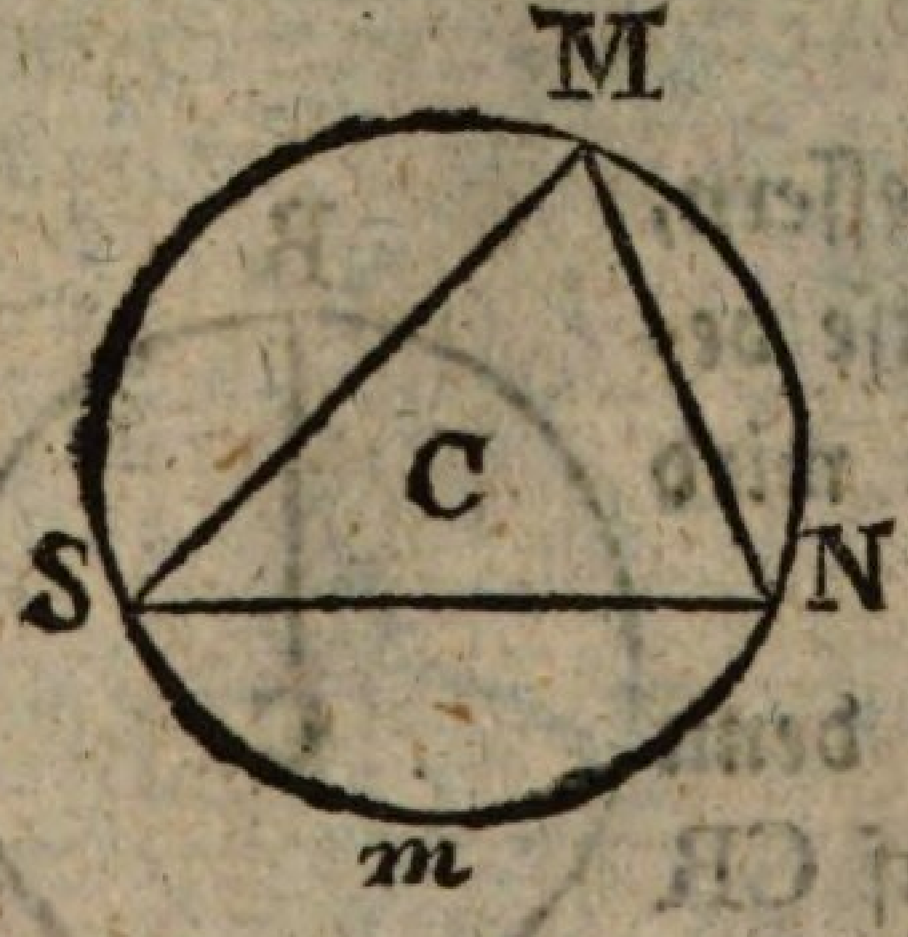


L.

L. Das ist richtig. Kreise also welche gleiche HalbMesser haben, sind einander gleich. Aber haben gleiche Kreise auch gleiche HalbMesser?

S. Gleiche Kreise dekken einander (§ 25, 26). Es müssen also ihre KreisLinien und ihre MittelPunkte auf einander fallen, und die zwischen beiden gezogenen Linien, das heisst ihre HalbMesser (§ 166), gleich lang seyn. Gleiche Kreise haben also gleiche HalbMesser.

§ 170.



L. Eine gerade Linie SN welche an beiden Enden vom Umfange begrenzt wird, aber nicht durch den MittelPunkt geht, heisst eine S e h n e. Die durch die Sehne abgeschnittenen Stükken des Kreises heissen Abschnitte. Und zwar heisst das Stükk SMN in welchem der MittelPunkt liegt, der grössere Abschnitt, und das Stükk SmN ohne MittelPunkt, der kleinere. — Ein Winkel SMN, der seine Spitze M im Umfange hat, und mit seinen Schenkeln MS, MN,

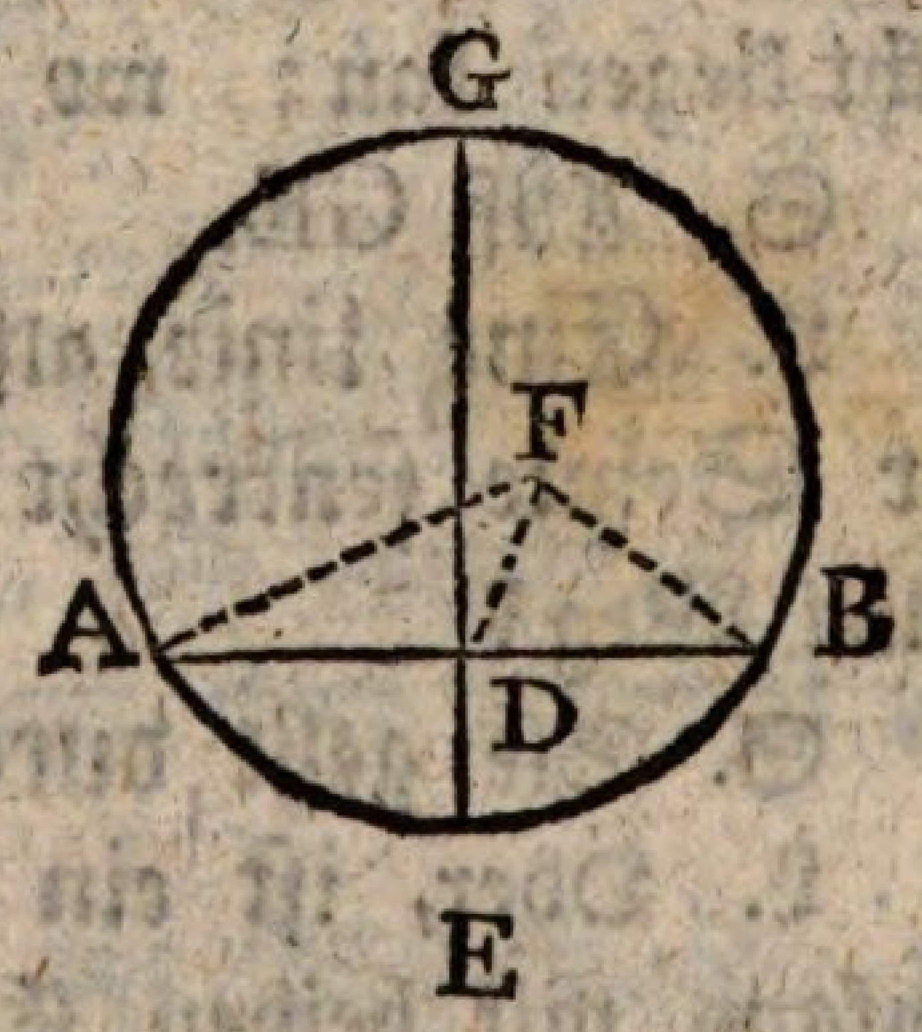
auf

auf den Enden der Sehne steht, heisst ein Winkel im Abschnitte: und zwar im grössern Abschnitte, wenn sein ScheitelPunkt M im Umfange des grössern; und im kleinern Abschnitte, wan der ScheitelPunkt m im kleinern liegt.

Der erste Satz.

§ 171.

L. Es wird ein beliebiger Kreis beschrieben, und in demselben eine Sehne AB nach Willkühr gezogen. Diese Sehne wird gehalbt in D, und durch D wird eine senkrechte Linie gezogen, die mit ihren beiden Enden G und E den Umfang erreicht. Die Frage ist: Geht diese Linie durch den MittelPunkt, oder nicht? — Wir wollen das letzte annehmen, und setzen, der MittelPunkt liege ausser GE, in F. Und nun werden einige HülfsLinien gezogen. Welche werden das wol seyn?



S. Ich werde FA, FB, und FD ziehn.

L. Gut! Und nun der Beweis, daß F der MittelPunkt nicht seyn könne?

S. Ist F der MittelPunkt; so ist

FA = FB (§ 166).

Da

Da nun auch DA = DB (Verf.)
und FD = FD (§ 29)

so ist △FDA ≅ △FDB (§ 63)

∠FDA = ∠FDB (§ 24)

∠FDA = ∟ } (§ 47)
∠FDB = ∟ }

Aber auch ∠GDA = ∟ = ∠GDA (Verf.)

∠FDA = ∠GDA = ∠FDB (§49);

welches unmöglich ist. (§ 45).

L. Da nun der MittelPunkt ausserhalb GE nicht liegen kan; wo muß er liegen?

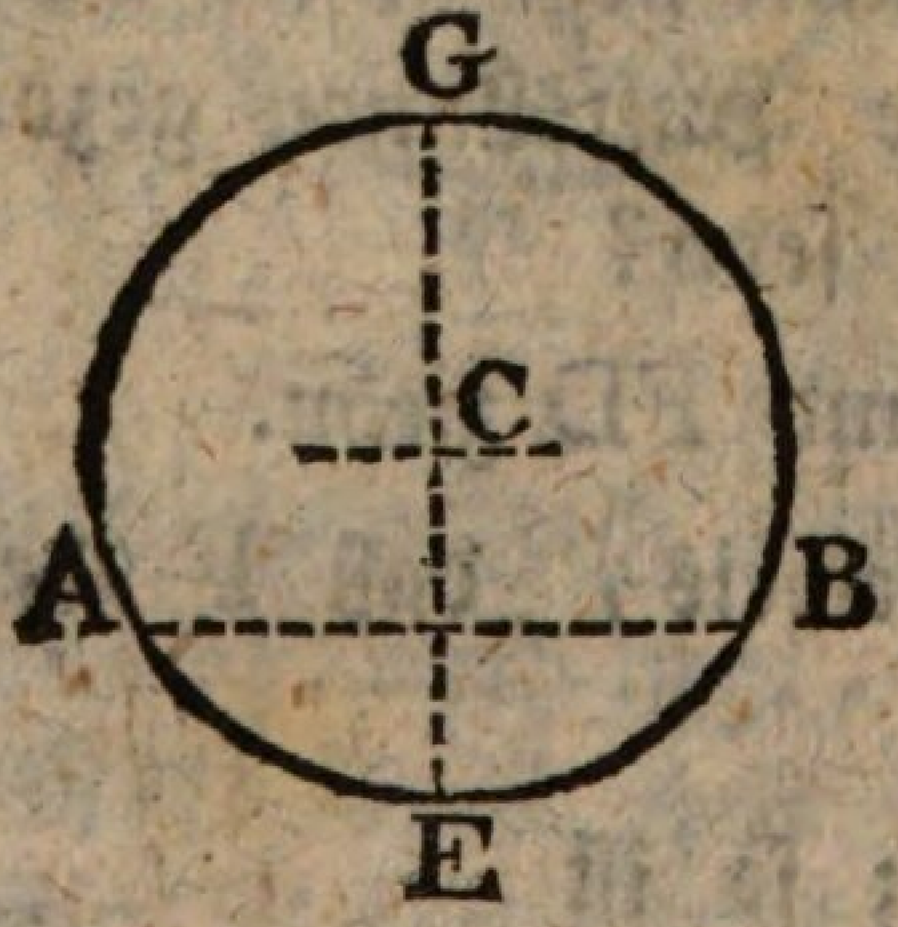
S. Auf GE.

L. Eine Linie also welche auf der Mitte einer Sehne senkrecht steht, was nimmt die für einen Weg?

S. Sie geht durch den MittelPunkt.

L. Oder, ist ein Durchmesser, wenn sie den Umfang mit beiden Enden erreicht. (§ 168).

§ 172.



L. Der MittelPunkt also ist auf GE; aber in welcher Gegend von GE?

S. Vom Umfange überall gleich weit (§ 166): also in der Mitte.

L. Wenn also der MittelPunkt eines Kreises unbekant wäre, wie würde man ihn finden?

S.

S. Man muß auf der Mitte D einer Sehne AB eine senkrechte, an beiden Enden vom Umfange begrenzte Linie EG errichten, und diese halben in C. (§ 171).

Der zweite Satz.

§ 173.

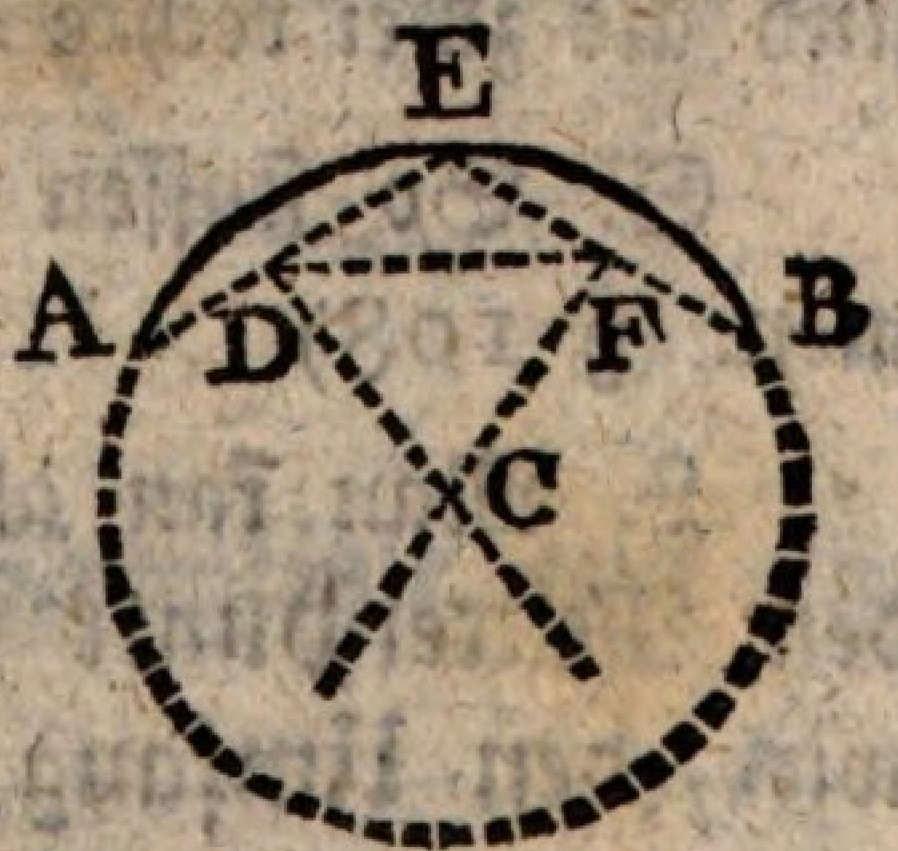
L. Den MittelPunkt eines ganzen Kreises wissen wir nun zu finden: wie aber, wenn nur ein Stükk einer KreisLinie, ein Bogen AEB gegeben wäre, zu welchem der MittelPunkt sollte gefunden werden?

S. Ich muß verfahren, wie vorhin (§ 172): eine Sehne AB ziehn, und auf ihrer Mitte D eine senkrechte Linie errichten.

L. In dieser Linie liegt der MittelPunkt, das ist richtig: aber in welcher Gegend?

S. In ihrer Mitte.

L. Ihr eines Ende ist unbegrenzt; wo ist also ihre Mitte?



S. Ich werde das Verfahren verdoppeln. Das heisst, ich werde zwei Sehnen, AE und EB ziehn, und auf beider Mitte, D und F, senkrechte Linien errichten; so ist ihr Durchschnitts-Punkt C der MittelPunkt des Bogens AEB.

L. Durch den MittelPunkt gehn beide Linien, das ist wahr: (§ 171) man kan aber fragen: Müssen sie sich auch notwendig schneiden?

S. Schnitten sie sich nicht, so müste, da jede derselben durch den MittelPunkt geht, der Kreis zwei MittelPunkte haben; welches nicht möglich ist. (§ 167).

L. Der Beweis ist nicht zu verwerfen: gewöhnlich aber gibt man einen andern, den wir uns, weil er auch nicht schwer ist, bekant machen wollen. Es wird eine Linie DF gezogen. Was für Winkel macht diese mit den senkrechten Linien DC und FC? Rechte, spitze, oder stumpfe?

S. Spitze.

L. Woher das?

S. ∠EDC = ∟

∠FDC > ∟ (§ 45), das ist spitz (§ 48). Eben so ist es mit DFC.

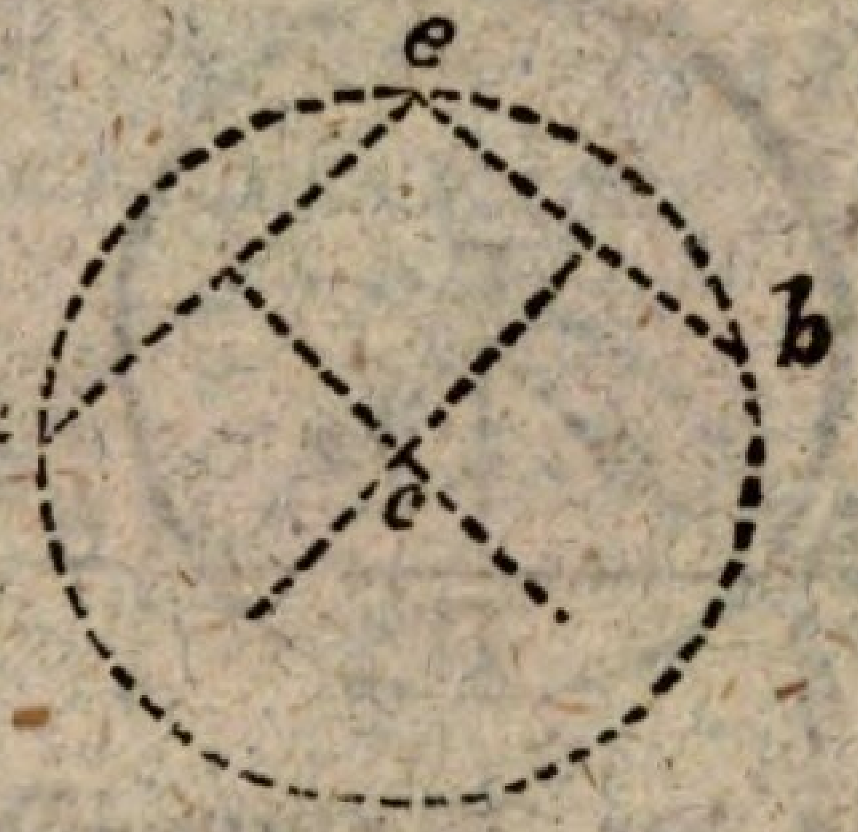
L. Und wenn die innern GegenWinkel kleiner sind als zwei rechte = = ?

S. So stossen die geschnittenen Linien zusammen. (§ 108)

L. Man kan also zu einem gegebenen Bogen den MittelPunkt finden, und wenn es erfordert wird, den Umfang ergänzen.

§ 174.

L. Gesetzt aber es wäre kein Bogen, sondern nur drei nicht in gerader Richtung liegende Punkte a, e, b, gegeben, und man solte den MittelPunkt, nämlich einen vierten Punkt c finden, der von jedem der drei gegebenen gleich weit abstände?

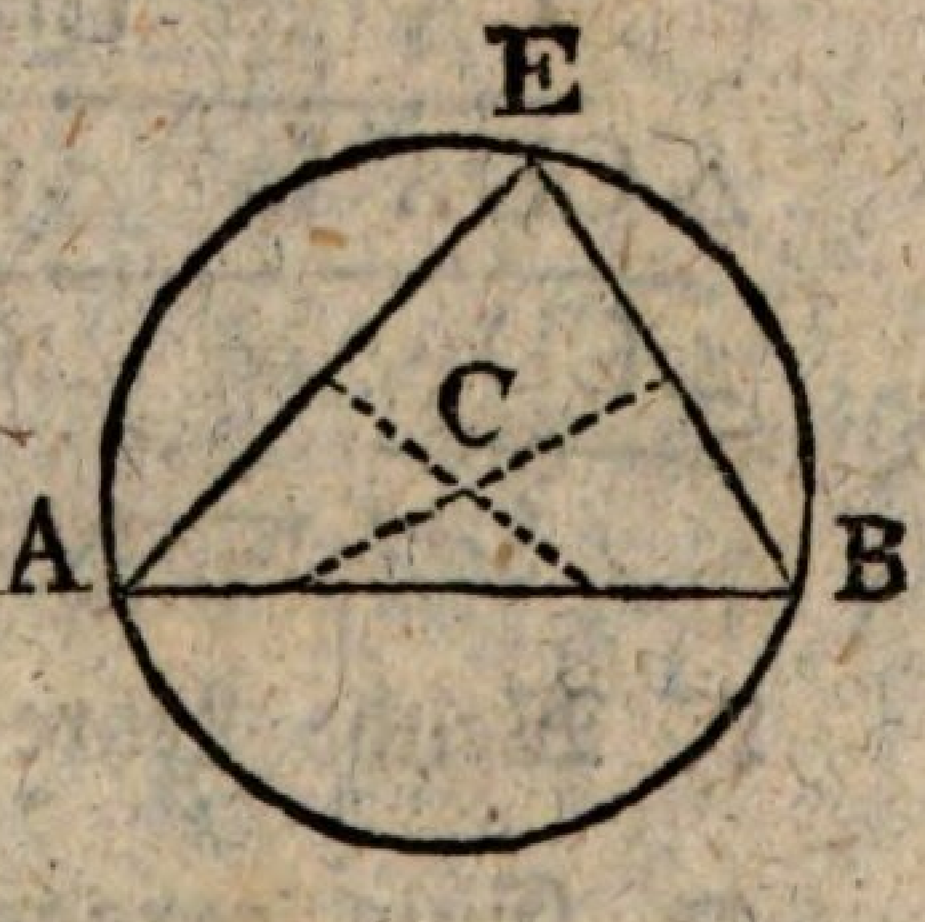


S. Dan verbinde ich die Punkte a und e, e und b durch gerade Linien, ae, eb, betrachte diese als Sehnen, und verfahre wie vorhin.

L. Recht! Man kan also zu drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten den MittelPunkt finden, und eine KreisLinie durch sie beschreiben.

§ 175.

L. Hier ist ein DreiEkk AEB. Lässt sich wol eine KreisLinie durch alle Ekken A, E, B, desselben führen?

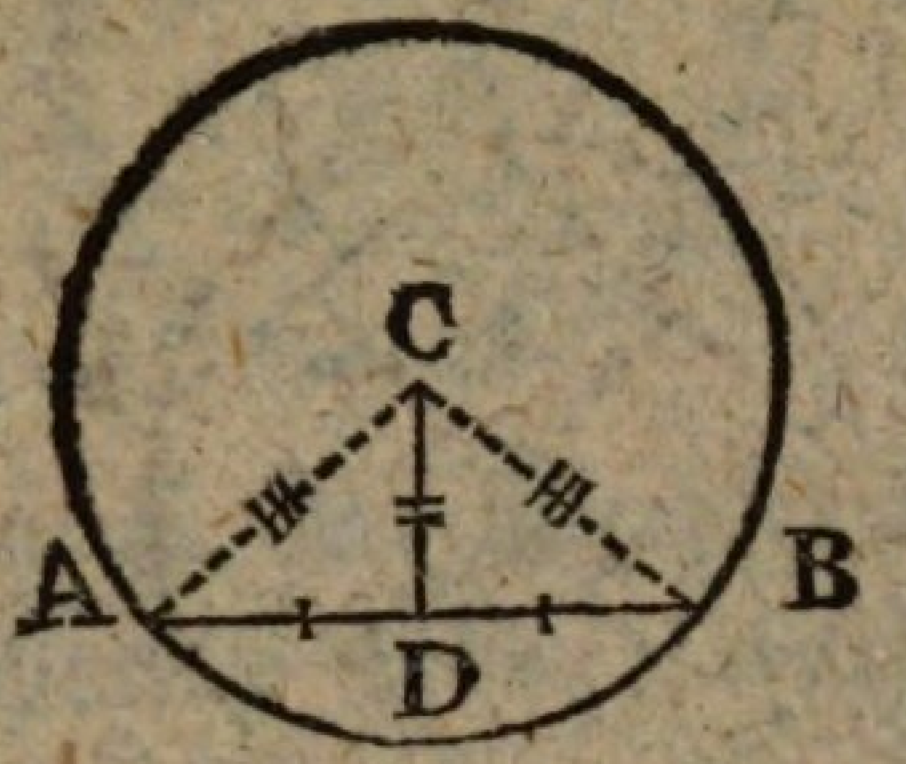


S. O ja; dan nehme ich die DreiEkksSeiten AE, EB für Sehnen an, und verfahre wie bei § 173 und 174.

L. Es lässt sich also eine Kreislinie um ein DreiEkk beschreiben.

Der dritte Satz.

§ 176.



L. Aus einem Punkte C wird mit beliebigem HalbMesser, ein Kreis beschrieben, und in demselben eine Sehne AB gezogen. Diese wird gehalbt in D, und der TheilungsPunkt D wird mit dem MittelPunkte C, durch eine Linie CD verbunden. — Wie steht diese Linie CD auf der Sehne? Senkrecht? oder schief?

S. Ich werde ein Par HülfsLinien CA, CB ziehn: So ist

CD = CD (§ 29)
DA = DB (Verg.)
CA = CB (§ 166)

△CDA ≅ △CDB (§ 63).

∠CDA = ∠CDB (§ 24)

CD senkrecht auf AB (§ 47)

L. Welche Lehre können wir daraus ziehn?

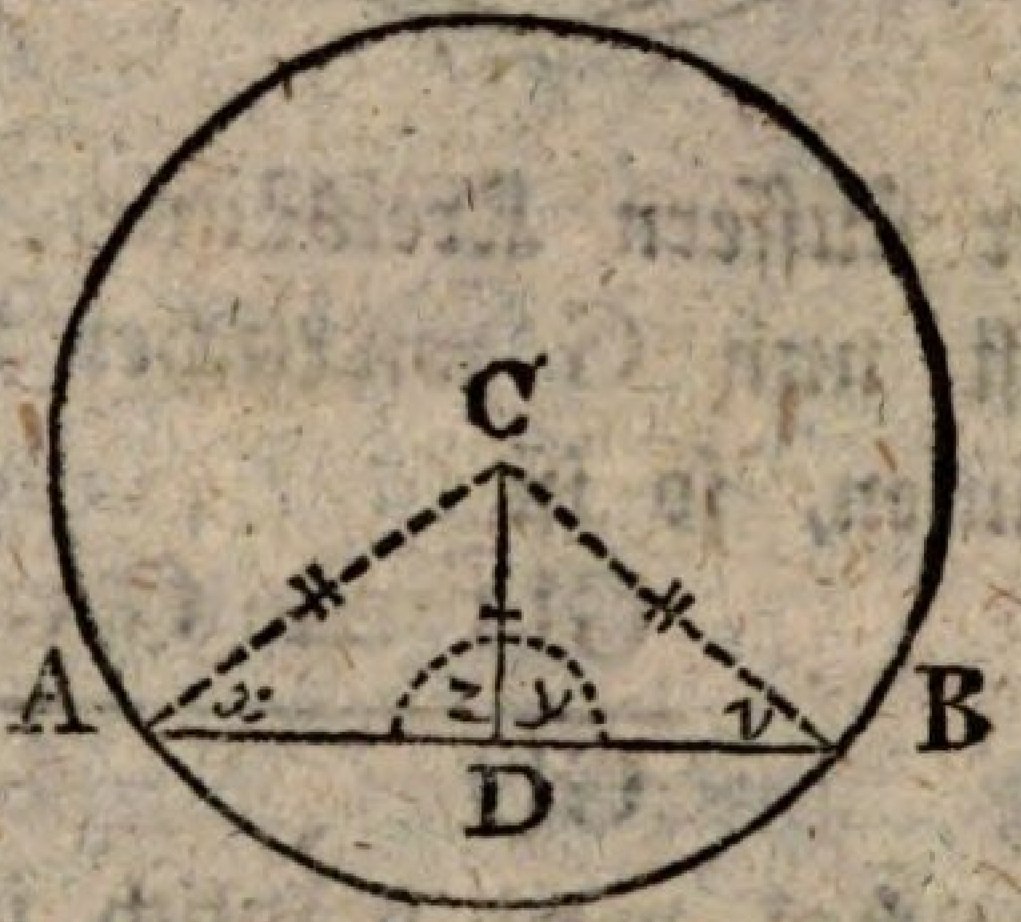
S. Eine gerade Linie vom MittelPunkt eines Kreises auf die Mitte seiner Sehne gezogen, steht senkrecht auf ihr.

Der

Der vierte Satz.

§ 177.

L. In einem Kreise wie voriger (§ 176) wird vom MittelPunkte C, auf eine Sehne AB, eine senkrechte Linie CD gezogen. — Wie wird die Sehne durch diese Linie CD geteilt? In gleiche oder ungleiche Teile?



S. Ich werde wieder HülfsLinien CA, CB ziehn.

L. Und mehrer Bequemlichkeit wegen wollen wir noch überdies, die Winkel bei D, mit z und y, und bei A und B, mit x und v bezeichnen.

S. $z = \llcorner = y$ (§ 47)
$CD = CD$ (§ 29)
$CA = CB$ (§ 166)

$\triangle CDA \cong \triangle CDB$ (§ 163)

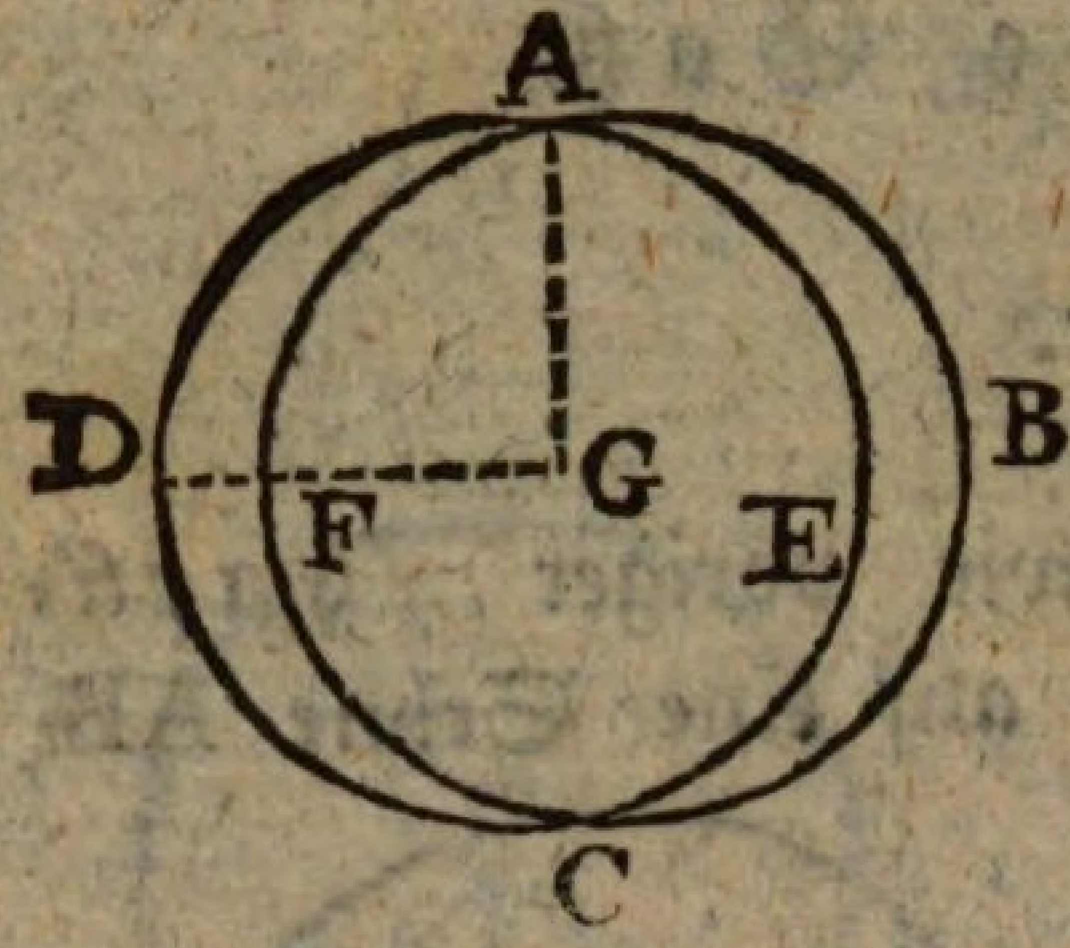
$DA = DB$ (§ 24).

L. Also eine vom MittelPunkt des Kreises auf die Sehne senkrecht gezogene Linie halbt sie.

Der fünfte Satz.

§ 178.

L. Zwei KreisLinien, ABCFA und AECDA, schneiden sich in zwei Punkten A und C. Haben sie einerlei MittelPunkt, oder nicht?



S. Wir wollen annehmen sie haben einen gemeinschaftlichen MittelPunkt G. Nun ziehe ich von G, nach einem DurchschnittsPunkte A, und nach einem andern Punkte D der äussern KreisLinie, gerade Linien GA, GFD. Ist nun G wirklicher MittelPunkt beider KreisLinien, so ist

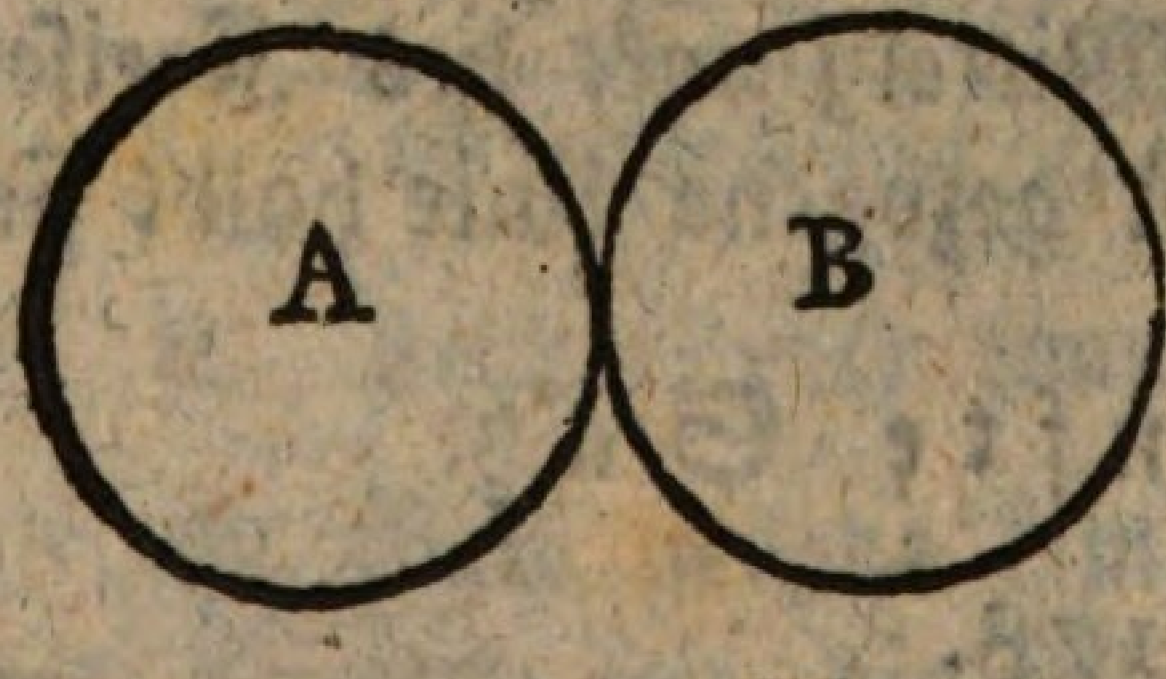
$$\frac{GD = GA = GF \ (\S\ 166)}{GD \quad\quad = GF \ (\S\ 31);}$$

welches nicht möglich ist (§ 45).

L. Zwei KreisLinien also, die sich schneiden, haben keinen gemeinschaftlichen MittelPunkt.

Der sechste Satz.

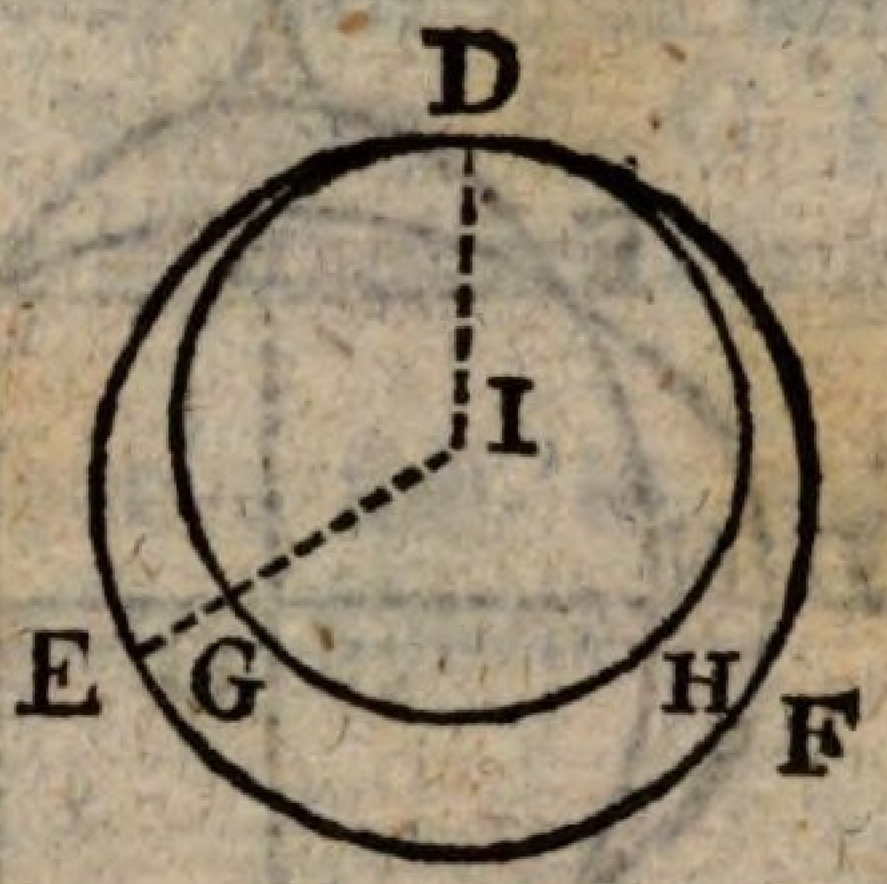
§ 179.



L. Kreise können auf zweierlei Art zusammen stossen, oder sich berühren. Entweder ausserhalb, wie A und B; oder innerhalb, wie DEF und DGH. Daß sie im ersten Falle nicht einerlei MittelPunkt haben, kan ohne Beweis angenommen werden: der zweite Fall aber erfodert einen.

S.

S. Ich nehme, wie vorhin, einen gemeinschaftlichen MittelPunkt I an, und ziehe von da, nach den Berührungs-Punkte D, und nach einem andern beliebigen Punkt E der äussern KreisLinie gerade Linien ID, IGE; so ist



IG = ID = IE (§ 166)

welches unmöglich ist (§ 45).

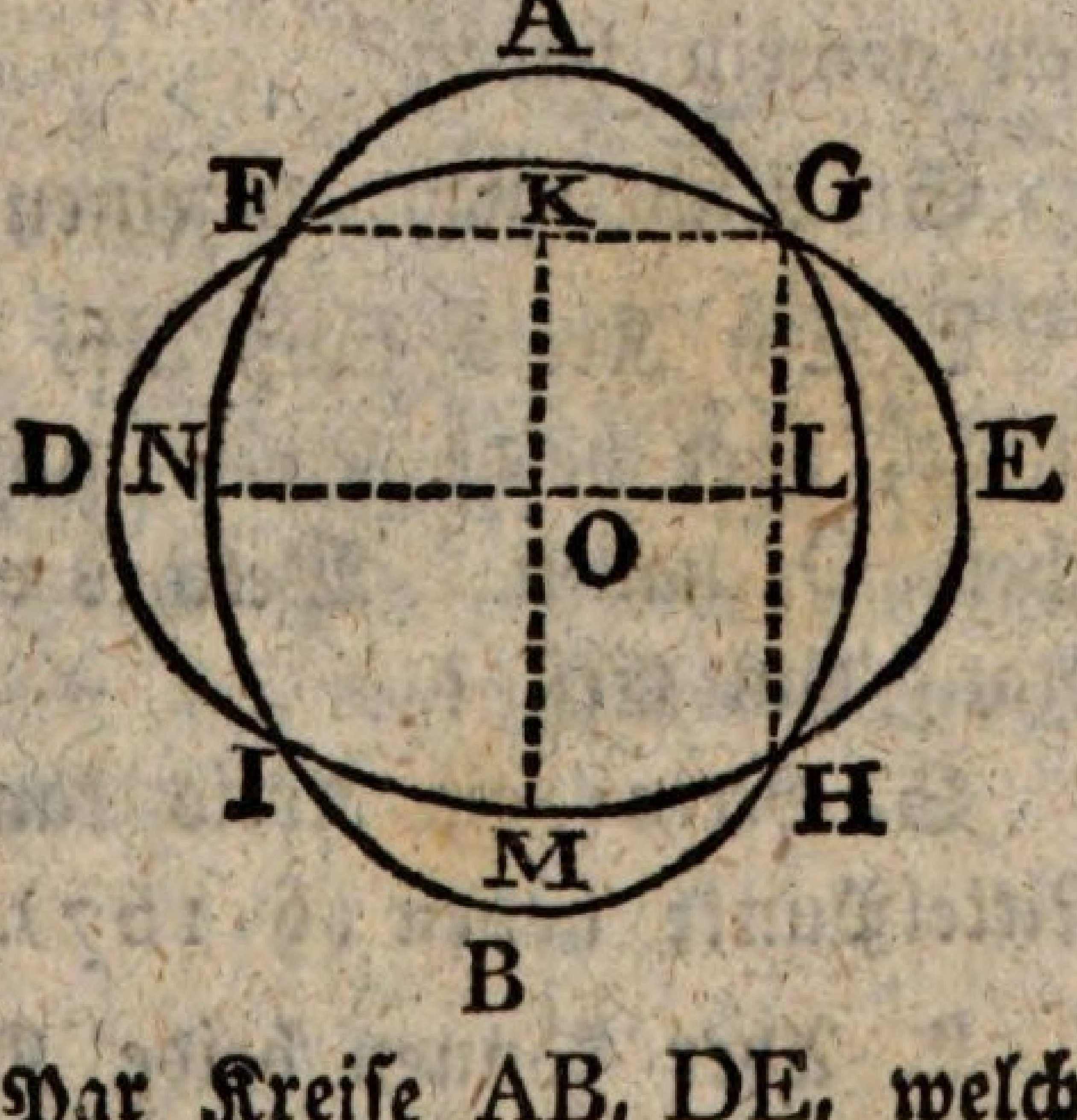
L. Wie lautet nun unser LehrSatz?

S. **Kreise die sich berühren haben nicht einerlei MittelPunkt.**

Der siebente Satz.

§ 180.

L. In wie viel Stellen können sich zwei KreisLinien einander kreuzen, oder schneiden?



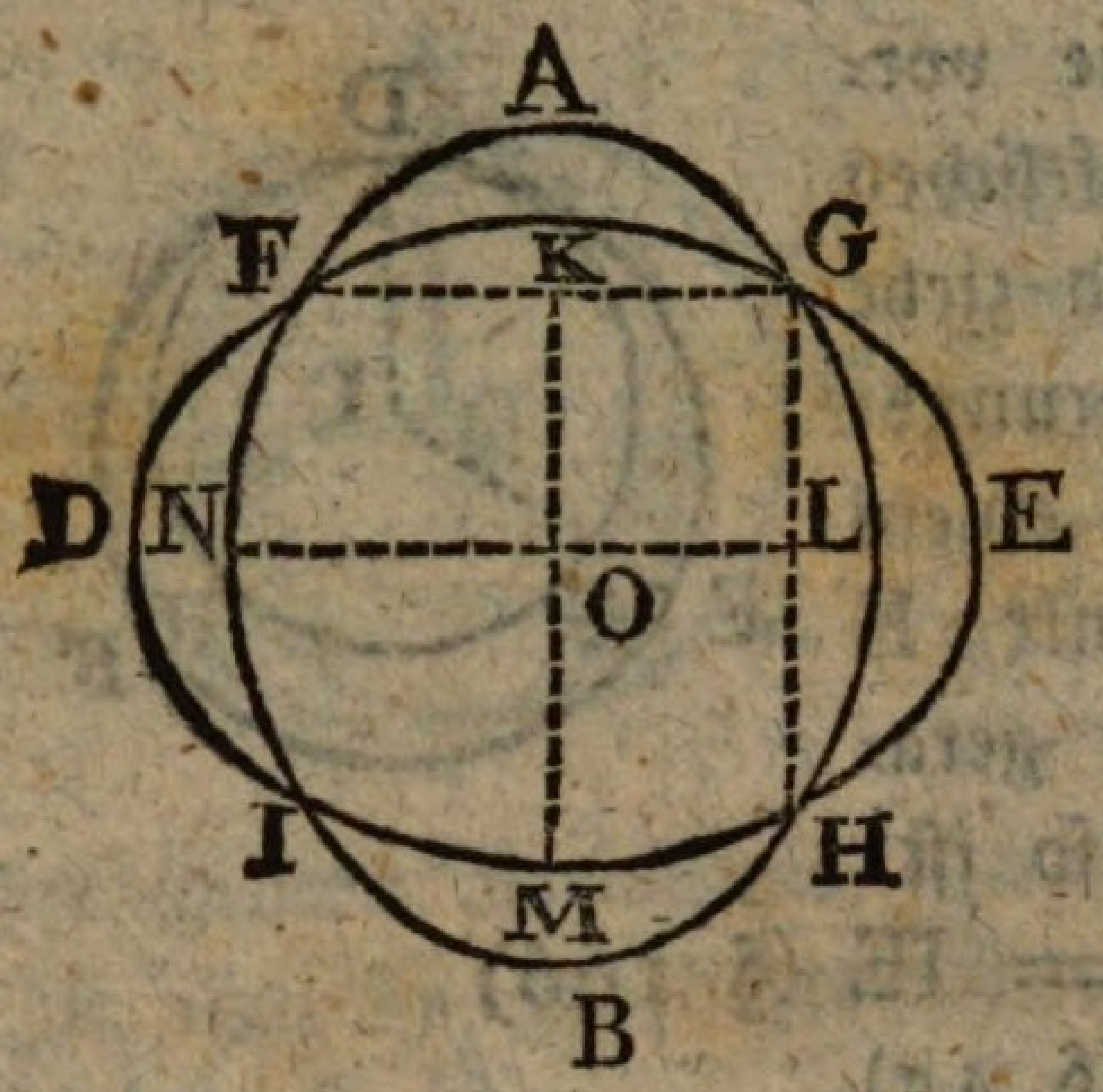
S. In zwei Stellen. (Zeichn. § 178).

L. In nicht mehren?

S. Nein.

L. Hier sind ein Par Kreise AB, DE, welche sich in vier Punkten, F, G, H, I, schneiden.

S. Ja, das sind keine ächte Kreise (§ 20, 166).



L. Die Frage wäre also: können ächte Kreise sich in mehr als zwei Stellen schneiden? — Zur Beantwortung werden Hülfs-Linien erfordert. Was für welche werden das seyn?

S. Zwei Par benachbarte DurchschnittsPunkte, F und G, G und H, werden durch gerade Linien FG, GH verbunden.

L. Recht! Diese sind Sehnen beider Kreise (§ 170). Wenn ich daher aus ihren Mitten, K und L, senkrechte Linien KM, und LN errichte; welchen Weg nehmen die?

S. Durch den MittelPunkt (§ 171).

L. Und wie viel Punkte können zwei gerade Linien gemein haben?

S. Nicht mehr als einen Punkt O (§ 9).

L. Ein Kreis muß also mehr als einen MittelPunkt, oder beide Kreise müssen einen gemeinschaftlichen, O, haben. Welches von beiden findet hier Stat? das Erste?

S. Nein: ein Kreis kan nicht mehr als einen MittelPunkt haben (§ 167).

L. Aber können beide Kreise nicht einen gemeinschaftlichen MittelPunkt O haben?

S. Eben so wenig (§ 178).

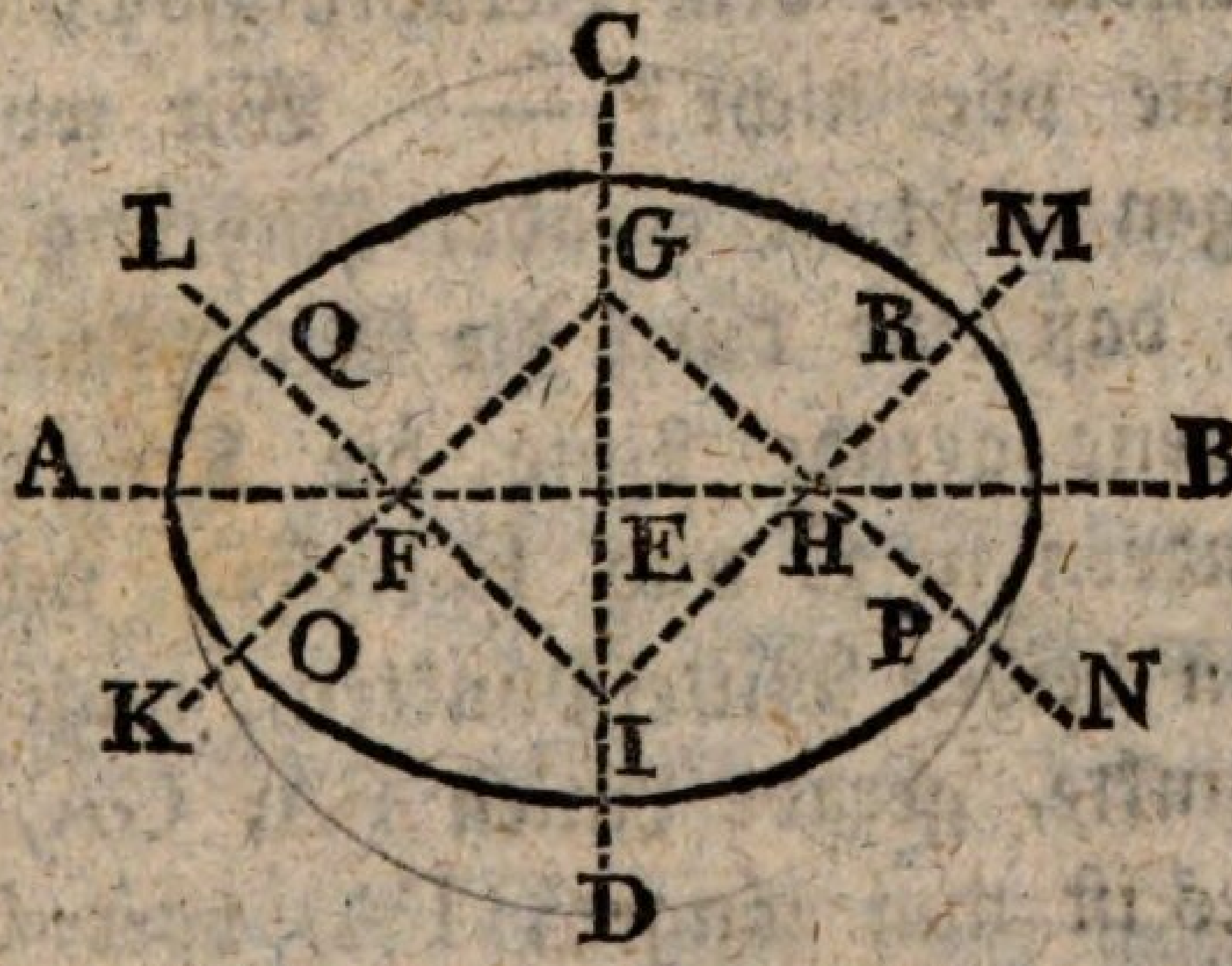
L.

L. Eins von beiden wäre doch notwendig, wenn beide Kreislinien sich in drei Punkten, F, G, H, schnitten. Was bleibt uns also anzunehmen übrig?

S. Zwei Kreislinien können sich in nicht mehr als zwei Punkten einander schneiden.

§ 181.

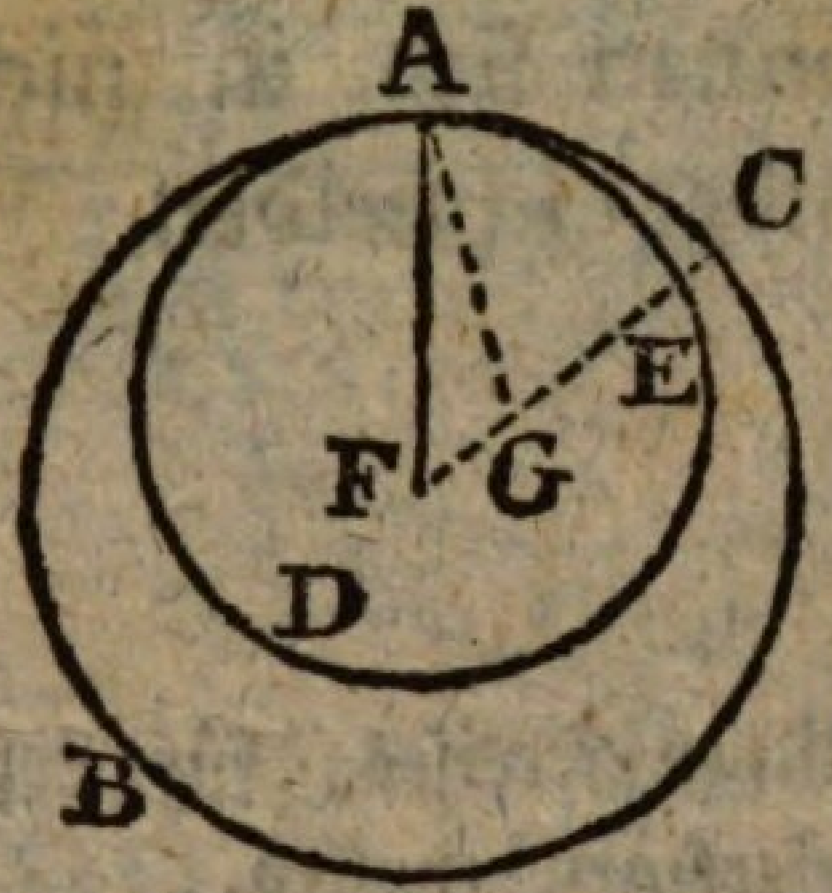
Anweisung zu Zeichnung eines länglichen Kreises, für Lehrlinge, welche alle Zeichnungen selbst verfertigen wollen.



Eine unbestimmte gerade Linie AB wird von einer andern CD in E senkrecht durchschnitten. Von E aus werden, auf den sich kreuzenden Linien, in willkührlicher, aber gleicher Entfernung, die Punkte F, G, H, I bemerkt. Von G und I werden, durch F und H, unbestimmte Linien GK, GN, IL, IM gezogen. Aus G wird, mit willkührlichem HalbMesser, zwischen GK und GN, ein Bogen OP; und aus I mit gleichem HalbMesser, zwischen IL und IM, ein Bogen QR beschrieben. Zulezt wird mit dem HalbMesser FO, HP, aus F der Bogen und aus H der Bogen RP gezeichnet und die Figur geschlossen.

Der achte Satz.

§ 182.



L. Zwei Kreise ABCA und ADEA berühren sich innerhalb in A; haben sie einerlei MittelPunkt, oder nicht?

S. Sie haben nicht einerlei MittelPunkt. (§ 179).

L. Aber liegen ihre MittelPunkte mit dem BerührungsPunkte A, in gerader Linie oder nicht? — Wir wollen annehmen sie lägen nicht in gerader Richtung mit ihm, sondern so, daß eine durch die MittelPunkte F und G gezogene gerade Linie die KreisLinien nicht in A, sondern in C und E treffe; und nun wollen wir von beiden MittelPunkten, nach dem BerührungsPunkte, gerade Linien FA, GA, ziehn. — Welches ist nun länger, FA, oder GA + FG?

S. FG + GA > FA (§ 86).

L. Und wie groß ist FA?

S. FA = FC (§ 21).

L. Also FG + GA > FA = FC

S. $\overline{FG + GA} > \overline{FC}$ (§ 34)

L Aber FC = FG + GC (§ 45)

folglich *FG* + GA > *FG* + GC

Und nun Gleiches von Ungleichem weggenommen, was bleibt übrig?

S.

S. GA > GC (§ 37)

L. Und wie lang ist GA?

S. GA = GE (§ 21)

L. GE = GA > GC

S. GE > GC (§ 34).

L. Oder GE > GE + EC; der Teil grösser als das Ganze. Kan das seyn?

S. Nein; das Ganze ist grösser als sein Teil (§ 45).

L. Wie kommen wir denn zu den unmöglichen Dingen, daß GE grösser sei als GC?

S. Weil wir eine unmögliche Sache angenommen haben, daß nämlich die MittelPunkte mit dem BerührungsPunkte nicht in gerader Linie liegen.

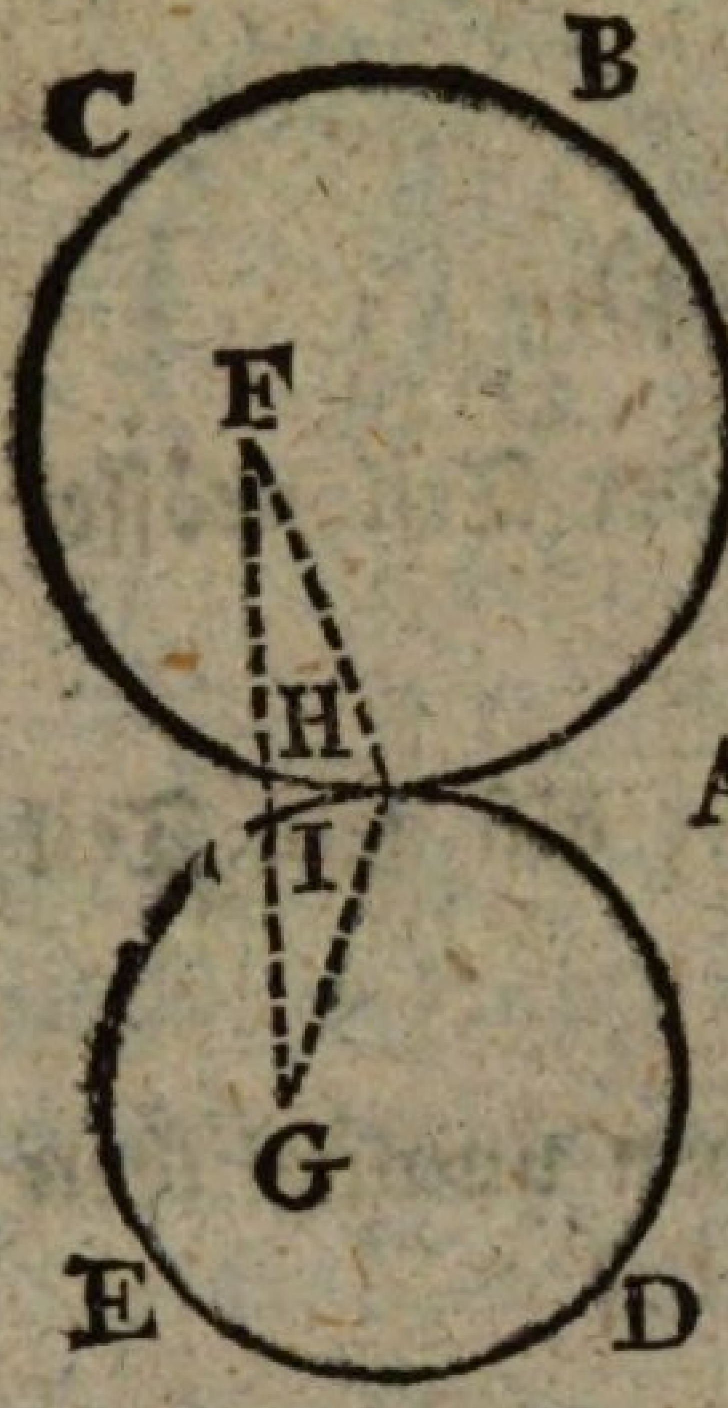
L. Wenn dies unmöglich ist, was muß man denn annehmen?

S. Wenn zwei Kreise sich innerhalb berühren; so liegen ihre MittelPunkte mit dem BerührungsPunkte in gerader linie.

L. Recht! Und gesetzt es gäbe der BerührungsPunkte mehr als einen, welches noch unentschieden ist; so würde sich von jedem derselben beweisen lassen; daß eine durch beide MittelPunkte gehende gerade Linie ihm nicht ausweichen könne.

Der neunte Satz.

§ 183.



L. Zwei Kreise ABCA und ADEA berühren sich ausserhalb in A. Daß diese nicht einerlei MittelPunkt haben ist klar; ob aber beide MittelPunkte mit dem BerührungsPunkte A in gerader Linie liegen, oder nicht, das ist die Frage. Wie werden wir die entscheiden?

S. Wir nehmen an, die MittelPunkte F und G hätten eine solche Lage, daß eine von einem zum andern gezogene gerade Linie FG nicht durch den BerührungsPunkt gehe, sondern die KreisLinie in H und I schneide. Hierauf ziehn wir die Linien AF und AG.

L. Bis dahin recht! Wir haben nun ein DreiEkk AFG, dessen SeitenLängen wir untersuchen müssen, um zu sehen ob Ungereimtheiten, oder WiderSprüche gegen angenommene oder erwiesene Sätze zum Vorschein kommen: ob z. B. eine Seite des DreiEkks so lang, oder gar länger befunden würde als zwei zusammen genommen. — Wie lang sind FH und GI, wenn F und G für MittelPunkte angenommen werden?

S. $\left.\begin{array}{l} FH = FA \\ GI = GA \end{array}\right\}$ (§ 21)

$FH + GI = FA + GA$ (§ 36)

$FH + AI + IG > FA + GA$ (§ 38).

L. Kan das seyn?

S. Nein, es widerspricht dem Satze, daß zwei Seiten eines DreiEkks zusammen länger sind, als die dritte (§ 86).

L. Können also die MittelPunkte zweier sich ausserhalb berührender Kreise eine solche Lage haben, daß eine von einem zum andern gezogene gerade Linie nicht den BerührungsPunkt treffe?

S. Nein: Wenn zwei Kreise sich ausserhalb berühren, so geht eine beide MittelPunkte verbindende gerade Linie durch den BerührungsPunkt.

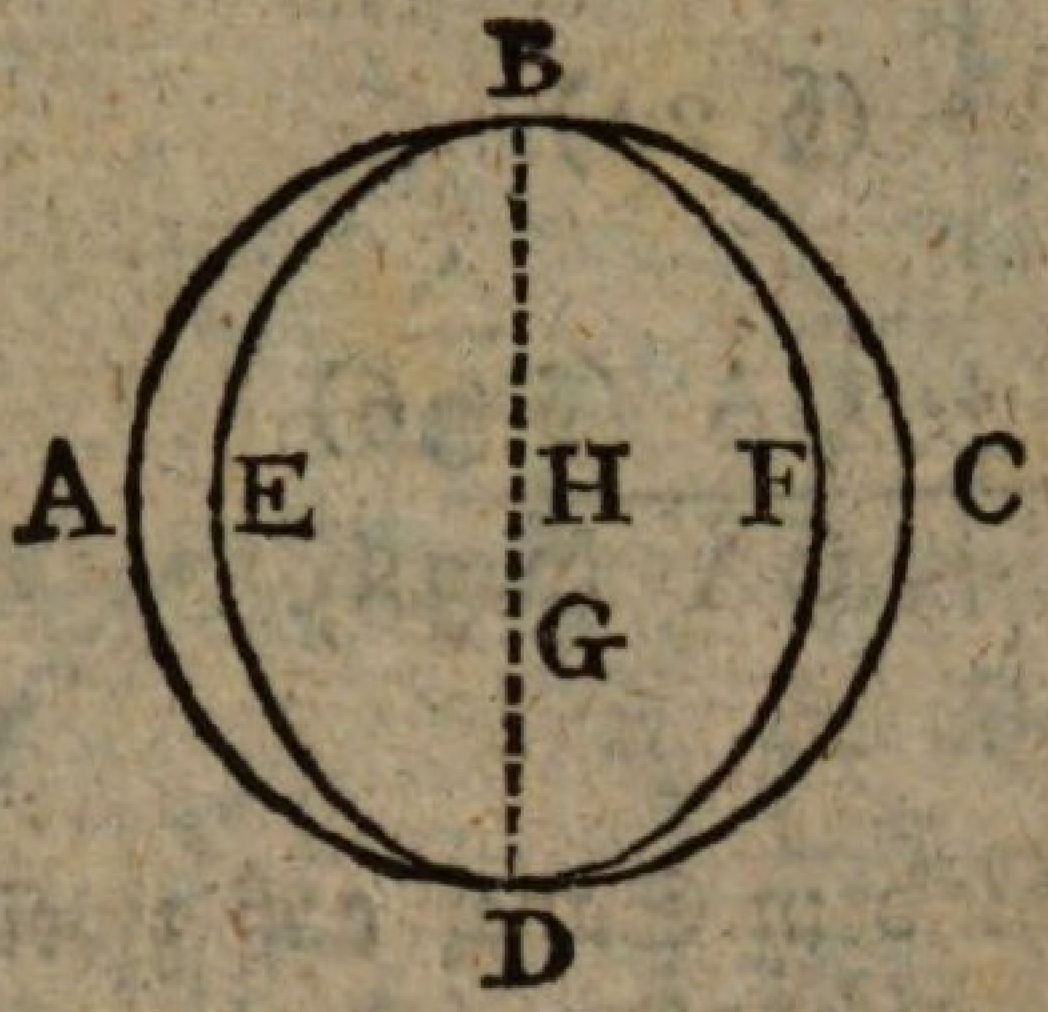
Der zehnte Satz.

§ 184.

L. Zwei Kreise können einander in zwei Punkten schneiden (§ 180), aber in wie viel Punkten können sie sich einander berühren?

S. Das weis ich nicht.

L. Wir wollen einmal annehmen zwei Kreise ABCDA und BEDFB berührten sich innerhalb, in zwei einander gerade gegenüber stehenden Punkten



B und D. — Können sie einerlei MittelPunkt haben?

S. Nein. (§ 179).

L. Welchen Weg nimt eine durch beide MittelPunkte gezogene Linie?

S. Durch den BerührungsPunkt (§ 182).

L. Da hier der BerührungsPunkte zwei angenommen werden, und § 182 erwiesen ist, daß eine durch beide MittelPunkte gezogene gerade Linie keinem BerührungsPunkte ausweichen kan; so muß sie durch beide gehn. Wir wollen also von einem BerührungsPunkte zum andern eine gerade Linie BD ziehn, und auf ihr die MittelPunkte H und G annehmen. — Wie lang ist nun HB?

S. HB = HD (§ 21).

L. Und GD?

S. GD = GB (§ 21).

L. Recht! GD = GB. Nun wollen wir auch beweisen daß GD kleiner ist als GB.

S. HB = HD

HB > GD (§ 38)

GB > GD (§ 39).

L. Da haben wirs:

GB = GD

und GB > GD

Ist das möglich?

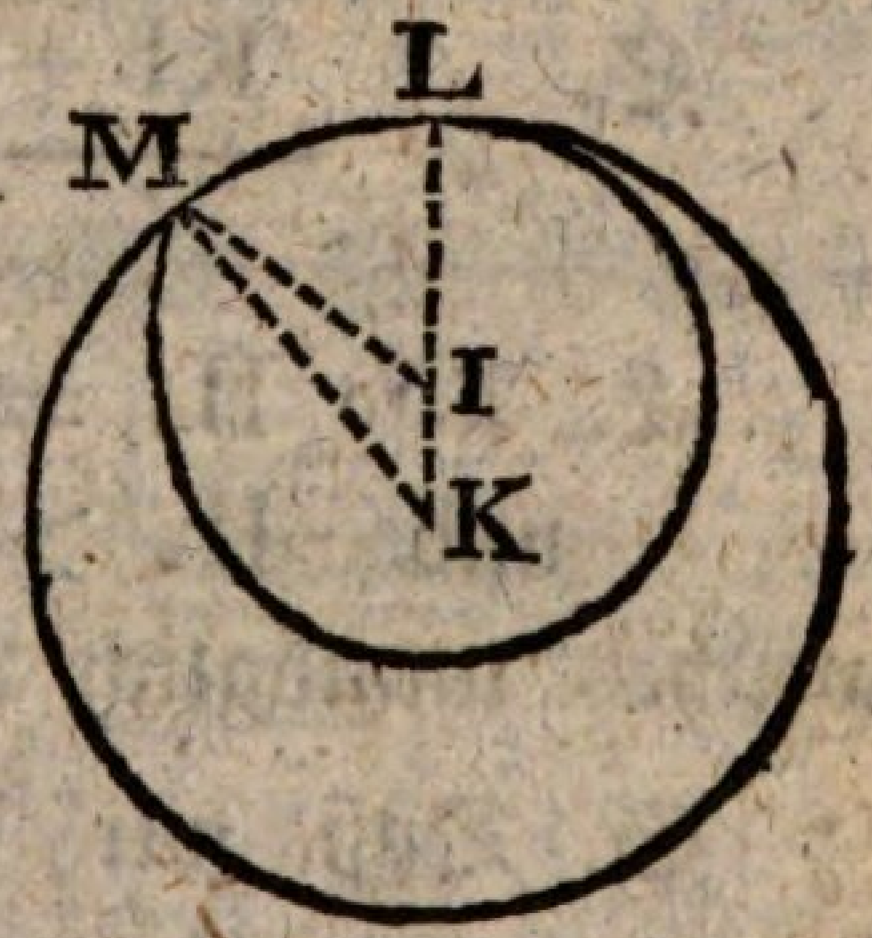
S.

S. Nein. Zwei Grössen können nicht zu gleicher Zeit einander gleich und ungleich seyn (§ 25).

L. Wie kommen wir denn auf solche Ungereimtheit?

S. Durch die falsche VorausSetzung daß zwei Kreise sich innerhalb in zwei Punkten berühren können.

L. Die Unmöglichkeit hiervon haben wir aber nur für den Fall bewiesen, da beide Berührungs-Punkte einander gerade gegenüber angenommen werden: aber auf den Fall, da die Berührungs-Punkte L und M zweier um die MittelPunkte I und K beschriebener Kreise, nicht einander gegenüber liegen, scheint der vorige Beweis nicht zu passen.

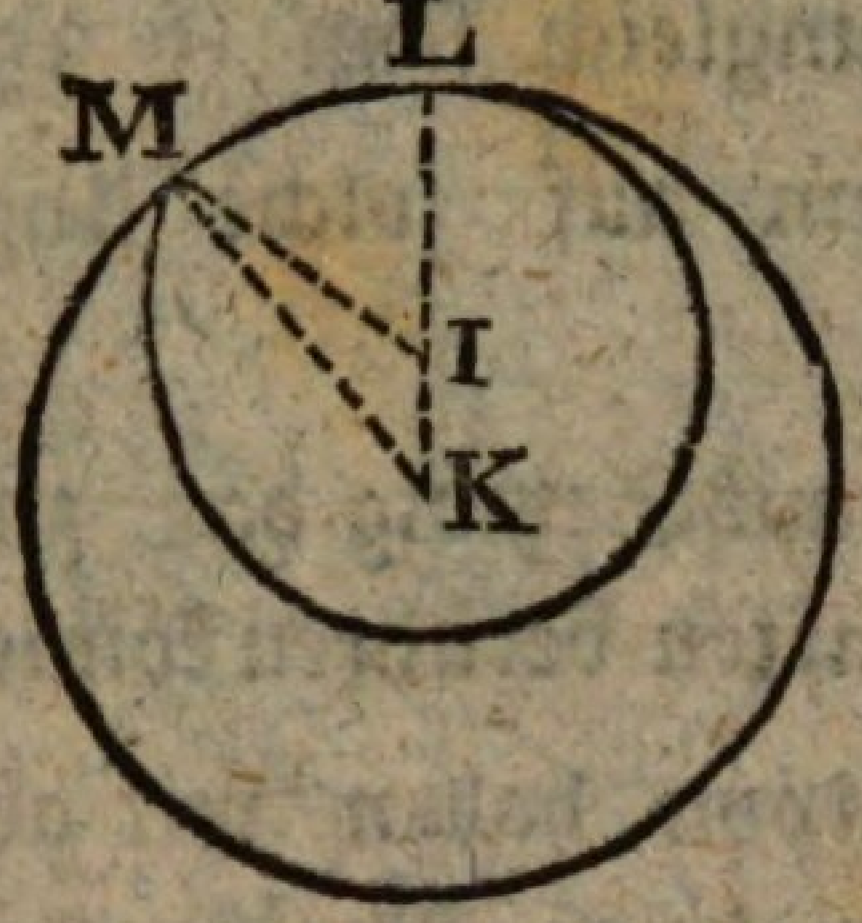


S. Eine durch die beiden MittelPunkte gezogene Linie geht durch einen Berührungs-Punkt L (§ 182), und kan also nicht durch den andern daneben liegenden M gehn (§ 11).

L. Ist das erwiesen daß M neben L liegen müsse? Könte nicht M mit K, I und L in gerader Linie liegen?

S. Das scheint mir nicht möglich.

L. Mir auch nicht; aber die Unmöglichkeit müste erwiesen werden; und da das zu weitläuftig seyn möchte, so wollen wir einen andern Beweis suchen, und zu dessen Behuf die HülfsLinien KIL, KM,



KM, IM ziehn. — Welche Linie ist nun länger, IL, oder IM?

S. $IL = IM$ (§ 21).

L. Das ist richtig: wir werden aber herausbringen daß IM länger sei als IL. — Was ist länger, KI + IM? oder KM?

S. $KI + IM > KM$ (§ 86).

L. Aber $KM = KI + IL$ (§ 21).

S. $KI + IM > KI + IL$ (§ 34).

$IM > IL$ (§ 37)

L. Also $IL = IM$,

und $IL > IM$:

welches unmöglich ist (§ 25). Was folgt daraus?

S. Daß wir etwas Unmögliches angenommen haben, da wir zwei BerührungsPunkte setzten.

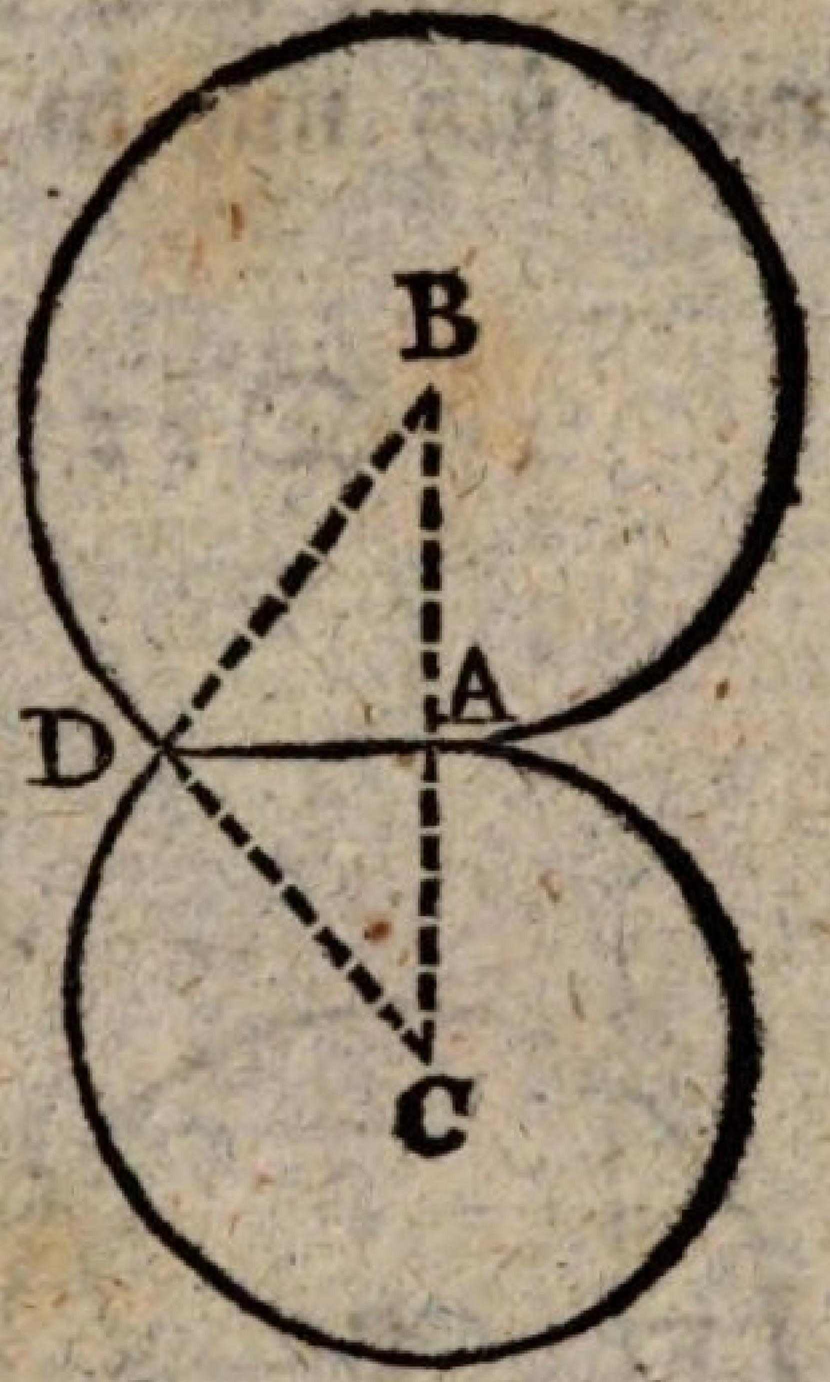
L. Nun ist für jeden Fall erwiesen: Zwei Kreise können sich innerhalb in nicht mehr als einem Punkte berühren.

Der eilfte Satz.

§ 185.

L. Nun wollen wir auch untersuchen ob zwei Kreise sich ausserhalb in mehr als einem Punkte berühren können. Wie wird das anzustellen seyn?

S.



S. Wir wollen annehmen zwei Kreise berühren sich in zwei Punkten.

L. Recht! Und diese beiden Punkte mögen A und D heissen. Aber wie nun weiter?

S. Ich verbinde die MittelPunkte B und C durch eine gerade Linie.

L. Auch gut! Und welchen Weg nimt diese Linie BC?

S. Durch den BerührungsPunkt A (§ 183).

L. Und nun weiter?

S. Ich ziehe nach dem zweiten BerührungsPunkte die Linien BD und CD.

L. Recht! Und wie lang sind diese Linien?

S. BD = BA } (§ 21)
und CD = CA

BD + CD = BA + CA (§ 36)
= BC.

L. Also eine Seite BC so lang als die beiden andern Seiten BD + CD des DreiEkks BD zusammen genommen! Ist das möglich?

S. Nein: zwei Seiten eines DreiEkks sind zusammen länger, als die dritte (§ 86).

L. Und woraus entsteht hier das falsche Resultat?

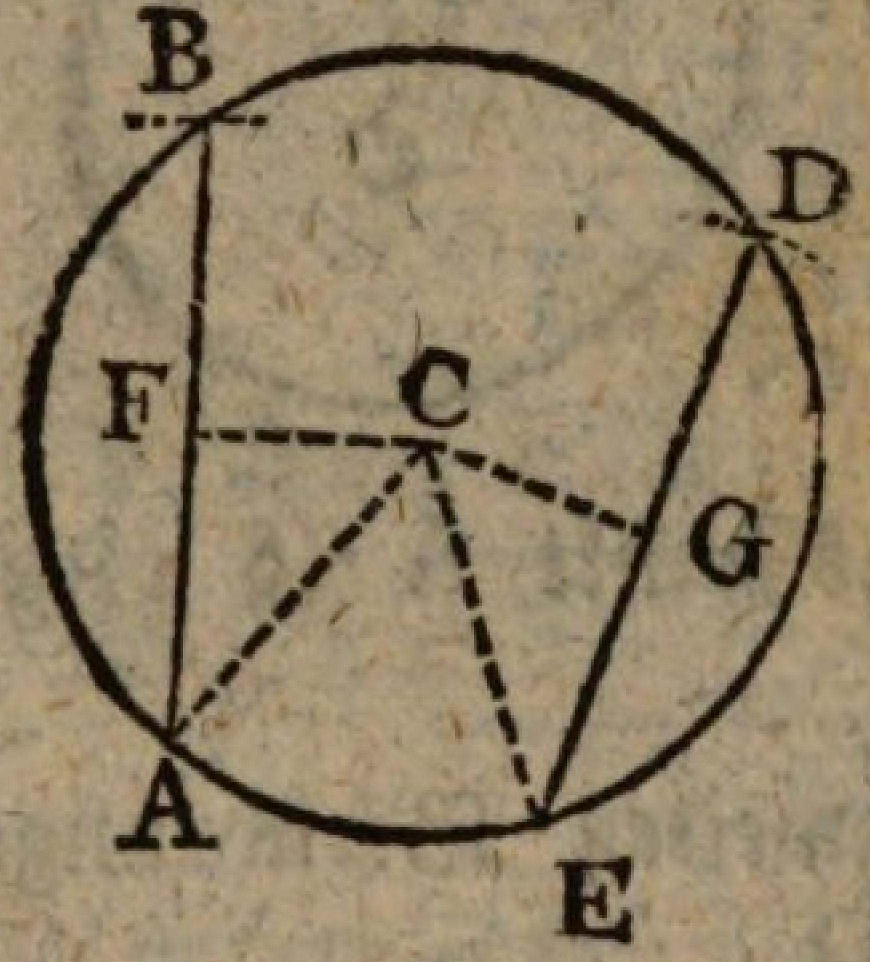
S. Aus der falschen VorausSetzung, daß zwei KreisLinien sich (ausserhalb) in zwei Punkten berühren.

L.

L. Also auch ausserhalb können zwei Kreis-Linien sich nur in einem Punkte berühren.

Der zwölfte Satz.

§ 186.



L. Es wird ein willkührlicher Kreis beschrieben, und auf dem Umfange desselben werden zwei beliebige Punkte A und E angenommen. Aus diesen Punkten wird mit beliebigen, aber gleichen Halb-Messern, die KreisLinie in B und D durchschnitten; und hierauf werden die Sehnen AB und ED gezogen. — Welche ist von diesen die längste?

S. Sie sind beide HalbMesser gleicher Kreise (nach der Verfertigung) und also gleich lang (§ 169).

L. Also AB = ED. Wie wird die Entfernung dieser Linien vom MittelPunkte C gemessen?

S. Durch von demselben auf sie gezogene senkrechte Linien CF, CG (§ 85).

L. Sind diese senkrechte Linien gleich lang, so haben die Sehnen AB, CD gleiche Entfernung vom MittelPunkte. Wir wollen also untersuchen ob CF und CG einander gleich seien. Dazu aber werden HülfsLinien erfodert: aber welche?

S. Ich werde CA und CE ziehn.

L.

L. Das ist recht. Aber wie nun weiter?

S. Nun muß ich die GleichAehnlichkeit der DreiEkke CAF und CEG untersuchen.

L. Auch recht.

S. $\angle CFA = \llcorner = \angle CGE$ (§ 47)
$CF = CE$ (§ 21)
$FA = GE$ (§ 177).
$\triangle CAF \cong CEG$ (§ 163)
$CF = CG$ (§ 24).

L. Daß FA = GE ist noch nicht klar genug erwiesen.

S. $AB = ED$ (VS.)
$FA = \frac{1}{2}A$ } (§ 177)
$GE = \frac{1}{2}ED$ }
$FA = GE$ (§ 43).

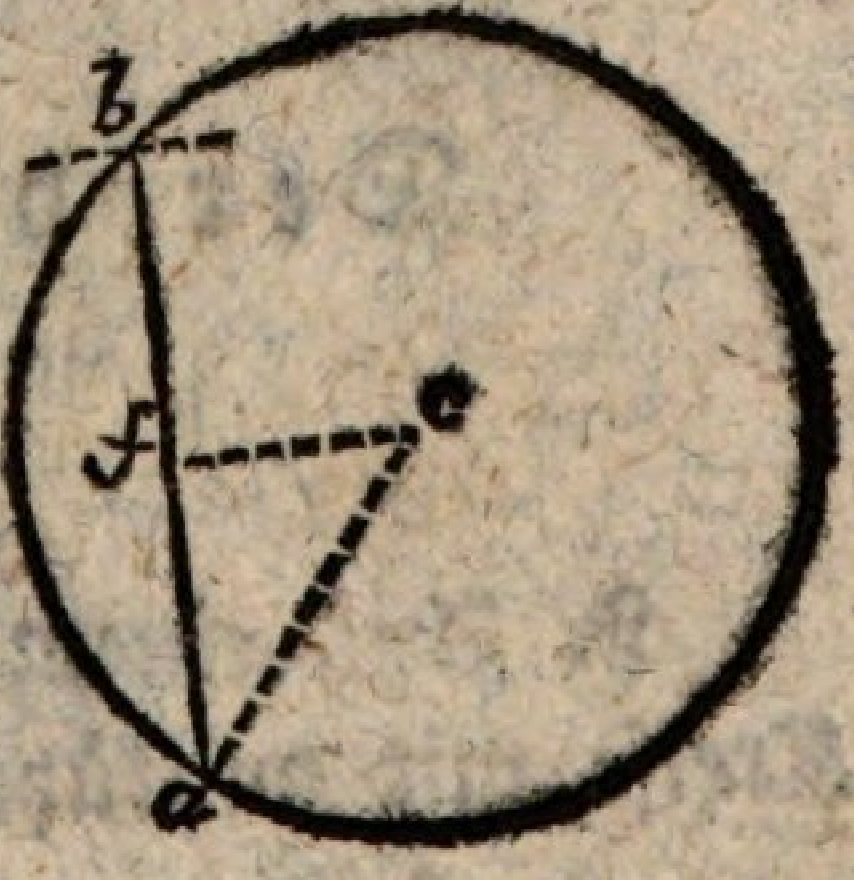
L. Und was haben wir nun heraus gebracht? Wie lautet der gefundene LehrSatz?

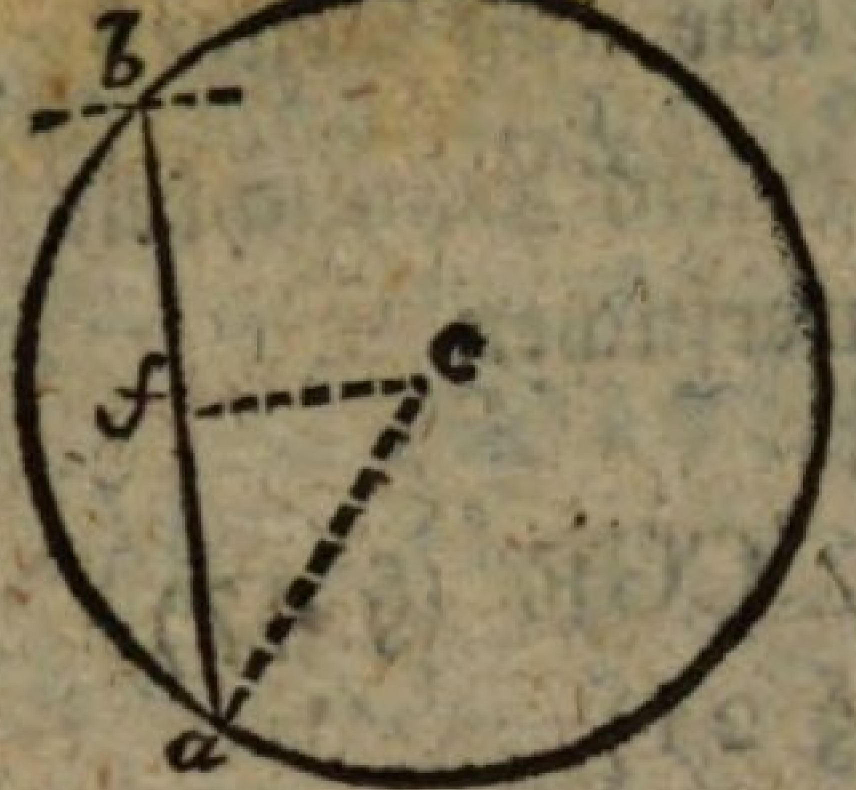
S. Gleiche Sehnen eines Kreises sind vom MittelPunkte gleich weit entfernt.

§ 187.

L. Mit dem HalbMesser CA des vorigen Kreises wird ein zweiter Kreis beschrieben. — Welcher von beiden Kreisen ist nun der gröste?

S. Sie sind beide gleich groß (§ 169).





L. Auf dem Umfange wird, wie vorhin, aus einem beliebigen Punkte a, mit der Länge AB ein Durchschnitt b gemacht, und die Sehne ab = AB gezogen. Und endlich wird vom MittelPunkte c auf ab eine senkrechte Linie cf gefällt. — Wie lang wird diese seyn?

S. cf = CF.

L. Woher das?

S. ca = CA (VS.)
cf = CF (VS. u. § 177)
∠cfa = ∠CFA (VS. u. § 47)
△cfa ≅ △CFA (§ 163)
cf = CF (§ 21).

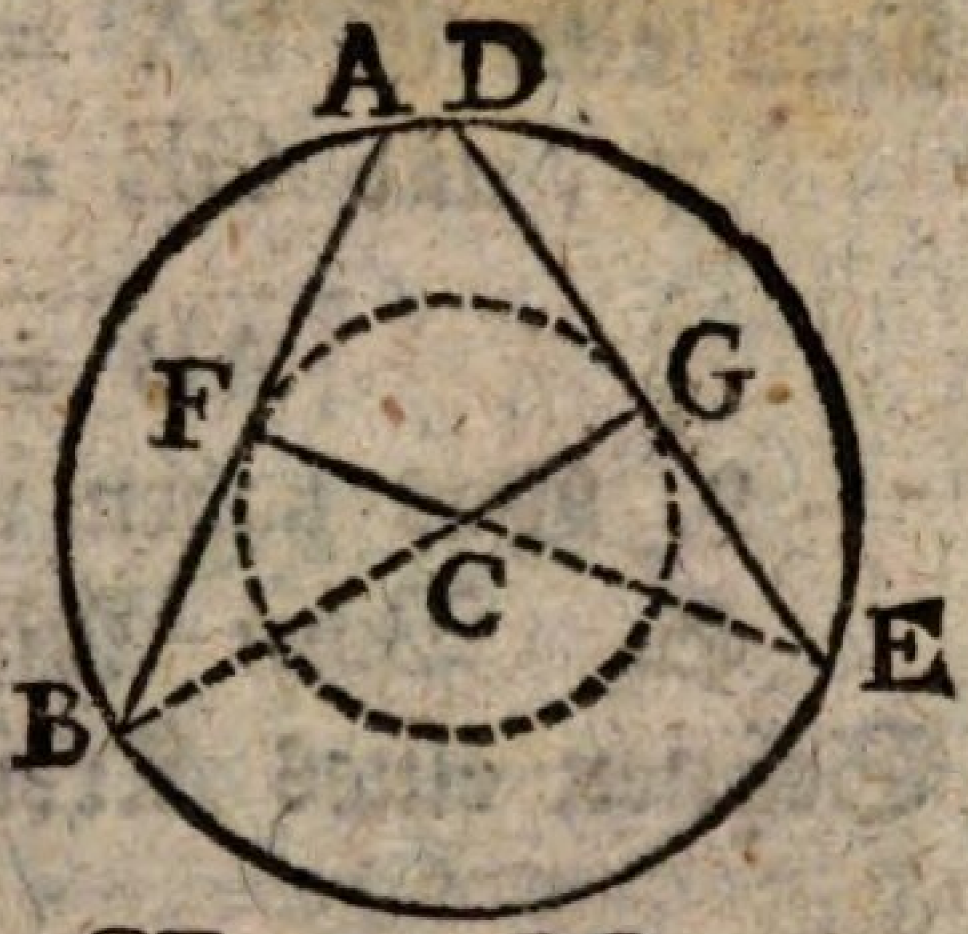
L. Die Linie cf aber und CF messen die Entfernungen der Sehnen AB und ab von den MittelPunkten ihrer Kreise: also = = ?

S. Gleich lange Sehnen gleicher Kreise haben von ihren MittelPunkten gleiche Entfernung.

Der dreizehnte Satz.

§ 188.

L. Aus einem MittelPunkte C werden zwei Kreise mit willkührlichen HalbMessern gezeichnet. Hier-



Hierauf werden in dem innern Kreise zwei HalbMesser CF, CG gezogen, und auf ihre EndPunkte F und G werden zwei Sehnen AB und DE, des grössern Kreises senkrecht gestellt. — Was bezeichnen nun die Linien CF und CG alles?

S. Zuerst sind sie HalbMesser des innern Kreises; und dan bezeichnen sie die Entfernungen der Sehnen AB und DE vom MittelPunkte C.

L. Und wie ist ihre Länge? Gleich oder ungleich?

S. CF = CG (§ 21).

L. AB und DF also sind Sehnen eines Kreises welche gleiche Entfernungen vom MittelPunkte haben. Nun müssen wir ihre Längen gegen einander vergleichen. Wie geschicht das?

S. Ich ziehe die HülfsLinien CA und CE.

L. Recht! Und nun weiter?

S. Ich untersuche die GleichAehnlichkeit der DreiEkke CFA und CGA, schliesse von dieser auf die Gleichheit von FA und GE; und hiervon auf die von AB und DE.

L. Auch richtig!

S. $\left.\begin{array}{l} CF = CG \\ CA = CE \end{array}\right\}$ (§ 21).

$\angle CFA = \llcorner = \angle CGA$

$\triangle CFA \cong \triangle CGA$ (§ 163).

FA = GC (§ 24).

 Nun

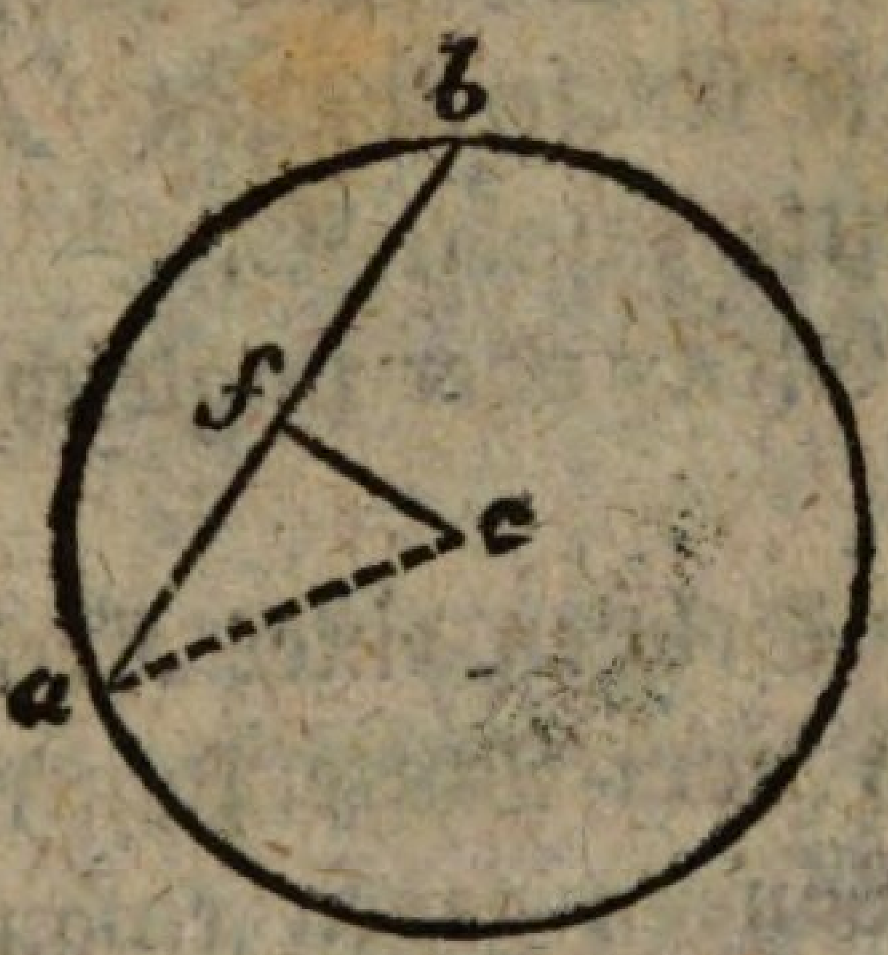
Nun aber ist FA = ½ AB } (§ 177)
und GE = ½ DE }

AB = DE (§ 43)

L. Was haben wir nun herausgebracht?

S. Vom MittelPunkte gleich entfernte Sehnen eines Kreises sind gleich.

§ 189.



L. Mit dem HalbMesser CA des vorigen Kreises, wird aus c ein zweiter Kreis beschrieben. Aus dessen MittelPunkt wird, in willkührlicher Richtung eine gerade Linie cf = CF gezogen, und auf deren EndPunkte f wird die Sehne ab senkrecht gestellt. — Ist diese Sehne ab der vorigen AB gleich oder nicht?

S. Sie sind beide einander gleich; denn

ca = CA } (VS.)
cf = CF }

∠ cfa = ∟ = CFA (§ 47)

△ cfa ≌ △ CFA (§ 163)

fa = FA (§ 24)

ab = AB (§ 177 u. 43).

L. Also = = ?

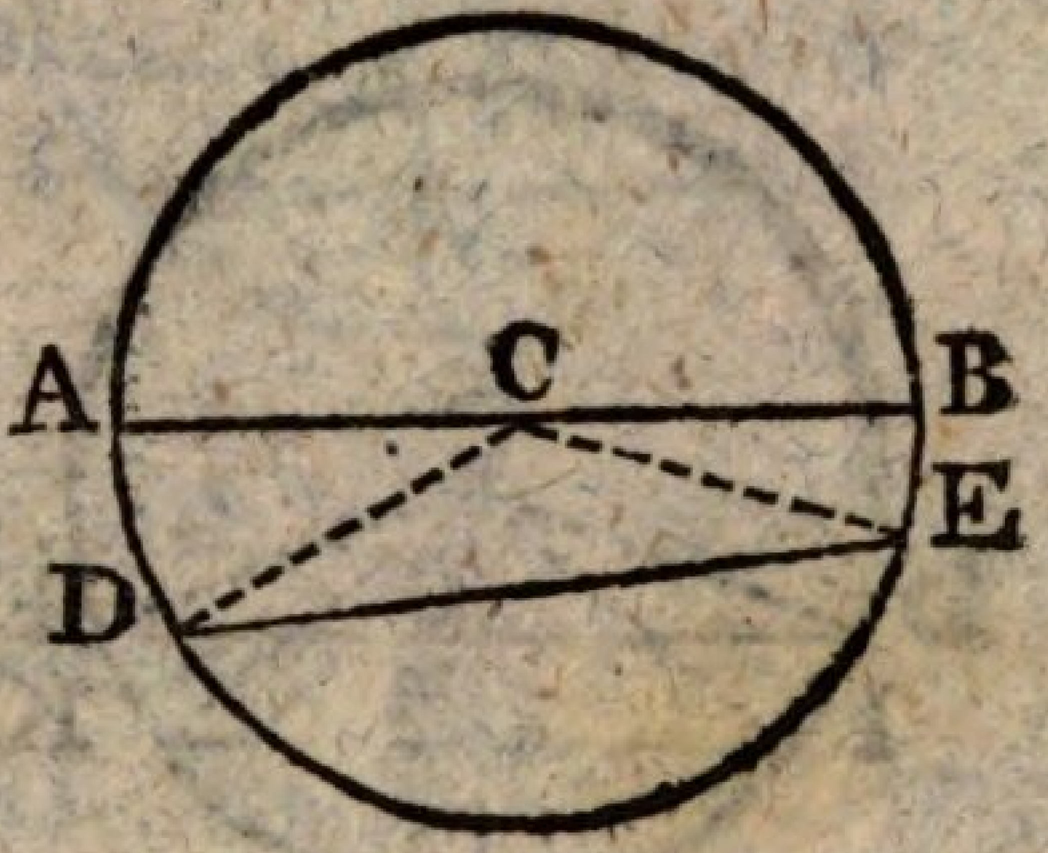
S. Vom MittelPunkte gleich entfernte Sehnen gleicher Kreise sind gleich lang.

Der

Der vierzehnte Satz.

§ 190.

L. Es wird ein Kreis beschrieben, und in demselben ein Durchmesser ACB und eine Sehne DE, nach Belieben gezogen. Nun ist die Frage: Welches von beiden ist länger? Der Durchmesser, oder die Sehne?



S. Unstreitig der Durchmesser.

L. Das ist wahr, aber wie wird es erwiesen?

S. Ich werde ein Par Hülfslinien, CD, CE ziehn.

L. Recht!

S. Nun ist $CD = CA$ und $CE = CB$ (§ 21)

$CD + CE = CA + CB$ (§ 36)

Aber $CD + CE > DE$ (§ 86)

$CA + CB > DE$ (§ 34)

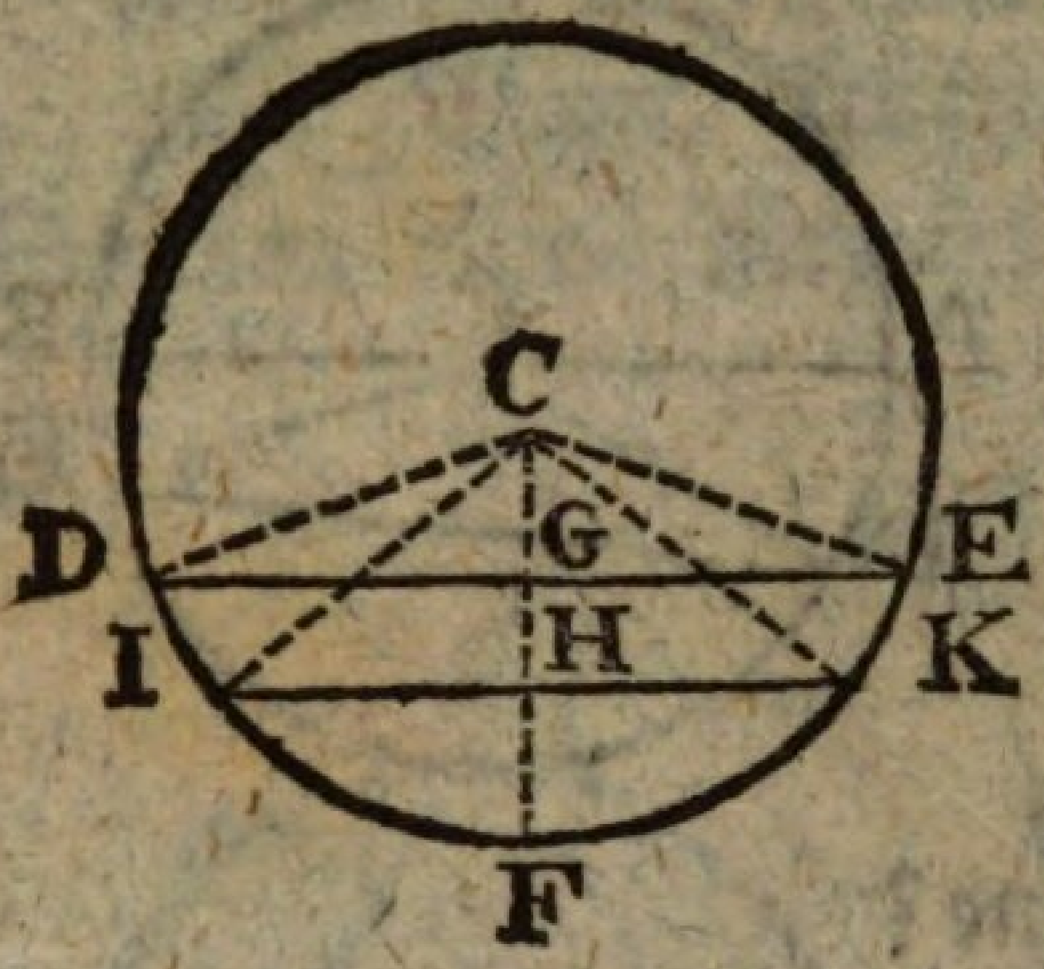
Das ist: $AB > DE$ (§ 45).

L. Der Durchmesser also = = ?

S. Ist grösser als eine Sehne desselben Kreises.

Der funfzehnte Satz.

§ 191.



L. Es wird wieder ein willkührlicher Kreis beschrieben, und in demselben ein HalbMesser CF gezogen. Auf diesem HalbMesser werden zwei beliebige Punkte G, H, angenommen, und durch dieselben werden zwei auf CF senkrechte Sehnen, DE und IK gezogen. — Welche von diesen ist nun dem MittelPunkte am nächsten?

S. Die Sehne DE.

L. Aber welche ist die längste? DE, oder IK?

S. IK ist länger als DE.

L. Es ist wahr; aber wie wird es bewiesen?

S. Ich ziehe wieder HülfsLinien CD, CE, CI, CK. Nun ist

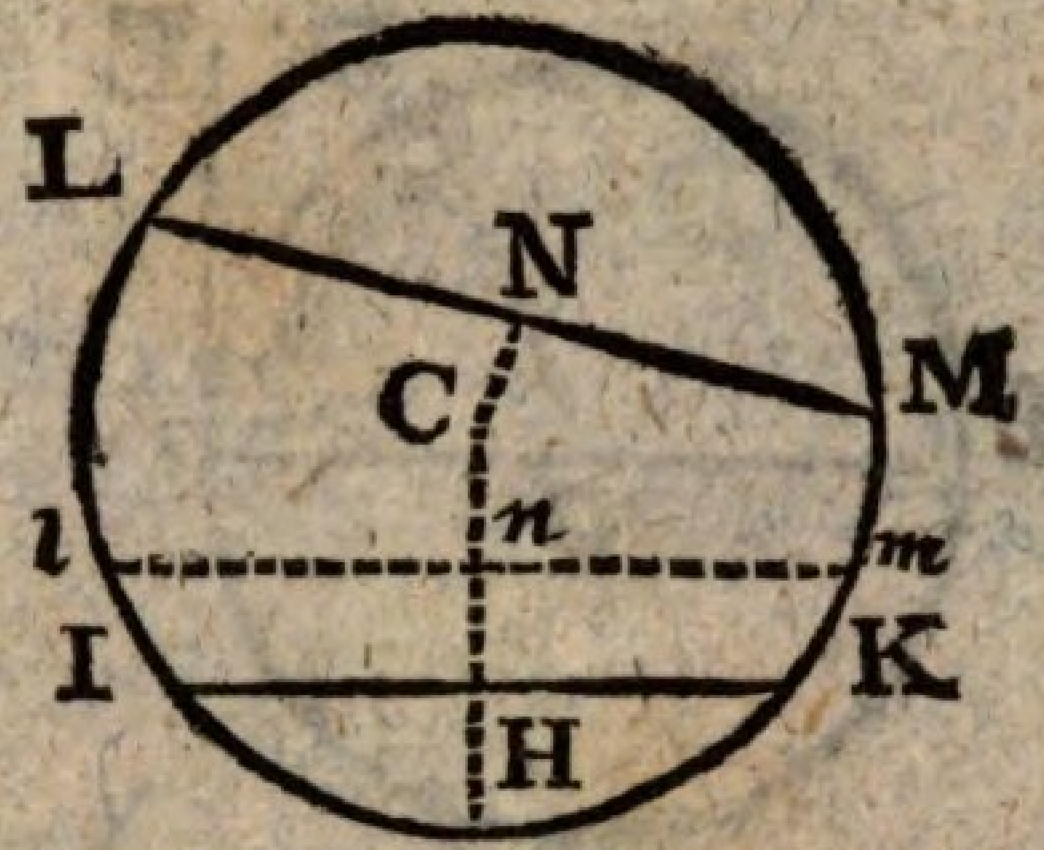
$$\left.\begin{array}{rl} & CD = CI \\ \text{und} & CE = CK \end{array}\right\} (\S\ 21)$$

$$\text{aber } \angle DCE > \angle ICK \quad (\S\ 45)$$

$$\text{folglich } DE > IK \quad (\S\ 92).$$

L. Der Beweis ist richtig, und war nicht schwer, weil beide Sehnen den MittelPunkt nach einer Sei-

Seite hatten. Gesetzt aber sie hätten ihn zwischen sich, wie die Sehnen IK und LM? so daß ich nicht sehn kan welcher Winkel der gröste ist; ICK, oder LCM.



S. So ziehe ich auf IK und LM, aus dem MittelPunkte die senkrechten Linien CH und CN; trage die Weite CN auf CH. von C in n, und ziehe durch n die senkrechte Sehne lm. So ist

lm = LM (§ 189)
Aber lm > IK (§ 191)
LM > IK (§ 34)

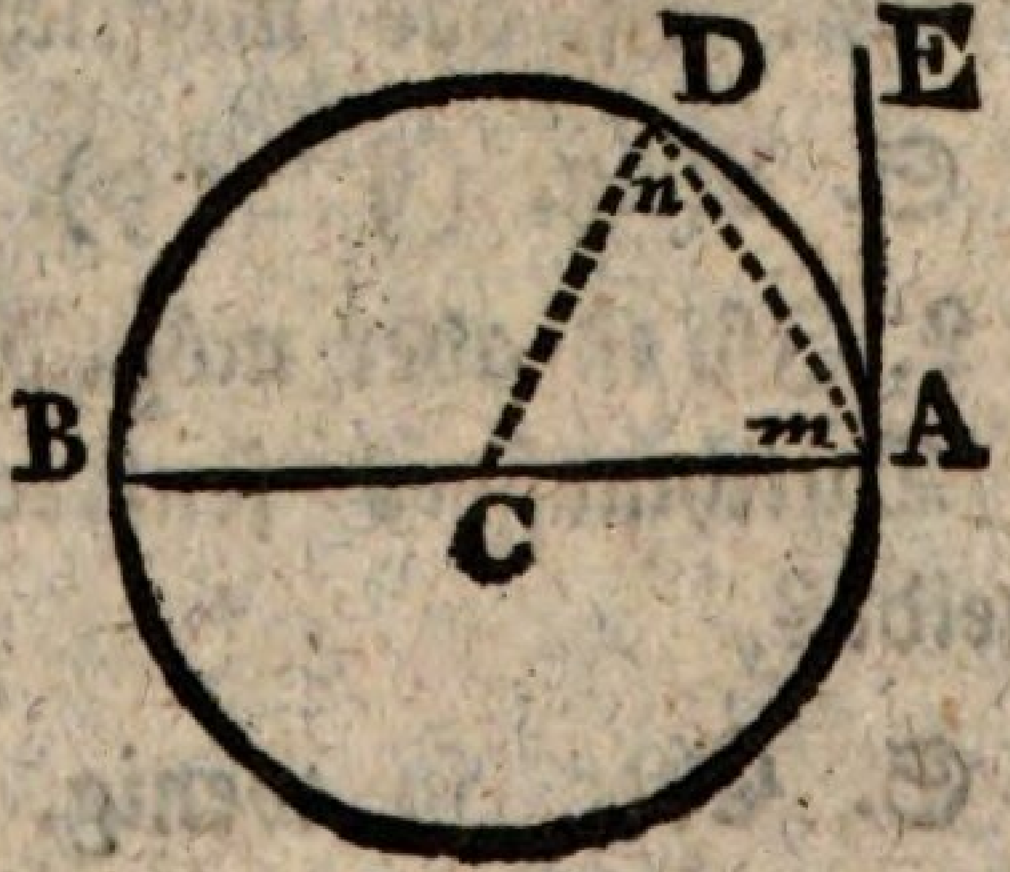
L. Und wie lautet nun der jezt erwiesene Saz?

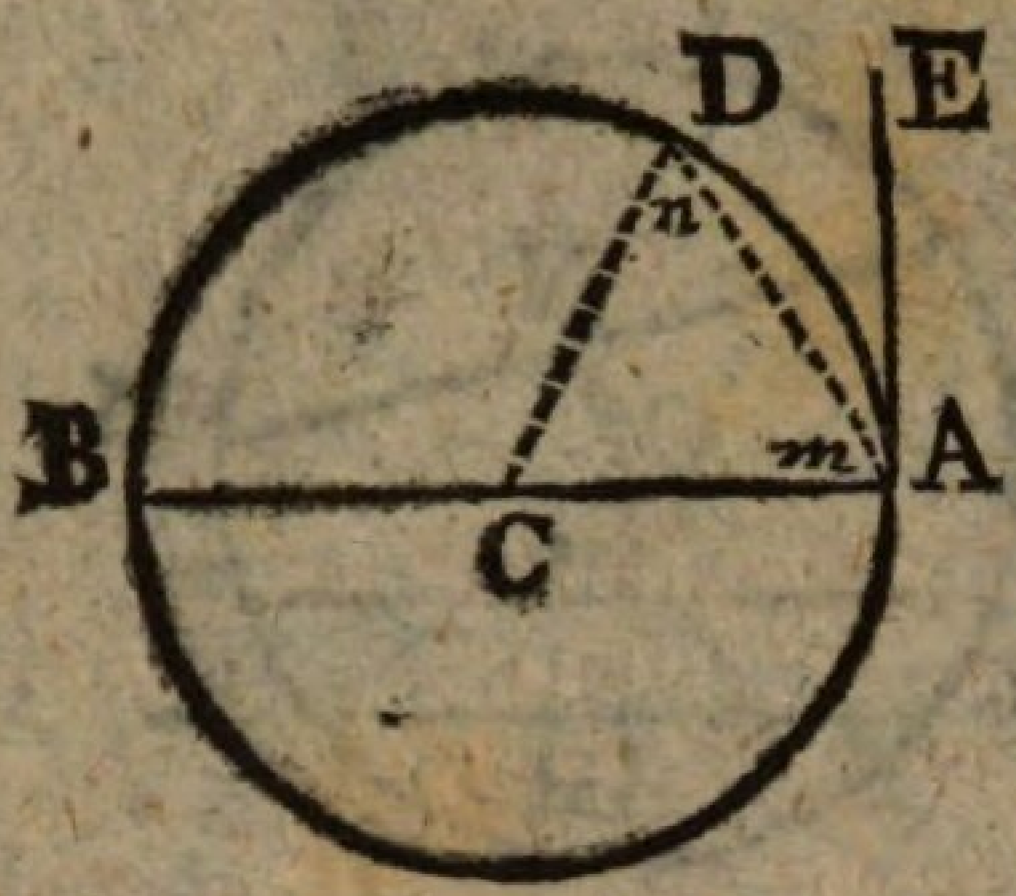
S. Von zwei Sehnen eines Kreises ist die längste die, welche dem MittelPunkte am nächsten ist.

Der sechszehnte Saz.

§ 192.

L. Es wird ein beliebiger Kreis, und in demselben ein Durchmesser AB, gezeichnet. — Wenn man nun auf dem EndPunkte A dieses Durchmessers eine senkrechte Linie errich-





tet, welchen Weg wird die nehmen? Wird sie durch den Kreis gehn, oder wird sie ausserhalb desselben bleiben?

S. Sie wird ausserhalb bleiben.

L. Und der Beweis?

S. Wir wollen annehmen sie ginge durch den Kreis, und schnitte die KreisLinie in D. Nun ziehe ich vom MittelPunkte C, nach dem Durchschnitts-Punkte D, eine gerade Linie CD.

L. Recht! Und nun wollen wir die Winkel des DreiEkks CAD, bei A und D, mit m und n bezeichnen, und sie mit einander vergleichen. — Was für ein Winkel ist m?

S. Ein rechter (§ 47).

L. Und der Winkel n?

S. Auch ein rechter: denn

$$\frac{CA = CD \ (\S\ 21)}{n = m \ (\S\ 57).}$$

L. Das DreiEkk CAD also hätte zwei rechte Winkel! Ist das möglich?

S. Nein. (§ 119).

L. Ist es aber möglich daß eine auf dem Ende des Durchmessers senkrechte Linie AE den Kreis schneide?

S. Eben so wenig.

L. Warum nicht?

S. Weil es eine Unmöglichkeit zur Folge hätte. Eine auf dem EndPunkte des Durchmessers senkrecht stehende Linie ist ganz ausserhalb des Kreises.

§ 193.

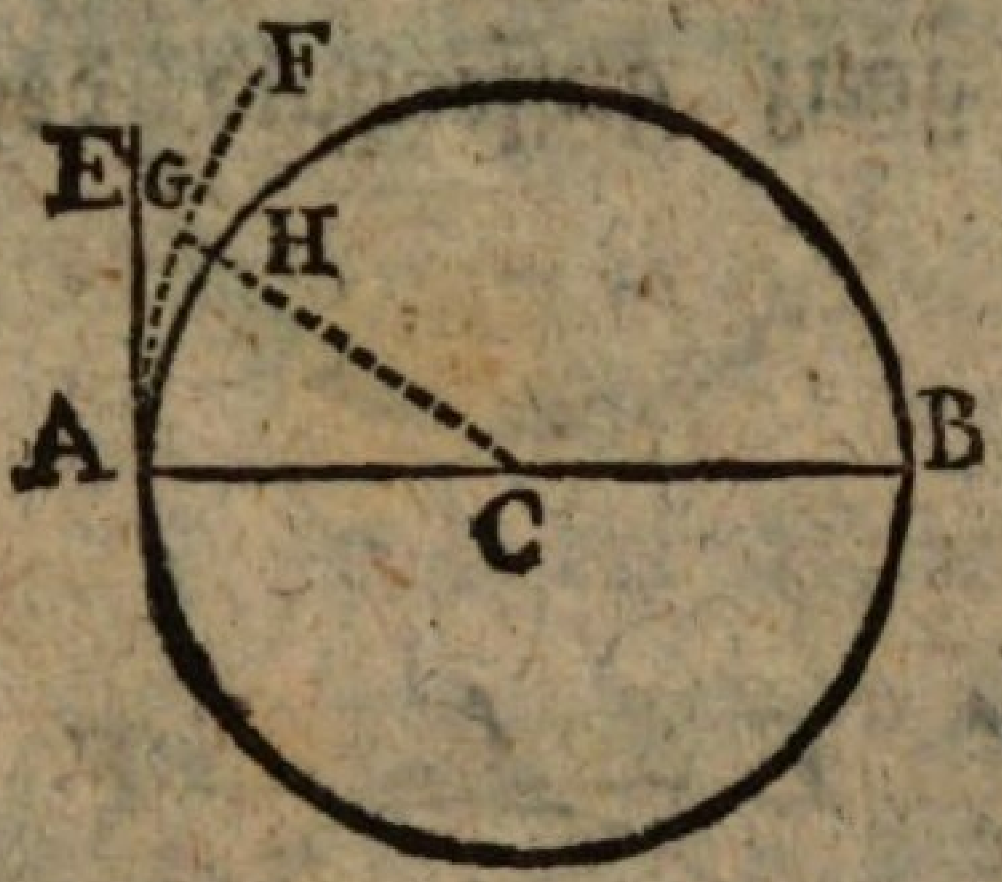
L. Eine gerade Linie welche den Kreis berührt, ohne verlängert ihn zu schneiden, heisst eine Tangente, oder Streiflinie. Da nun eine auf dem Ende des Durchmessers senkrechte Linie EF den Kreis berührt in A, ohne ihn zu schneiden (§ 192); so folgt daraus = = ?

S. Eine auf dem Ende des Durchmessers senkrecht stehende Linie ist eine Streiflinie.

L. Nicht bloß auf dem Ende des Durchmessers, sondern auch auf dem Ende des HalbMessers. — Und der Punkt A, wo der HalbMesser oder der DurchMesser und die StreifLinie zusammentreffen, heisst der StreifPunkt.

Der siebenzehnte Satz.

§ 194.



L. Es wird ein Kreis beschrieben, ein Durchmesser ACB gezogen, und auf dem Ende desselben eine senkrechte Linie AE errichtet, wie vorhin, (§ 192). — Die Frage ist: Hat zwischen der StreifLinie AE, und der KreisLinie, noch eine andere gerade Linie AF Raum?

S. Ich glaube nicht.

L. Aber wie beweist mans?

S. Wir wollen annehmen AF sei eine gerade Linie, und liege zwischen der StreifLinie und dem Umfange.

L. Recht! Nun wird eine HülfsLinie erfodert. Wie werden wir die ziehn?

S. Von C auf AF.

L. Und welche Richtung werden wir ihr geben?

S. Ich denke eine senkrechte.

L. Gut! Von C wird auf AF eine senkrechte Linie CG gezogen, welche die KreisLinie in H schneidet. Das DreiEkk CAG also hat bei G einen rechten Winkel. Wie ist aber der Winkel CAG beschaffen. Ist er auch ein rechter? Ist er grösser? ist er kleiner als ein rechter?

S. Da $\angle CAE = \llcorner$ (VS.)
so ist $\angle CAG > \llcorner$ (§ 45).

L. Aber welche Seite ist länger? CA oder CG?

S. $CA > CG$ (§ 82).

L. Aber $CA = CH$ (§ 21)

S. Folglich auch $CG > CG$ (§ 34).

L. Ist das möglich?

S. Nein. Das Ganze ist grösser als sein Teil (§ 45).

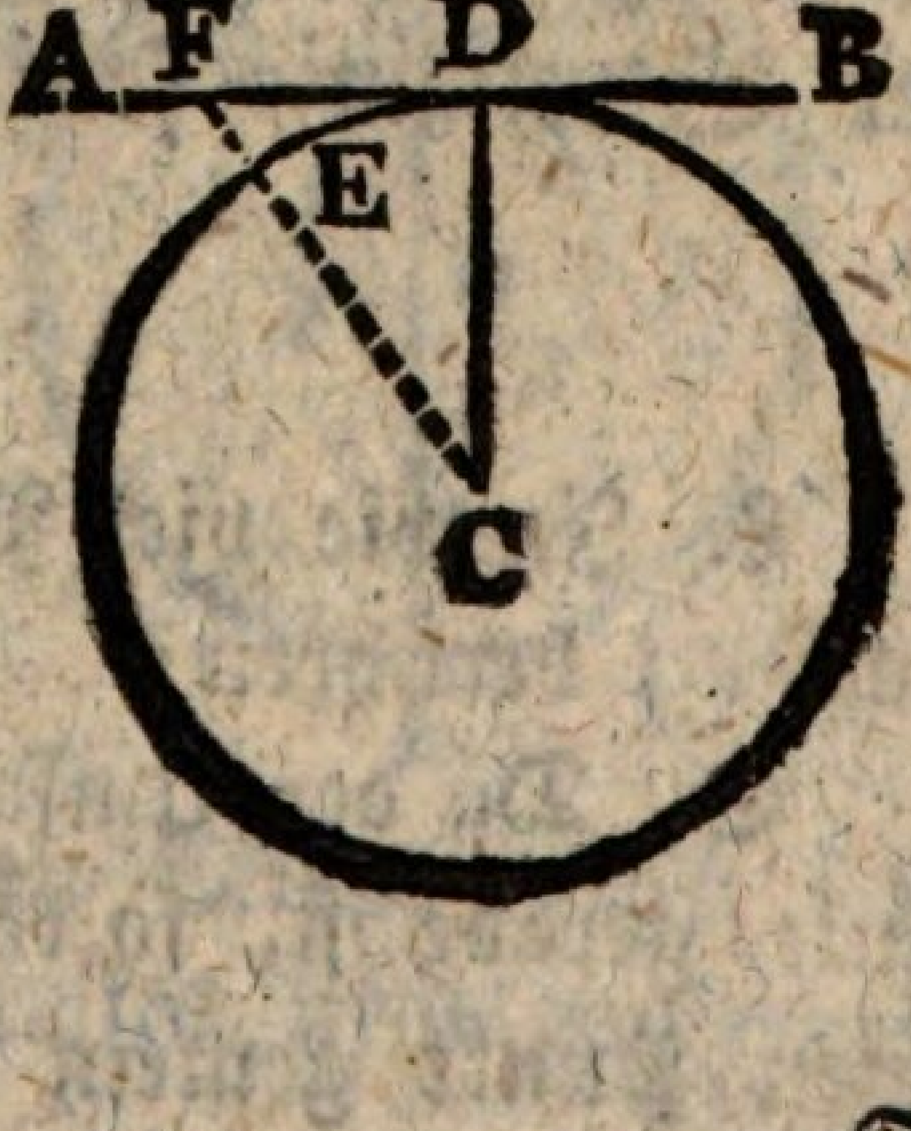
L. Wie kommen wir denn auf diese Ungereimtheit?

S. Wir haben eine unmögliche Sache angenommen. Aus dem StreifPunkte kan zwischen der StreifLinie, und dem Umfange, keine gerade Linie gezogen werden.

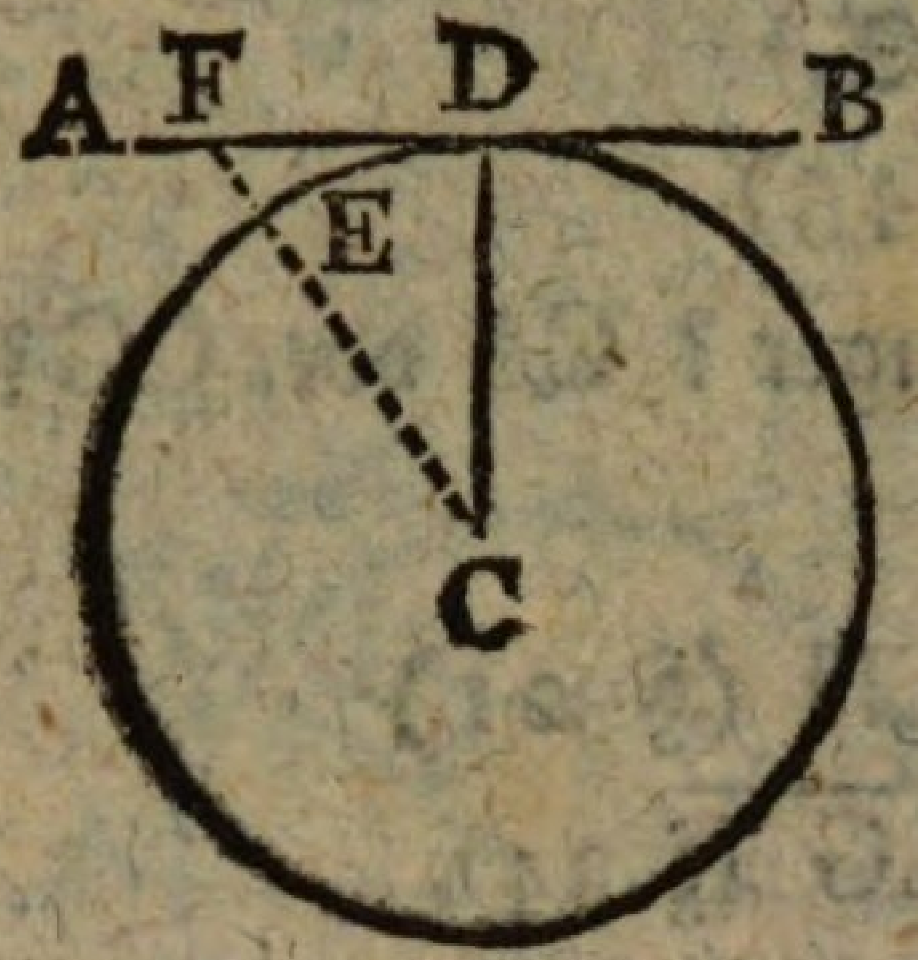
Der achtzehnte Saz.

§ 195.

L. Hier ist ein Kreis welcher von einer geraden Lini AB in D gestreift wird. Die Frage ist: Steht eine vom MittelPunkte C nach dem StreifPunkte D gezogene gerade Linie CD auf der StreifLinie senkrecht oder nicht?



S.



S. Wir wollen annehmen sie stehe nicht senkrecht auf ihr, sondern eine andere Linie CEF mache mit AB rechte Winkel.

L. So ist es recht. Und da nun der DreiEkksWinkel CAD ein rechter ist, was für einer ist CDF?

S. Ein spitzer (§ 119).

L. Und welche Linie würde, dem zufolge, die längste seyn? die dem spitzen Winkel gegenüber stehende CF? oder die dem rechten entgegen stehende CD?

S. Die dem rechten entgegen stehende.

CD > CF (§ 80).

L. Aber CD = CE (§ 21); folglich = = ?

S. CE > CF

L. Der Teil CE also grösser als das Ganze CF, welches unmöglich ist (§ 45). Steht also CD schief auf AB?

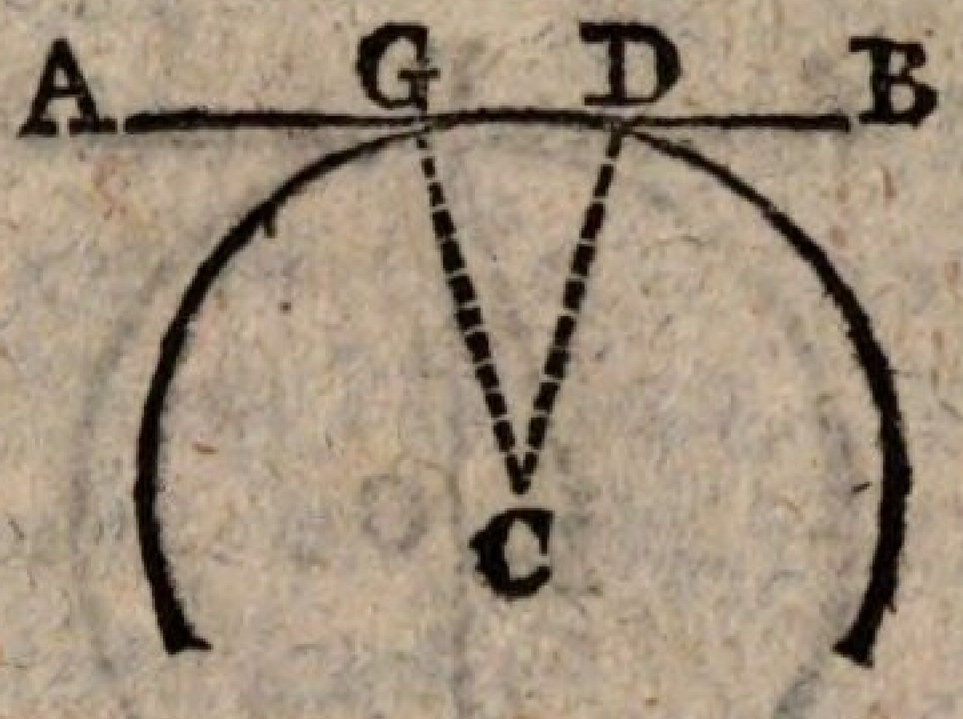
S. Nein. Eine vom MittelPunkte nach dem StreifPunkte gezogene gerade Linie, steht auf der StreifLinie senkrecht.

§ 196.

L. In wie viel Punkten kan die StreifLinie den Umfang berühren?

S. Da der Umfang krumm, und die StreifLinie gerade ist, so können sie wol nicht mehr als einen Punkt gemein haben.

L.



L. Wir wollen einmal annehmen, sie hätten zwei Punkte D und G gemein, und nun wollen wir vom MittelPunkte C, nach D und G gerade Linien ziehn. — Wie stehn diese auf AB?

S. Senkrecht (§ 195)

L. Von C also gehn auf AB zwei senkrechte Linien, CD und CG! Ist das möglich?

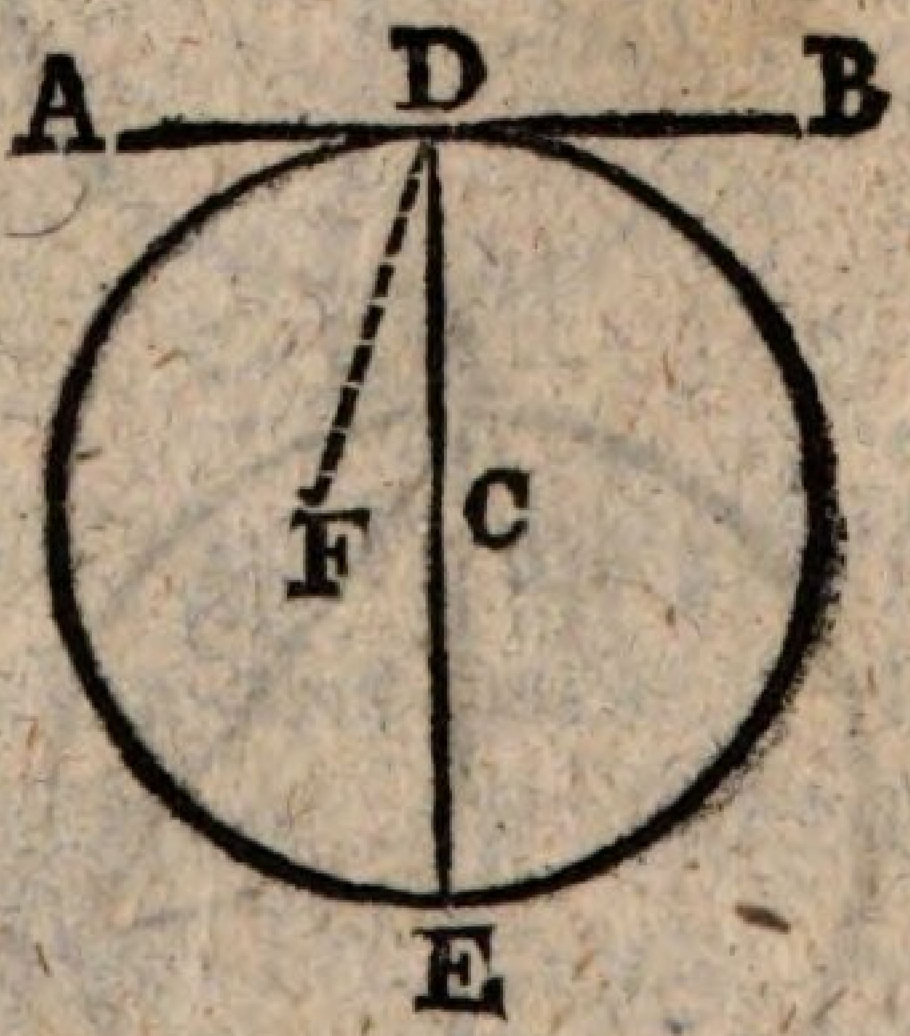
S. Nein (§ 84.)

L. Und was folgt daraus?

S. Die Streiflinie kan den Umfang in nicht mehr als einem Punkte berühren.

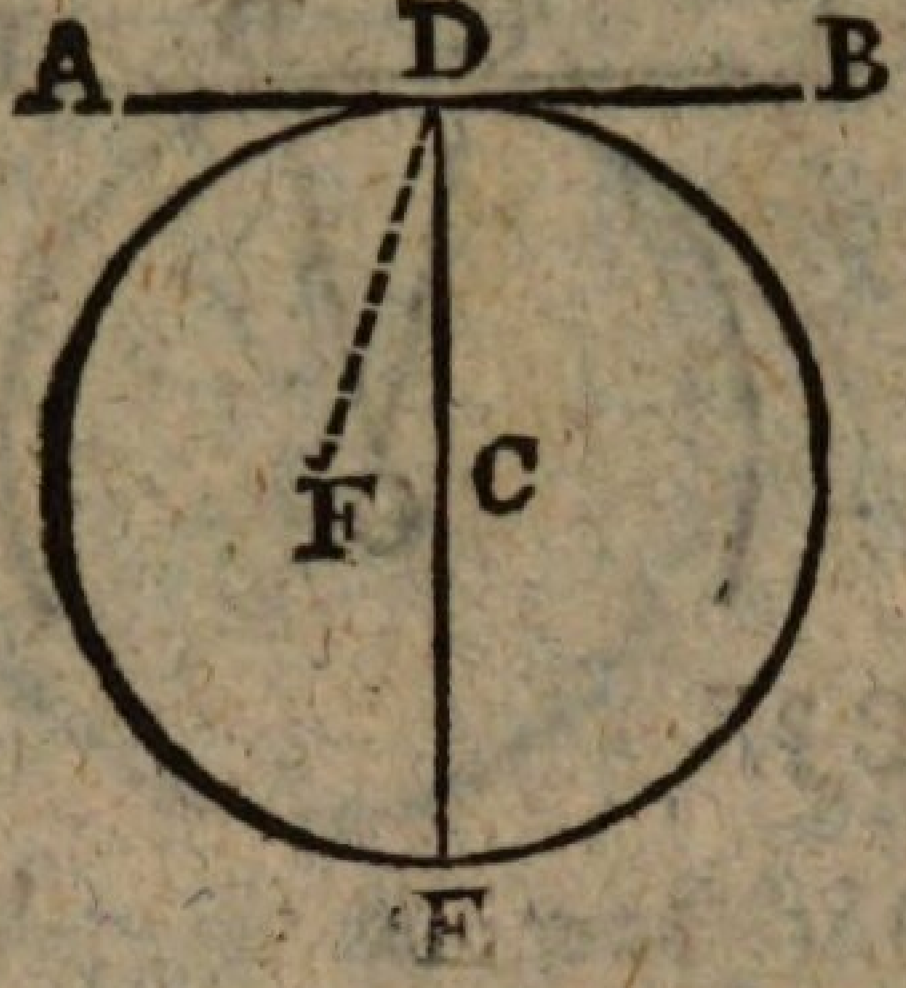
Der neunzehnte Satz.

§ 197.



L. Ein Kreis wird von einer Linie AB gestreift, wie vorhin. Wenn nun aus dem StreifPunkte D eine senkrechte Linie DCE auf AB errichtet wird, geht diese durch den MittelPunkt oder nicht?

S. Wir wollen annehmen sie gehe nicht durch den MittelPunkt, sondern der MittelPunkt des Kreises liege ausserhalb der-



derselben in F. Wenn man nun von F nach D eine gerade Linie zieht, so ist auch diese senkrecht auf AB (§ 193). Nun treffen in D zwei senkrechte Linien zusammen. Und da senkrechte Linien rechte Winkel machen (§ 41); so ist

$$\angle FDB = \llcorner$$
$$\angle EDB = \llcorner$$
$$\angle FDB = \angle EDB \text{ (§ 49)};$$

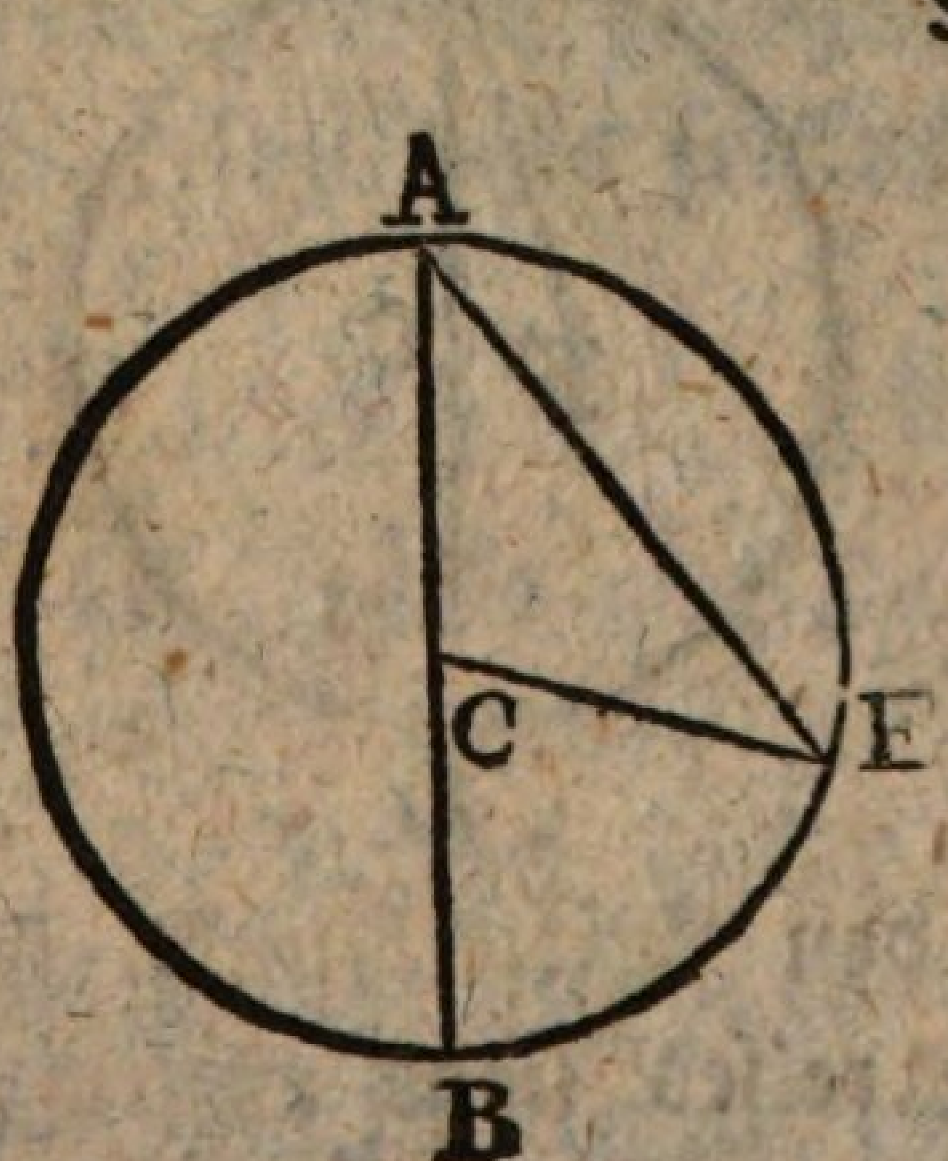
welches unmöglich ist (§ 45).

L. Wir haben also auf falschem Grunde gebaut, da wir annahmen, der MittelPunkt liegt ausser DA. Wie lautet nun unser LehrSatz?

S. Eine aus dem StreifPunkte senkrecht errichtete Linie geht durch den MittelPunkt des Kreises.

Der zwanzigste Satz.

§ 198.



I. L. Um einen MittelPunkt C wird ein Kreis beschrieben; in demselben wird ein Durchmesser AB, und von einem Ende desselben eine Sehne AE gezogen; alles nach Willkühr. Endlich wird vom MittelPunkte

Punkte nach dem Ende E der Sehne, ein Halb-Messer CE gezogen. So haben wir einen Winkel A am Umfange, und einen andern C am Mittel-Punkte, welche auf einerlei Bogen BE stehn. Die Frage ist: Welcher von beiden ist der gröste? Der am Umfange oder der am MittelPunkte?

S. $C = A + E$ (§ 117)

$C > A$ (§ 38)

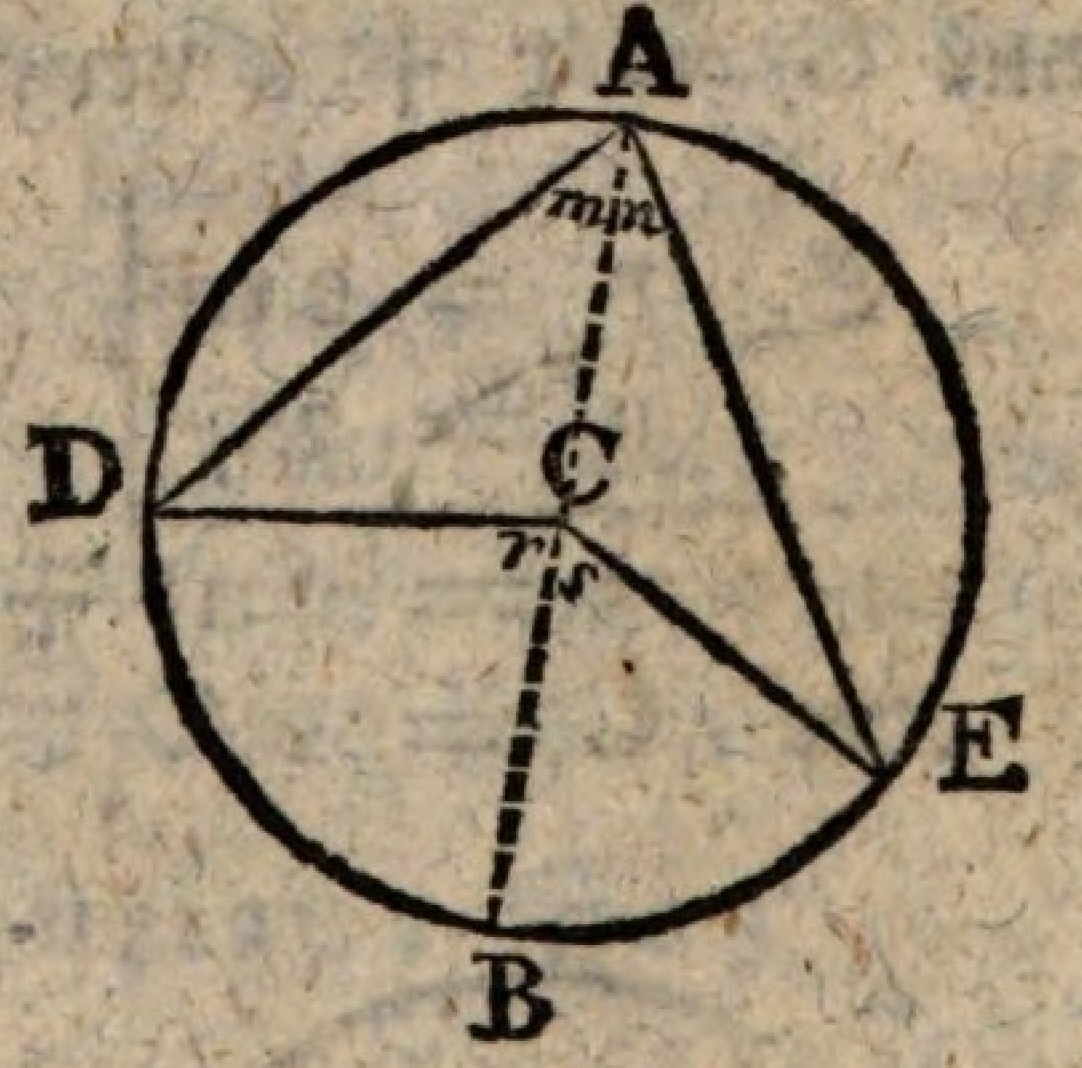
L. Richtig! Aber um wie viel ist C grösser als A? — Zuerst: Wie groß ist A?

S. $CA = CE$ (§ 21)

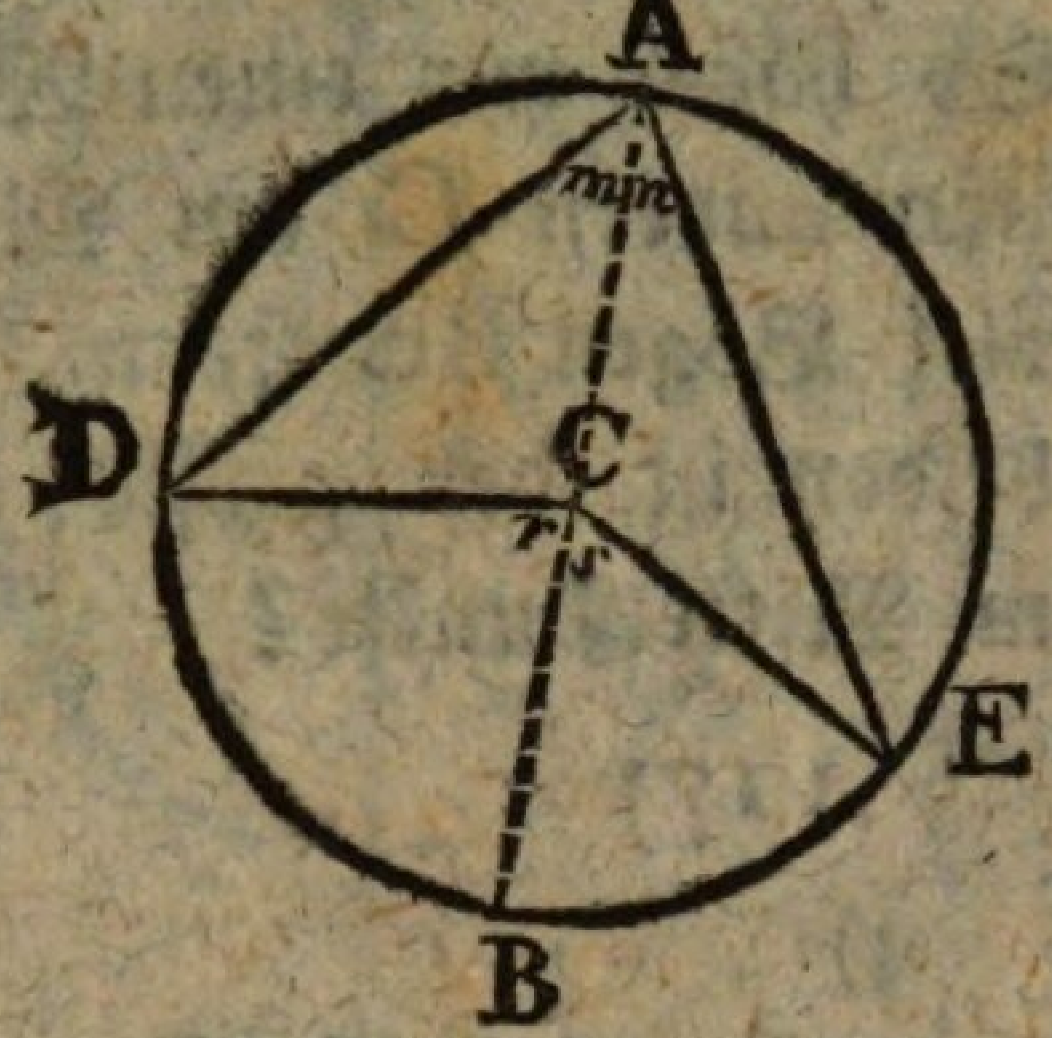
$A = E$ (§ 57)

$C = A + A$ (§ 27)

oder $C = 2A$



II. L. Es wird ein neuer Kreis beschrieben, und aus einem auf dem Umfange angenommenen Punkte A werden zwei Sehnen, AD, AE deren jede mehr als den vierten Teil des Umfangs unterspannt, und nach deren EndPunkten D und E zwei HalbMesser CD, CE gezogen. So haben wir wieder einen Winkel am Umfange, und einen am Mittel-Punkte, welche auf einerlei Bogen DE stehen. — Wie unterscheiden sie sich von den vorigen?



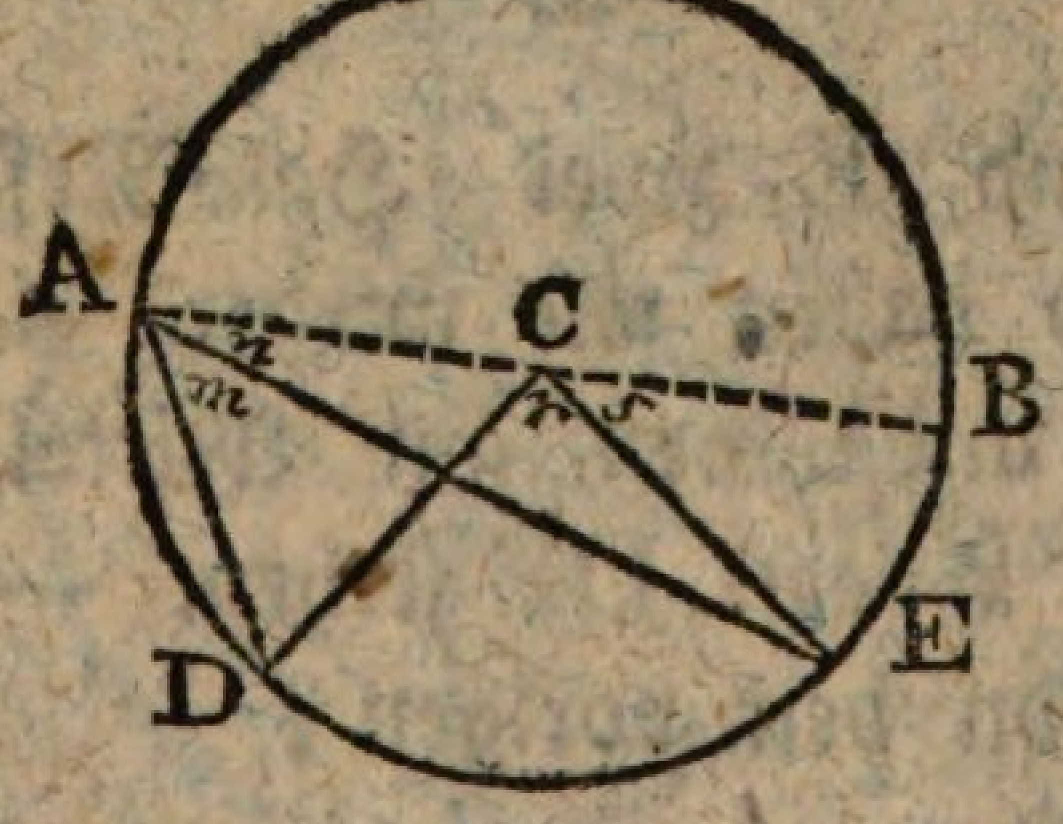
S. Vorhin waren eine Sehne und ein DurchmesseSchenkel des Winkels am Umfange; jezt sind es zwei Sehnen.

L. Es ist leicht diesen Fall in den vorigen zu verwandeln, man darf nur durch beide WinkelSpizen den DurchMesser ACB ziehn. — Nun ist alles wie vorhin, aber doppelt: denn wir haben zwei Winkel am Umfange BAD, BAE; und zwei am MittelPunkte, BCD, BCE. Zu mehrer Bequemlichkeit wollen wir die beiden ersten mit m und n, die beiden lezten mit r und s bezeichnen, und nun A = m + n mit C = r + s vergleichen.

S. $\left.\begin{array}{l} r = 2m \\ s = 2n \end{array}\right\}$ (I)

$r + s = 2m + 2n$ (§ 36)

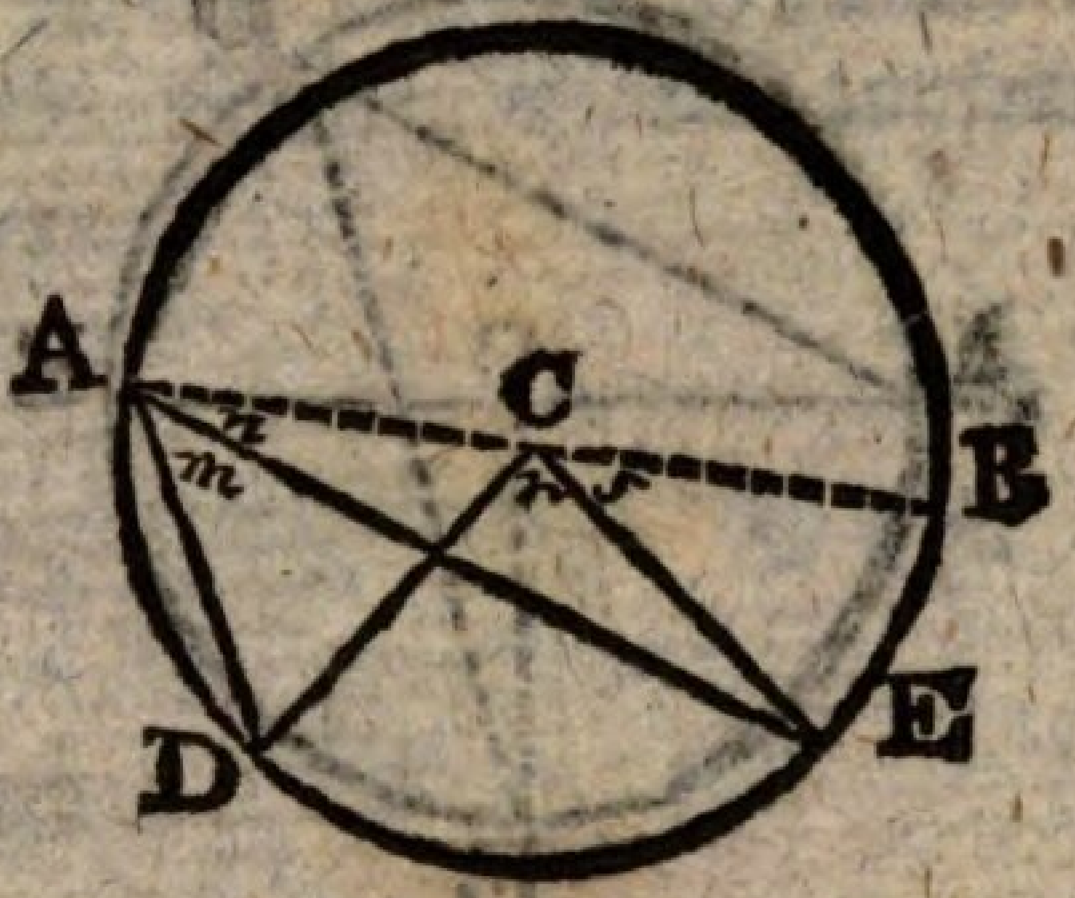
oder $C = 2A$



III. L. Es wird noch ein Kreis beschrieben, und in demselben werden zwei HalbMesser CD, CE gezogen. Von dem äussersten Ende E eines derselben, wird eine Sehne EA gezogen, welche den andern HalbMesser schneidet.

Zu-

Zulezt wird die Sehne AD gezogen. — Hier sind wieder zwei Winkel, einer am Umfange, einer am MittelPunkte, auf einerlei Bögen; auf welche die vorigen Beweise aber nicht passen. Wie werden wir hier erfahren ob C zwei Mal so groß ist als A?



S. Wenn ich eine HülfsLinie ACB ziehe, so ist

$$\left.\begin{array}{l} r + s = 2m + 2n \\ \quad\; s = \quad\;\;\; 2n \end{array}\right\} \text{(I)}$$

$$\overline{r \quad = 2m} \qquad (\S\ 37)$$

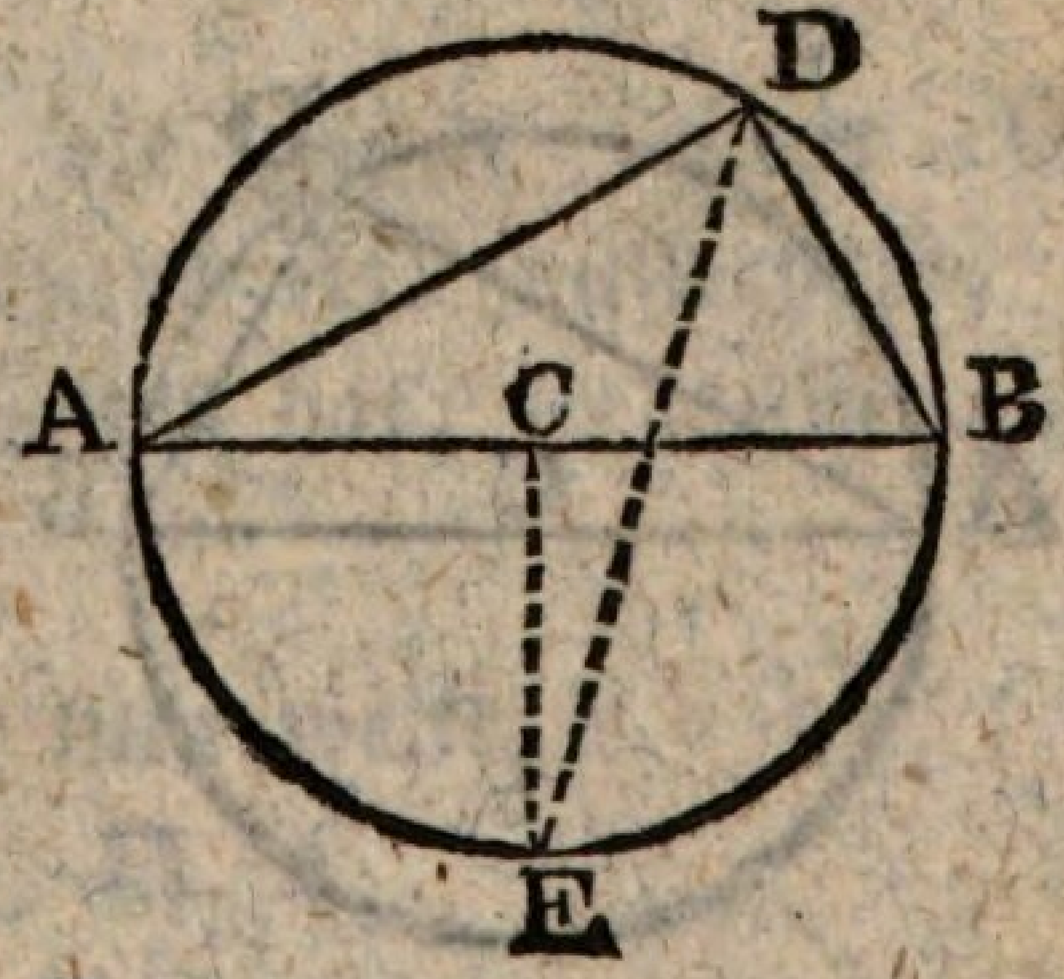
L. Wir haben also von jedem einzelnen Fall bewiesen, daß der MittelPunktsWinkel doppelt so groß ist, als der mit ihm auf einerlei Bogen stehende UmfangsWinkel, und können nun alle drei Fälle in einen einzigen Satz zusammen fassen.

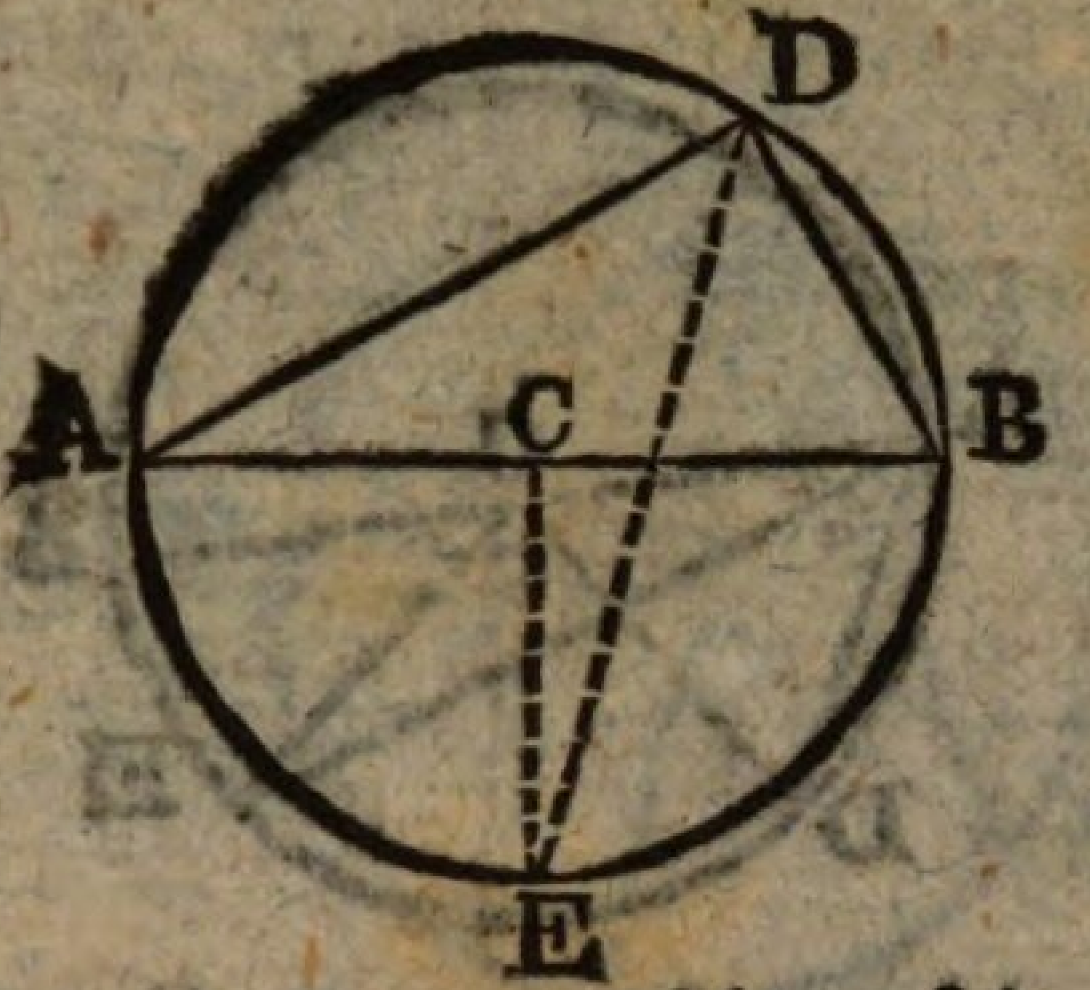
S. Der Winkel am MittelPunkt eines Kreises ist doppelt so groß als der mit ihm auf einerlei Bogen stehende Winkel am Umfange.

Der ein und zwanzigste Satz.

§ 199.

L. Es wird ein Kreis beschrieben, und ein Durchmesser ACB gezogen. Hierauf werden nach einem beliebigen Punkte D des Umfanges, von beiden Enden des Durchmessers,





gerade Linien AD, BD, gezogen. — Wie teilt der Durchmesser den Kreis?

S. In zwei gleichähnliche Hälften (§ 168).

L. Recht! Und ein Winkel ADB, am Umfange der zwischen seinen Schenkeln den Durchmesser hat, heisst ein **Winkel im HalbKreise**. Wie groß ist ein solcher Winkel wol, gegen einen rechten verglichen?

S. Das weis ich nicht.

L. In dem leeren HalbKreise wollen wir einen senkrechten HalbMesser CE, und hiernächst die Sehne DE, ziehn. — Wie groß sind nun die Winkel ACE und BCE am MittelPunkte?

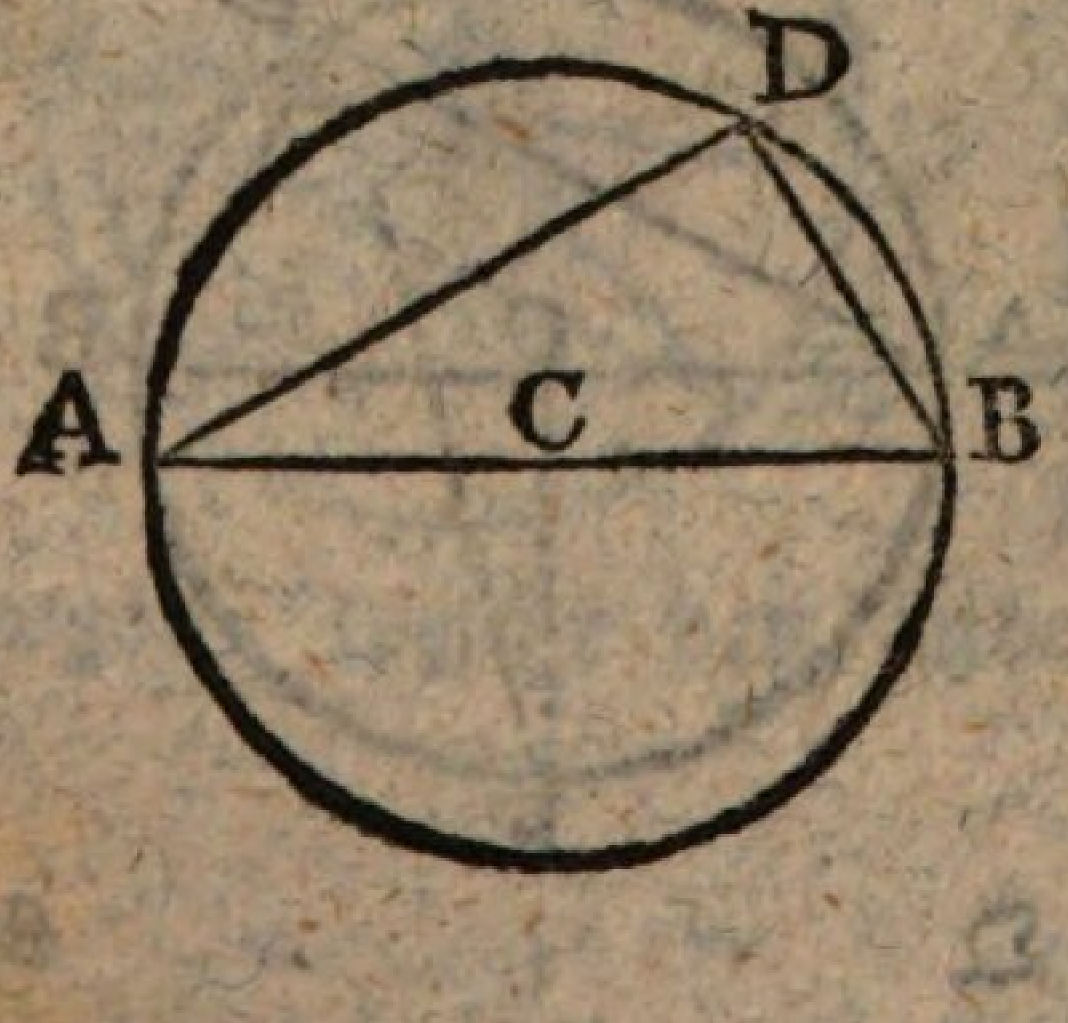
S. Jeder ist ein rechter (§ 47).

L. Und die Winkel ADE, BDE am Umfange?

S. Jeder ist die Hälfte eines rechten Winkels (§ 196); und beide zusammen sind einem rechten Winkel gleich.

L. Der Winkel im HalbKreise also ist ein rechter.

§ 200.



L. Wenn die geraden Winkel (§ 50) eingeführt und angenommen wären; so liesse der Beweis sich kürzer führen. — Wie groß ist ein gerader Winkel ABC?

S. $\angle$ ABC = 2 ∟ (§ 50)

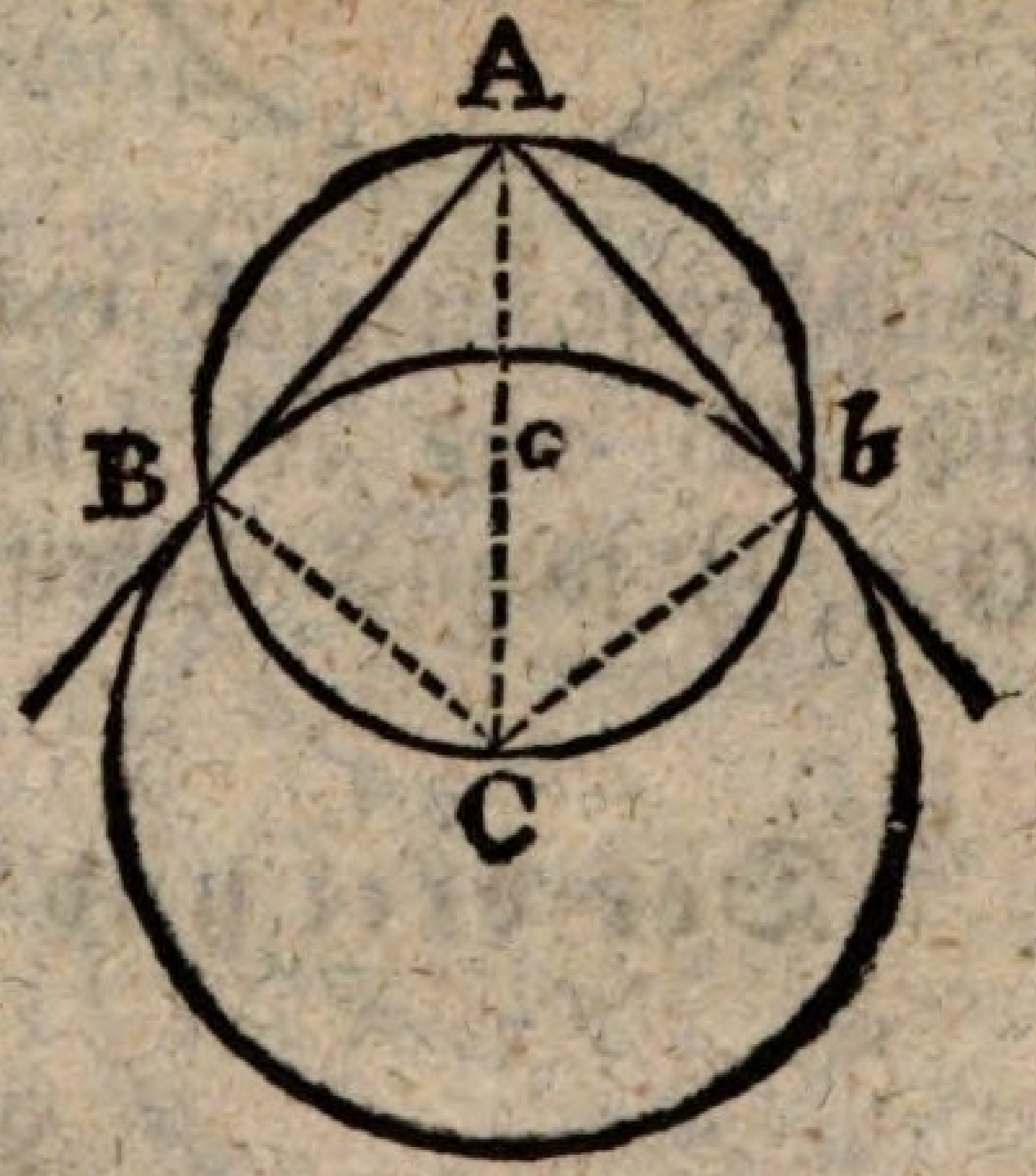
L.

L. Und da ACB hier ein Winkel am MittelPunkte ist; so ist der mit ihm auf einerlei Bogen stehende Umfangs-Winkel ADB = ∟ (§ 196).

Der zwei und zwanzigste Satz.

§ 201.

L. Es wird ein Kreis, und ein Punkt A ausserhalb demselben gegeben und verlangt von diesem Punkt A zwei Streiflinien zu ziehn. Wie geschiht das? der vorige Satz verbunden mit § 193, gibt uns ein Mittel dazu an die Hand.

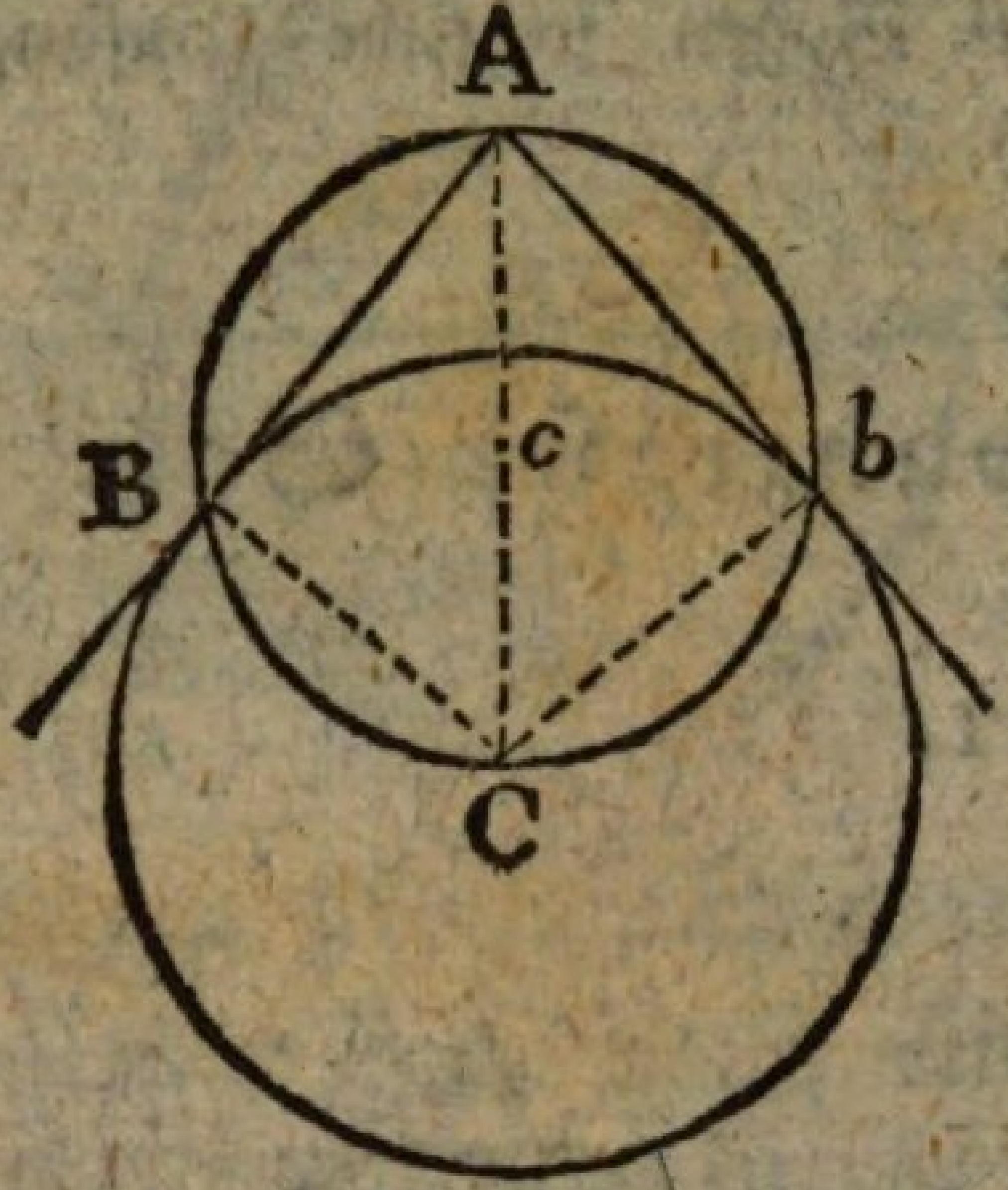


S. Der gegebene Punkt A wird mit dem MittelPunkte C, durch eine gerade Linie AC verbunden: diese wird gehalbt in c (§ 66). Aus c wird, mit dem HalbMesser cA = cC, ein zweiter Kreis beschrieben.

L. Recht! Aber werden diese beiden KreisLinien auch einander schneiden?

S. Allerdings, da die zweite einen EndPunkt A ihres DurchMessers AC ausserhalb, den andern C innerhalb der ersten hat; so müssen beide sich zwei Mal schneiden.

L. Auch richtig! Und nun weiter?



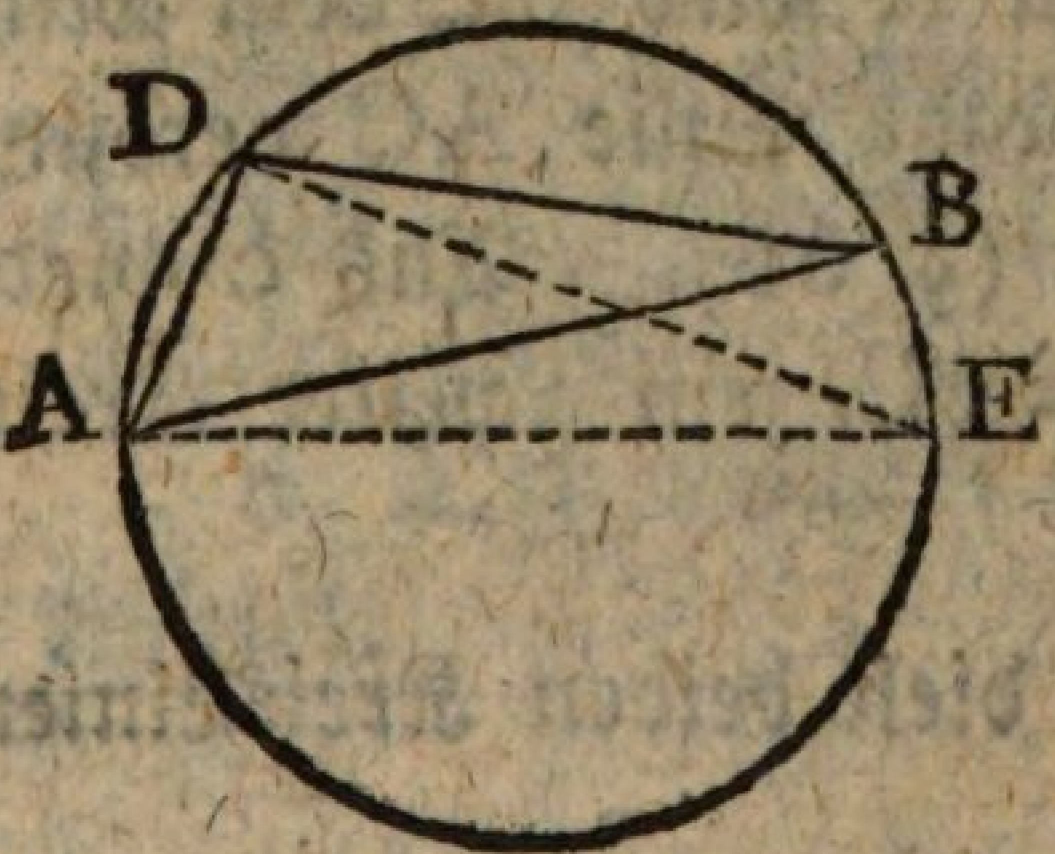
S. Von A werden durch die SchneidePunkte B und b, gerade Linien gezogen, welche den Kreis streifen.

L. Und wie beweis't man es?

S. Ich ziehe die HalbMesser CB, cb; so sind ABC und AbC Winkel im HalbKreise, folglich rechte Winkel (§ 199), folglich AB und Ab senkrecht auf dem HalbMesser (§ 47); folglich StreifLinien (§ 193).

Der drei und zwanzigste Satz.

§ 202.



L. Es wird ein Kreis beschrieben, und in demselben eine Sehne AB, und ein DurchMesser AE gezogen. Hierauf wird auf dem Umfange des kleinern Abschnittes ein Punkt D angenommen, und von demselben werden nach den EndPunkten der Sehne, und des Durchmessers, gerade Linien DA, DB, gezogen. — Wie heisst nun der Winkel ADB?

S. Ein Winkel im kleinern Abschnitte (§ 170).

L

L. Und der Winkel ADE?

S. Ein Winkel im HalbKreise.

L. Und welcher von beiden ist der gröste?

S. Der im kleinern Abschnitte (§ 45).

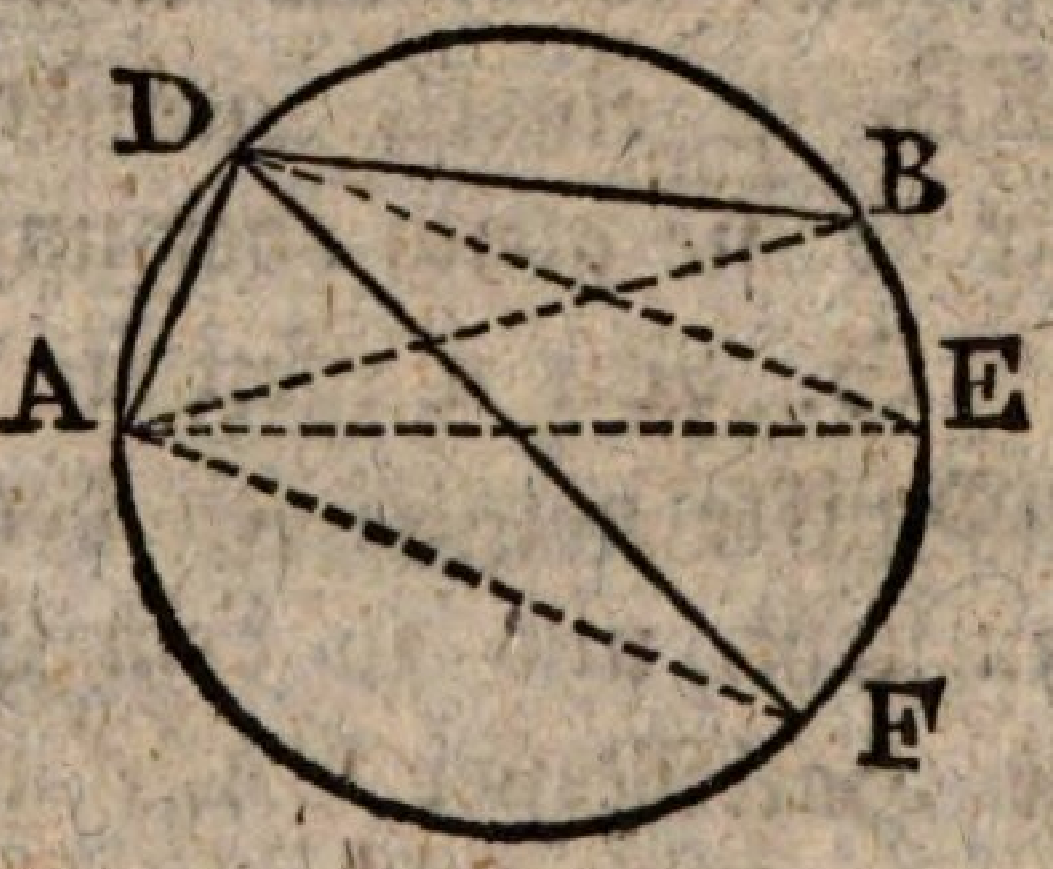
L. Aber wie groß ist der Winkel im HalbKreise?

S. So groß wie ein rechter (§ 199).

L. Der Winkel im kleinern Abschnitte also ==?

S. Ist grösser als ein rechter.

L. Nun wollen wir, auf der andern Seite des Durchmessers, eine Sehne AF ziehn, und die Punkte D und F durch eine gerade Linie verbinden. — Wie heisst nun der Winkel ADF?



S. Ein Winkel im grössern Abschnitte (§ 170).

L. Ist er grösser, oder kleiner als ein rechter?

S. Er ist kleiner als ADE, (§ 45); folglich kleiner als ein rechter (§ 199).

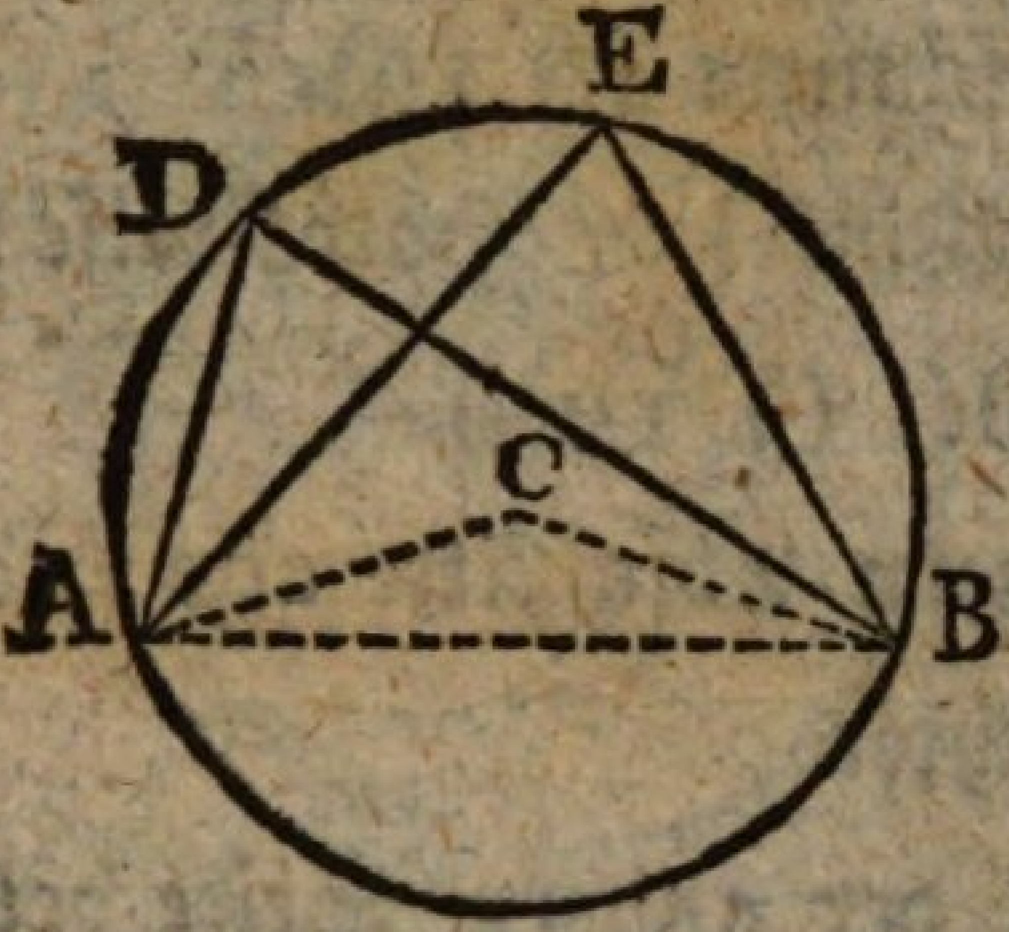
L. Ein Winkel also im kleinern Abschnitte ist grösser, und einer im grössern ==?

S. Ist kleiner als ein rechter Winkel.

L. Eben dies kan man auch so ausdrükken: Ein Winkel im kleinern Abschnitte ist stumpf, und ein Winkel im grössern ist spitz. (§ 48).

Der vier und zwanzigste Satz.

§ 203.



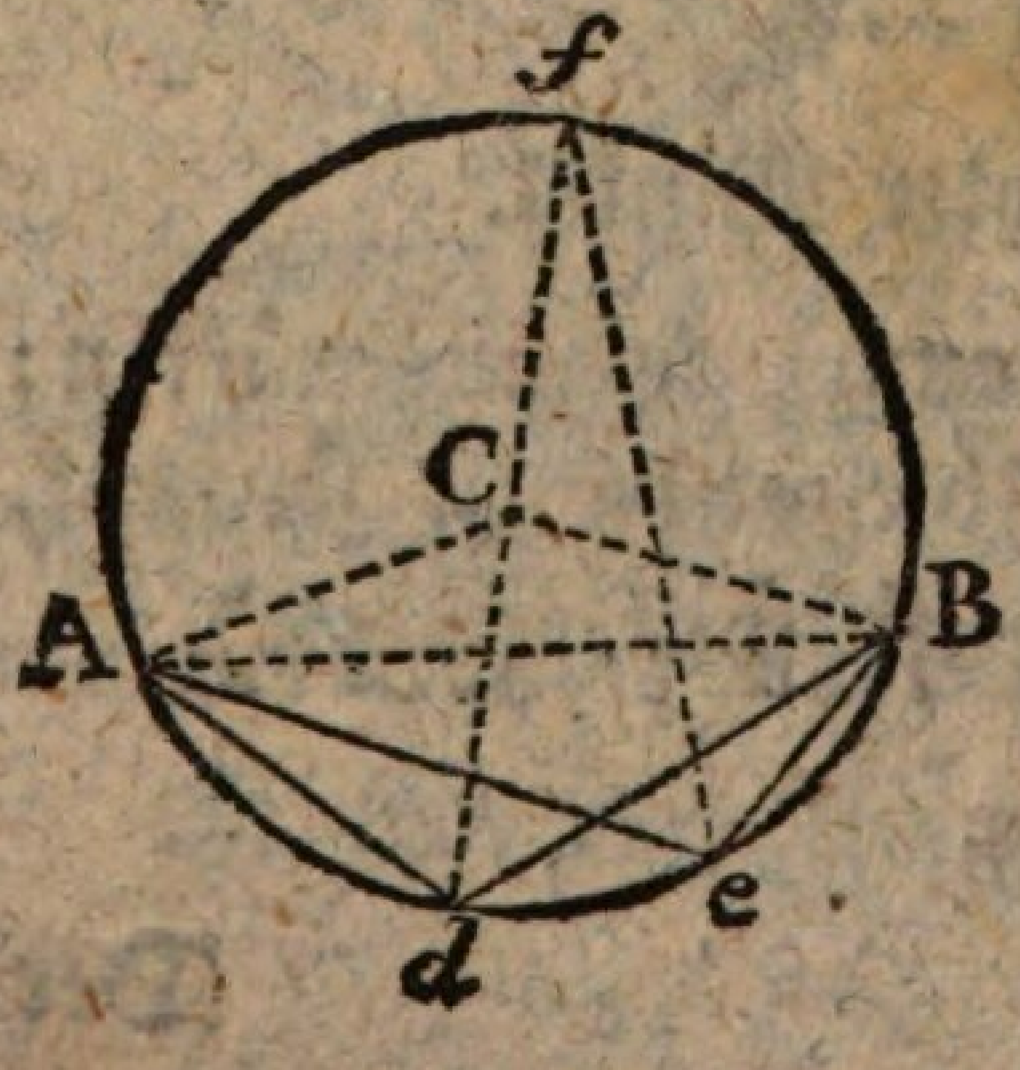
L. Es wird ein Kreis beschrieben, und eine Sehne AB gezogen. Hierauf werden, auf dem Umfange des grössern Abschnitts, zwei Punkte D und E bemerkt, und von ihnen, nach den Enden der Sehne, gerade Linien, DA, DB, EA, EB, gezogen: so erhält man zwei Winkel ADB und AEB, in einerlei grössern Abschnitte. Wie erfahren wir ob sie gleich oder ungleich sind?

S. Wir müssen sie mit einem Winkel am MittelPunkte vergleichen der mit ihnen auf einerlei Bogen steht, und zu dem Ende die Sehne AB, und die HalbMesser CA, CB ziehn.

L. Recht! Und nun weiter?

S. Nun ist $\angle ADB = \frac{1}{2} \angle ACB$ und $\angle AEB = \frac{1}{2} \angle ACB$ (§198)

$$\angle ADB = \angle AEB \text{ (§ 43).}$$



L. Winkel also in einerlei grösserm Abschnitte sind gleich; sind es aber auch Winkel in einerlei kleinerm Abschnitte, wie AdB und AeB? Der vorige Beweis passt hier nicht, weil der (hohle) Winkel ACB mit

mit ihnen nicht auf einerlei Bogen steht. Wir müssen uns daher nach einem andern Beweise umsehn, und wollen, zu dem Ende, den Durchmesser dCf, und von dem andern, die Sehne ef ziehn. Nun ist jeder der gegebenen Winkel in zwei andre zerlegt, von denen immer zwei und zwei, mit einem Winkel am MittelPunkt auf einerlei Bogen stehn und folglich die Hälfte von ihm (§ 198), einander gleich sind. — Welches sind die einander gleichen Winkel?

S. $Adf = \frac{1}{2} ACf = Aef$
$Bdf = \frac{1}{2} ACf = Bef$ (§ 198)

$Adf + Bdf = Aef + Bef$ (§ 43)

$AdB = AeB$ (§ 45).

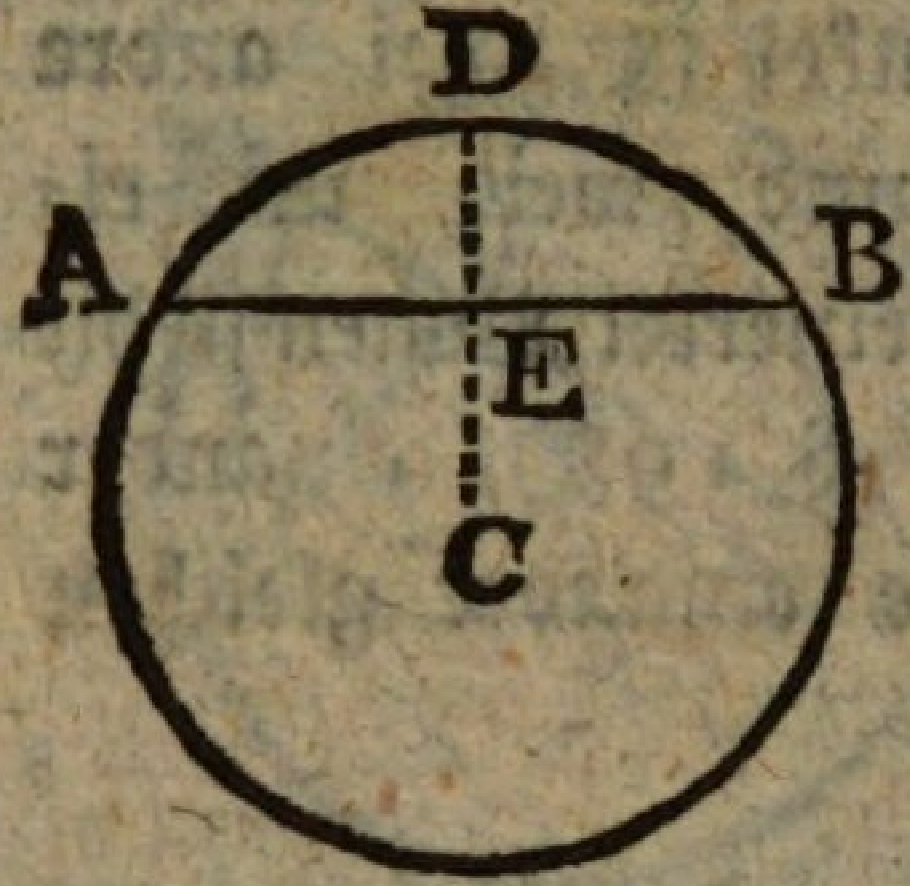
L. Nun lässt sich, ohne Einschränkung, behaupten: Winkel in einerlei Abschnitte, oder Winkel am Umfange die auf einerlei Bogen stehn, sind einander gleich.

§ 204.

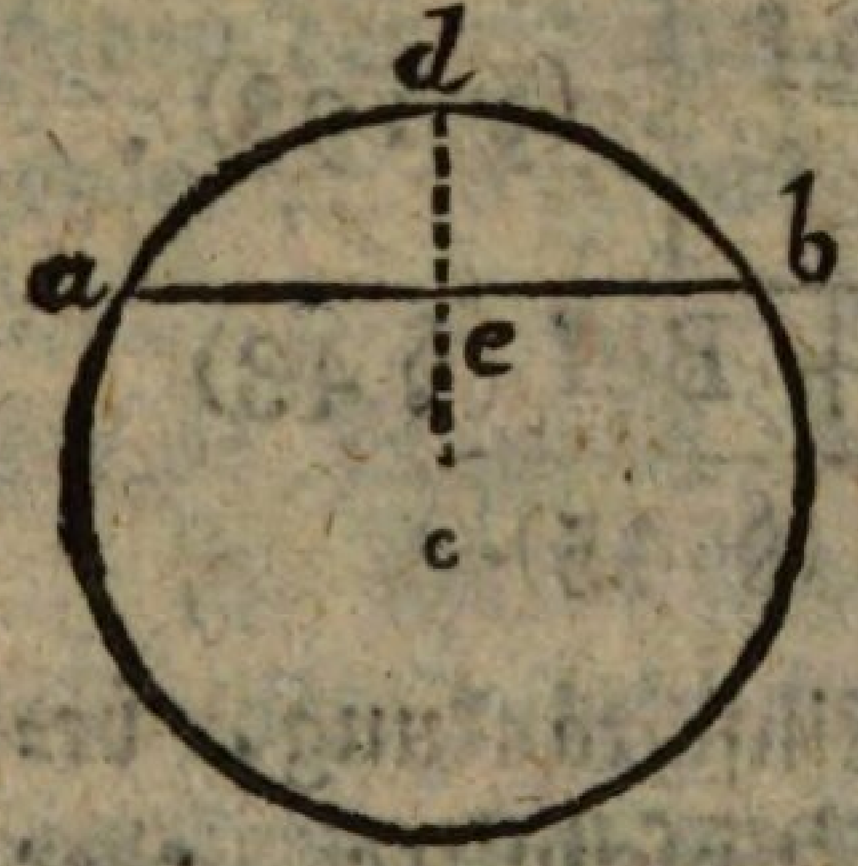
Euklides und Kästner haben für den zweiten Fall keinen Beweis. Wären die erhabenen Winkel in der Geometrie allgemein anerkant, so würde er auch keines Beweises bedürfen.

Der fünf und zwanzigste Satz.

§ 205.



L. Mit gleichen HalbMessern werden zwei Kreise beschrieben. In einem derselben wird eine beliebige Sehne AB gezogen, und in dem andern eine ihr gleiche ab. — Wenn man nun dieser Kreise MittelPunkte auf einander legt, werden dan die KreisLinien auch auf einander fallen?



S. Ja (§ 169).

L. Werden aber auch die zu den gleichen Sehnen gehörigen Bögen ADB und adb einander gleich seyn? und wie wird man es beweisen?

S. Ich halbe die Sehnen in E und e (§ 66); und ziehe durch ihre Mitte die HalbMesser CED und ced.

L. Recht! Wenn ich nun C auf c, und CD auf cd lege, wo fällt E hin?

S. Auf e (§ 186, 26)

L. Und EA, EB?

S. Auf ea und eb. (§ 176, 49, 26).

L. Und ADB?

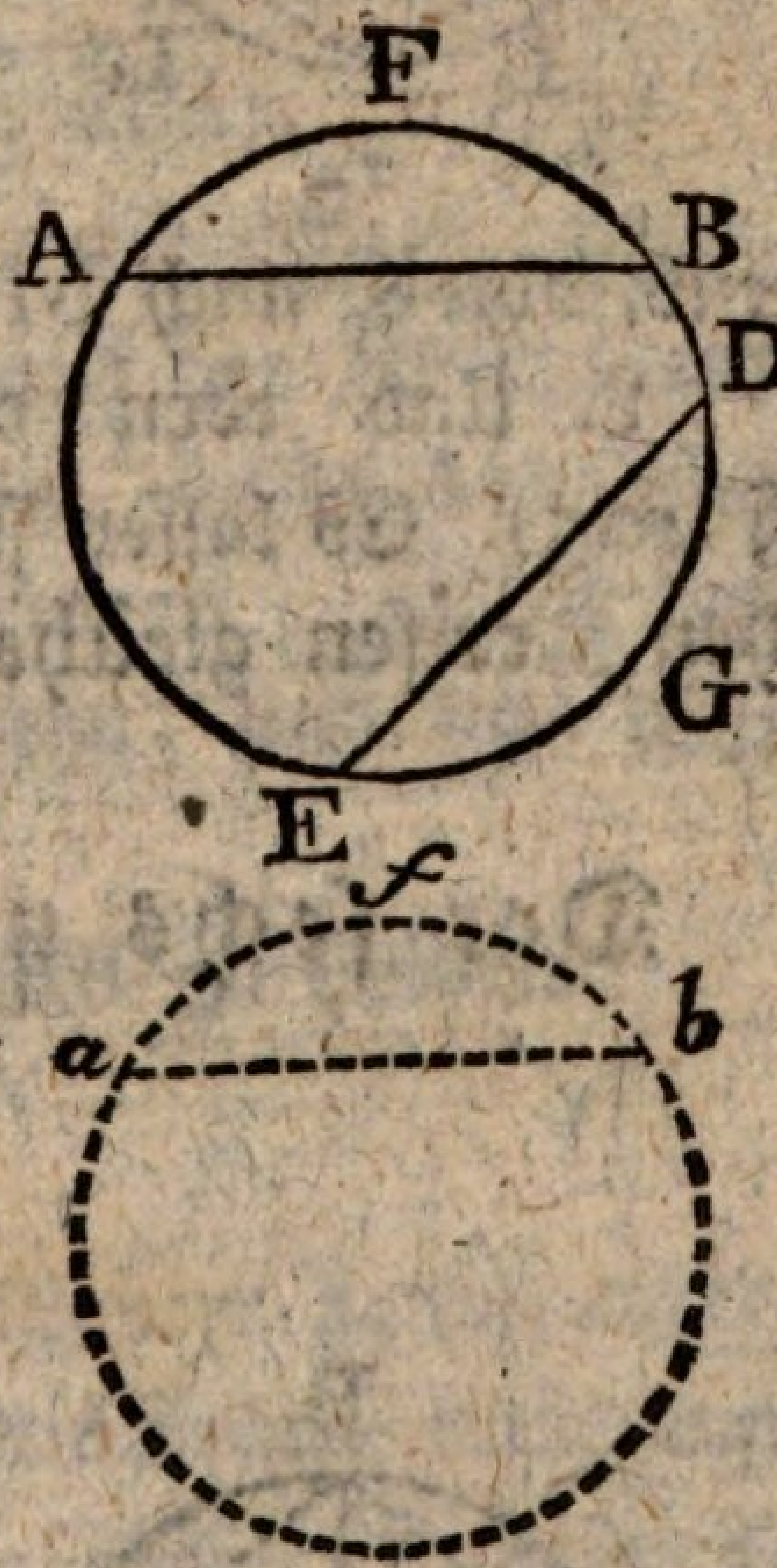
S. Auf adb (§ 169).

L. Also ADB = adb (§ 26). Wie lautet nun unser LehrSatz?

S. In gleichen Kreisen gehören zu gleichen Sehnen gleiche Bögen.

§ 206.

L. Solte der vorige Satz nicht auch von einerlei Kreisen gelten? Solten nicht auch in einerlei Kreise zu gleichen Sehnen AB und DE gleiche Bögen gehören? — Wir wollen einen zweiten, dem ersten gleichen Kreis beschreiben, und in demselben eine Sehne ab = AB = DE ziehn. Wie wird nun die Gleichheit der Bögen AFB und DGE bewiesen?

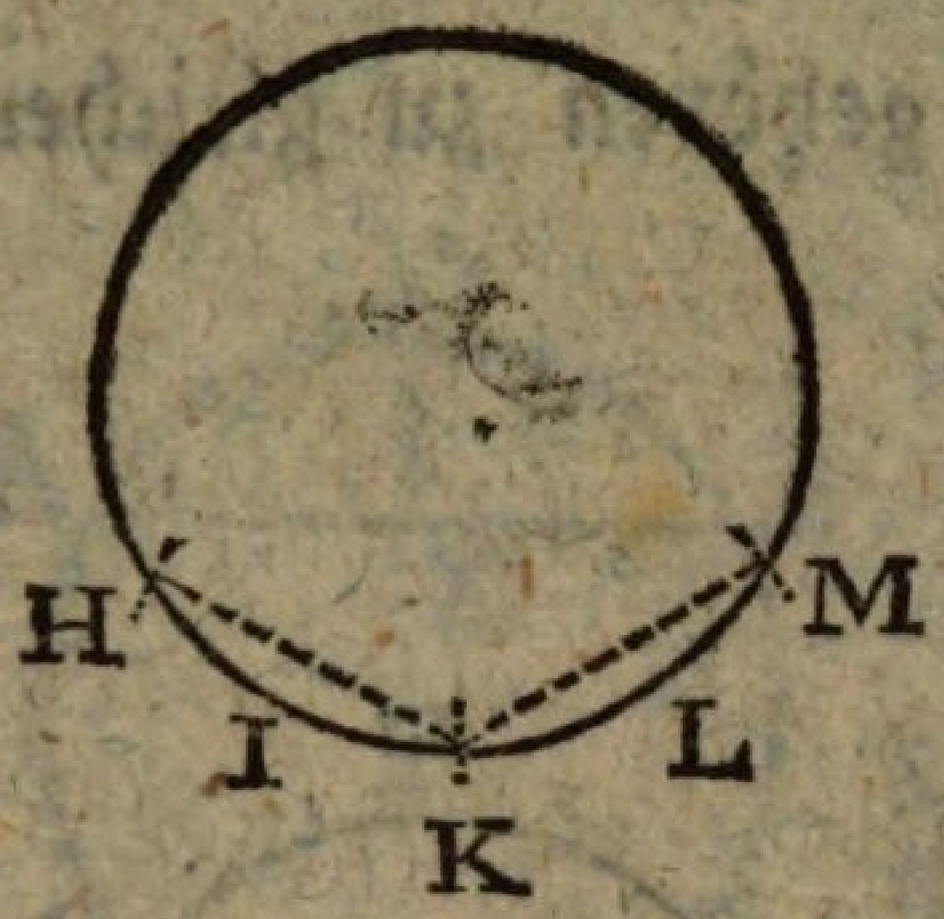


S. AFB = afb = DGE (§ 205)

$\overline{AFB} = \overline{DGE}$ (§ 21).

L. Also auch in einerlei Kreise gehören zu gleichen Sehnen gleiche Bögen.

§ 207.



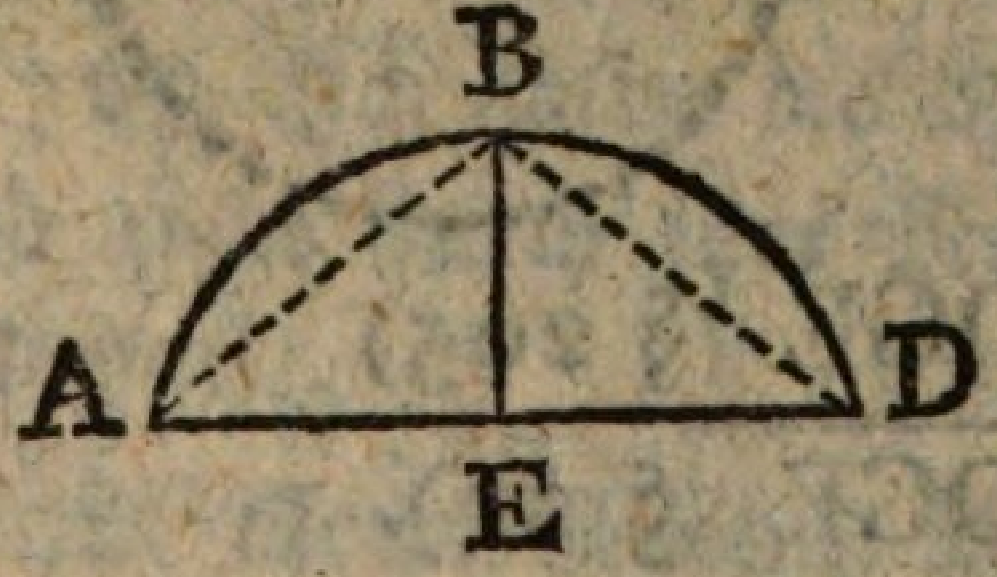
L. Gesetzt in einem Kreise wäre ein Bogen HIK gegeben, und man solte einen zweiten KLM abstekken der dem ersten gleich wäre?

S. Dan trage ich die Sehne HK des ersten Bogens, von K nach M; so ist KLM = HIK (§ 206).

L. Und eben das gilt von gleichen Kreisen (§ 205). Es lassen sich also in einerlei, und in gleichen Kreisen gleiche Bögen abstekken.

Der sechs und zwanzigste Saz.

§ 208.



L. Hier ist ein Stükk einer KreisLinie, ein Bogen ABD. Die EndPunkte desselben werden durch eine Sehne AD verbunden, und auf ihrer Mitte E wird eine senkrechte Linie errichtet welche den Bogen in zwei Teile BA und BD, zerschneidet. Sind diese Teile gleich oder ungleich?

S. Sie sind gleich.

L. Und der Beweis?

S. Ich ziehe die Sehnen AB und BD.

L.

L. Recht!

S. Nun ist in den DreiEkken BDA und BDE

DA = DC (VS.)

DB = DB (§ 29).

$\angle$BDA = $\angle$BDE (§ 49)

$\triangle$BDA ≅ $\triangle$BDE (§ 56)

BA = BE (§ 24)

Bogen BA = Bogen BE (§ 206).

L. Man kan diesen Saz als lehrSaz einkleiden und dan lautet er: Eine auf der Mitte der Sehne senkrecht stehende linie halbt den von dieser Sehne unterspannten Bogen. Man kan ihn aber auch als Aufgabe ansehn; und wie lautet er dan?

S. **Einen gegebenen Bogen zu halben.**

§ 209.

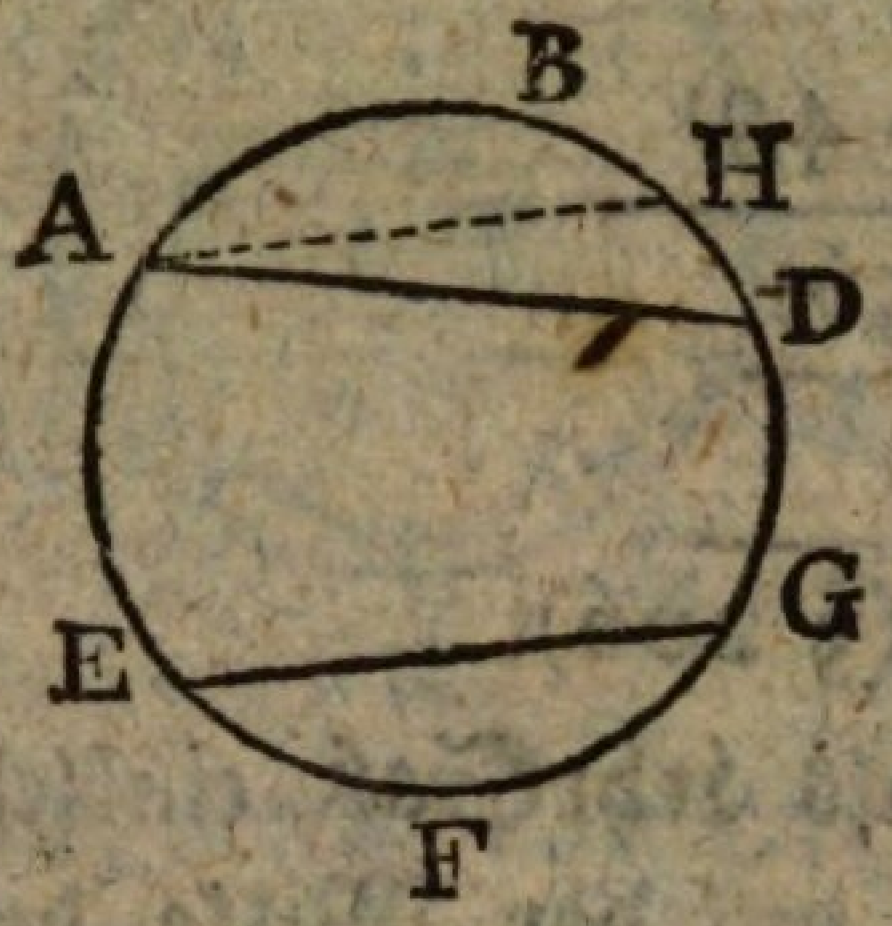
L. Da die Hälfte sich von Neuem halben lässt, so ist klar, daß man einen KreisBogen nicht nur in zwei, sondern auch in vier, acht, sechzehn &c. gleiche Teile zerteilen kan. Aber findet es auch vom ganzen Umfange Stat?

S. Ja. Zuerst wird er durch den Durchmesser in zwei Hälften zerschnitten (§ 168) dan kan jede Hälfte wieder in die Hälfte zerlegt werden (§ 206), und so fort.

L. Also auch eine Kreislinie wissen wir nun in zwei, vier, acht, sechzehn &c. gleiche Teile zu zerteilen: und der vierte Teil des Umfanges heisst ein **ViertelKreis**, oder ein **Quadrant**.

Der sieben und zwanzigste Saz.

§ 210.



L. Zwei Bögen ABD, EFG, eines Kreises sind gleich: werden die Sehnen AD, EG es auch seyn?

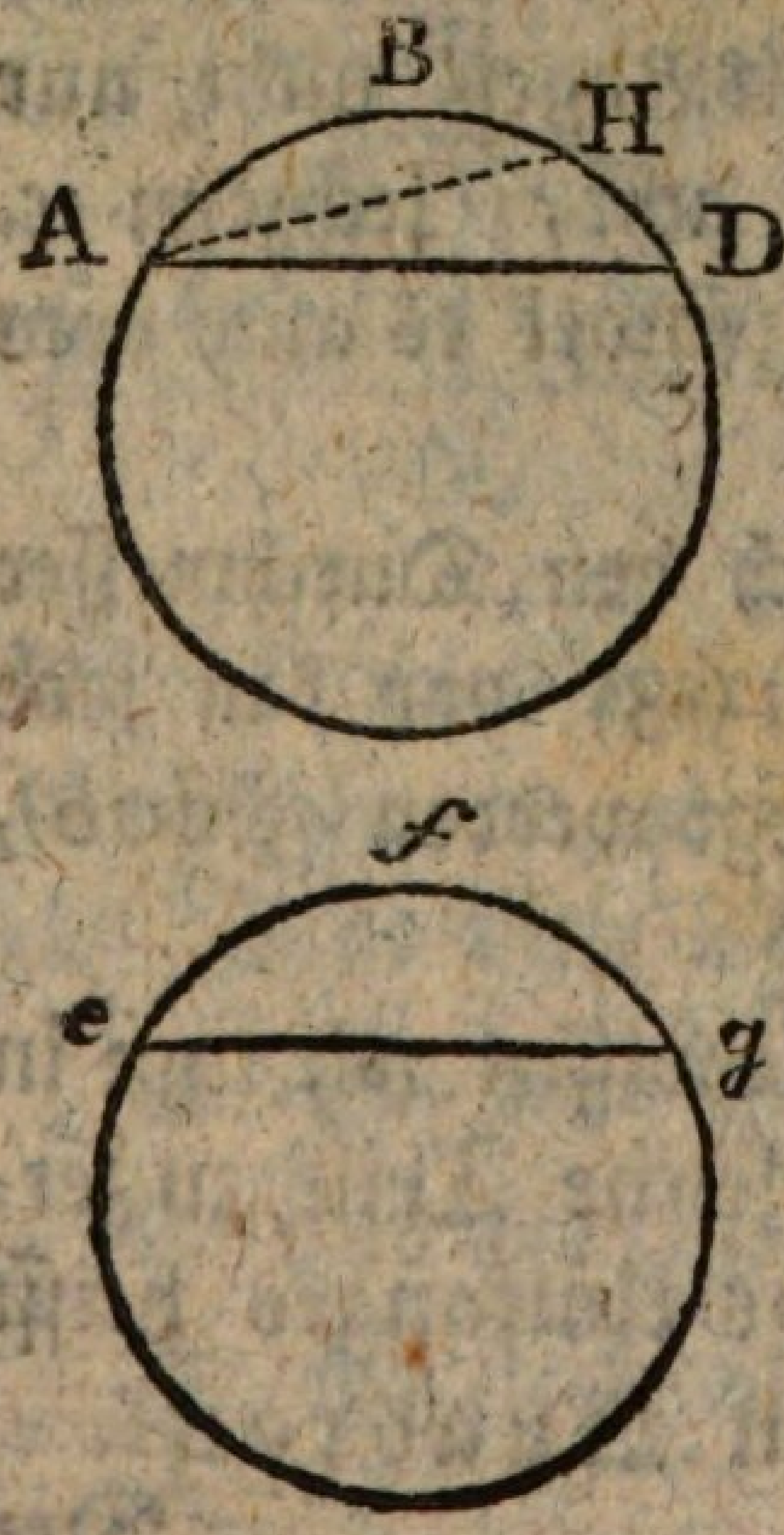
S. Wir wollen setzen sie seien es nicht, sondern eine z. B. AD sei länger als die andre CG; und wollen eine dritte AH = EG annehmen.

L. Richtig! — Wäre nun wirklich AH gleich EG, wie groß wäre dan der Bogen ABH?

S. Dan wäre ABH = EFG (§ 206).

L. Aber auf ABD = EFG (VS.)

S. Folglich ABH = ABD (§ 31) welches ein WiderSpruch ist (§ 45).



L. In einerlei Kreise also haben gleiche Bögen auch gleiche Sehnen: wenn aber in zwei gleichen Kreisen zwei Bögen ABD und efg einander gleich wären, würde da auch ihre Sehne AD und eg einander gleich seyn?

S. Ja. Der Beweis ist wie vorhin. Ich setze

AH

AH = eg

so ist ABH = efg (§ 205) = ABD (VS.)

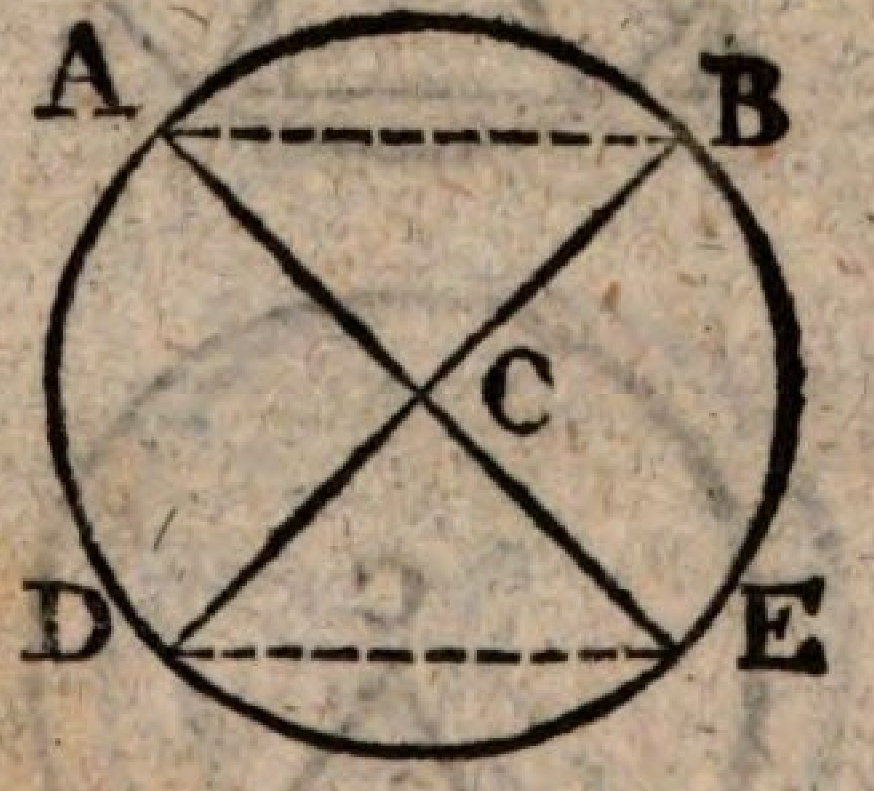
folglich ABH = ABD (§ 31),

die vorige Ungereimtheit (§ 45).

L. Also in einerlei und in gleichen Kreisen gehören zu gleichen Bögen auch gleiche Sehnen.

Der acht und zwanzigste Satz

§ 211.



L. In einem Kreise werden zwei HalbMesser CA, CB gezogen, welche einen beliebigen Winkel am MittelPunkt, ACB bilden. Hierauf wird ein zweiter dem vorigen gleicher MittelPunktsWinkel DCE gezeichnet. — Wie erfahren wir nun ob die Bögen AFB, DGE, zwischen den Schenkeln dieser Winkel gleich oder ungleich seien?

S. Da werde ich ein Par HülfsLinien, AB, DE, nötig haben. Finde ich daß diese einander gleich sind, so weis ich daß auch ihre Bögen es sind (§ 206).

L. Vollkommen richtig!

S. Um die Gleichheit der Sehnen AB und DE zu beweisen, muß ich erst die GleichAehnlichkeit der DreiEkke ABC und DEC beweisen. Es ist aber

∠ACB

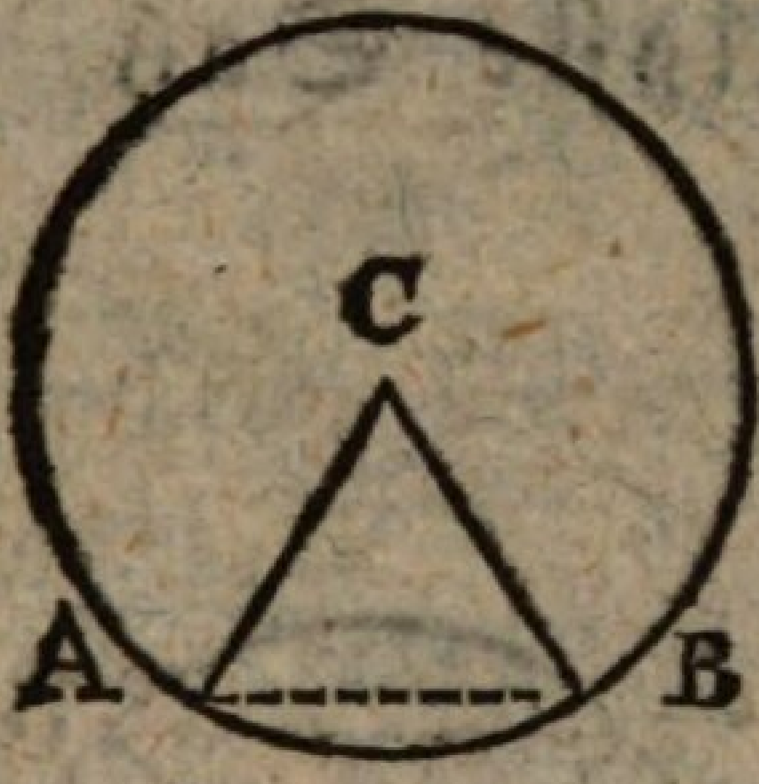
$$\angle ACB = \angle DCE \text{ (VS.)}$$

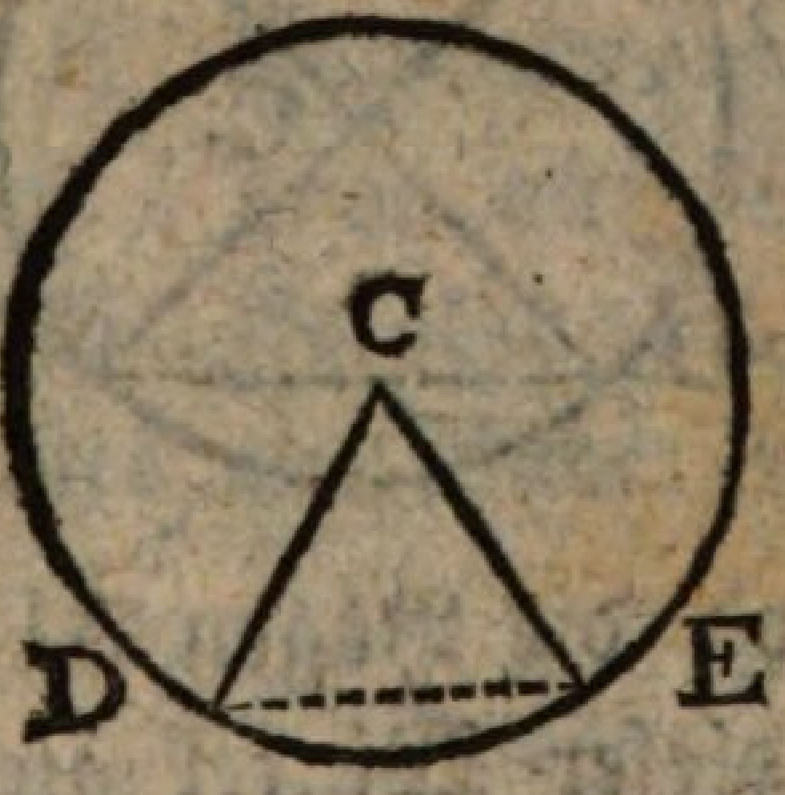
$$\left.\begin{array}{l} CA = CD \\ CB = CE \end{array}\right\} (\S\ 21)$$

$$\triangle ACB \cong \triangle DCE \ (\S\ 56)$$

$$AB = DE$$

Bogen AB = Bogen DE (§ 206).



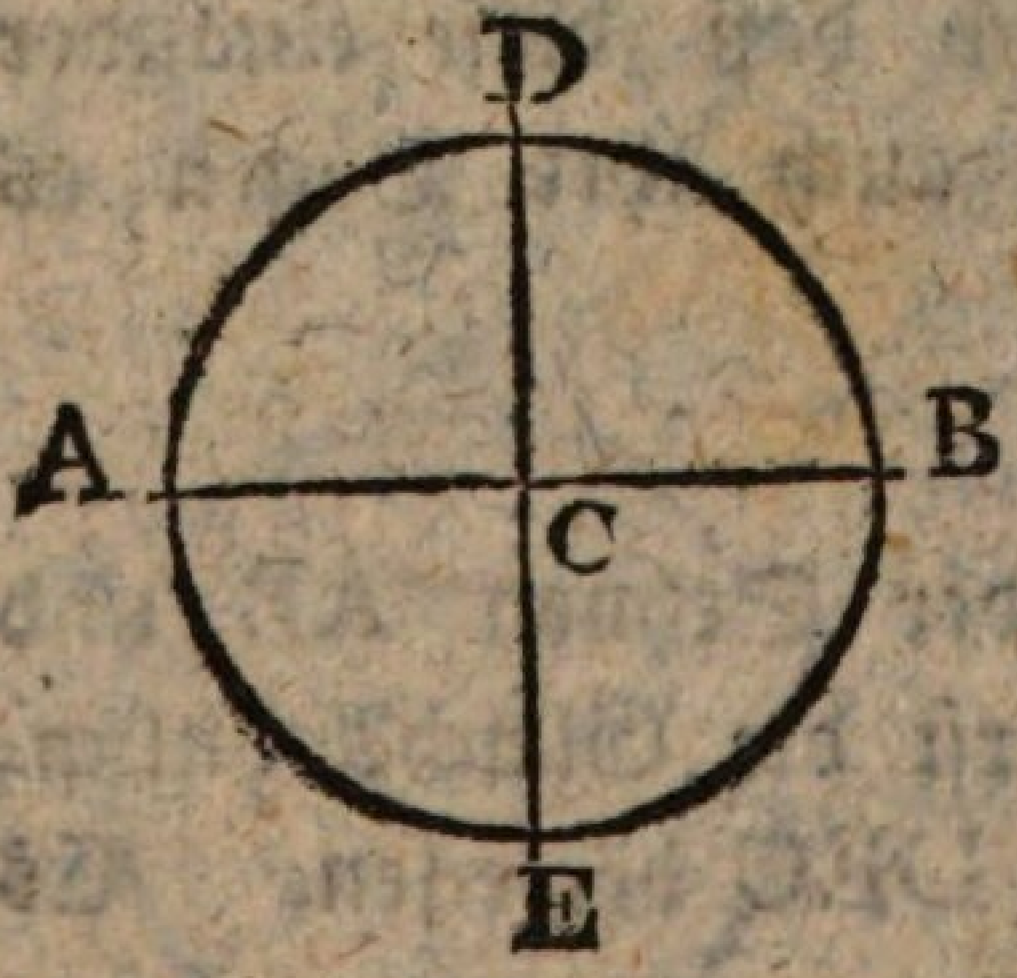


L. Wenn aber die gleichen MittelPunktsWinkel in zwei verschiedenen aber gleichen Kreisen lägen?

S. Der Beweis wäre genau der vorige. Es wäre auch da Bogen AB = B. DE (§ 205).

L. Also in einerlei, und in gleichen Kreisen stehn gleiche Winkel am MittelPunkte auf gleichen Bögen.

§ 212.



L. Eine gerade Linie AB wird von einer andern DE senkrecht durchschnitten in C, und um C wird, mit beliebigem HalbMesser, ein Kreis beschrieben. — Was für Winkel machen die Linien AB, DE mit einander?

S. Vier rechte (§ 47)

L. Und welchen Teil des Umfangs hat jeder derselben zwischen seinen Schenkeln?

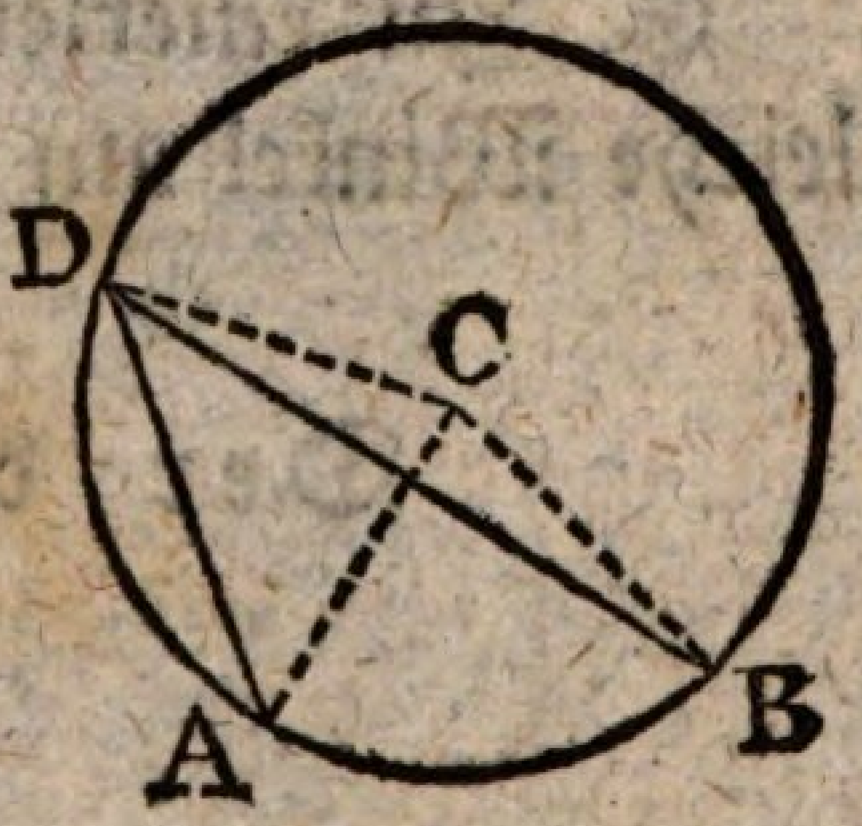
S. Da sie alle einander gleich sind (§ 49), so haben sie auch alle gleiche Teile des Umfanges hier ein Viertel desselben, zwischen ihren Schenkeln (§ 211).

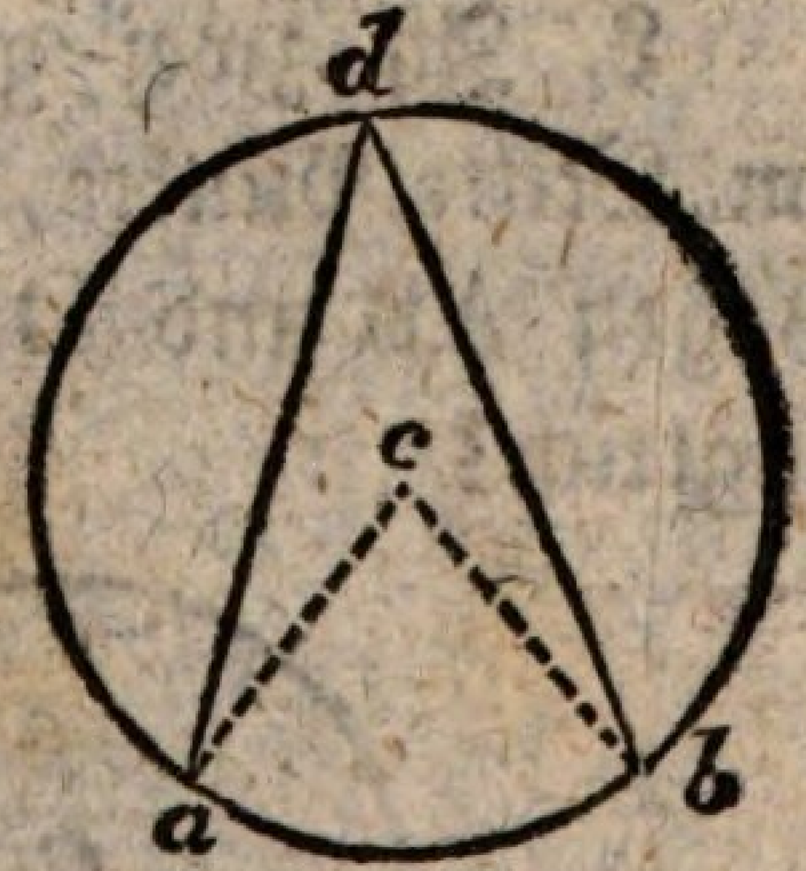
L. Ein rechter Winkel am MittelPunkte also steht auf einem Quadranten.

Der neun und zwanzigste Satz.

§ 213.

L. Es werden mit einerlei HalbMesser zwei Kreise beschrieben; und in einem derselben wird ein beliebiger Winkel ADB am Umfange, und im andern ein UmfangsWinkel adb = ADB gezeichnet. Die Frage ist: Sind die Bögen AB und ab, zwischen den Schenkeln dieser Winkel, gleich, oder ungleich? — Der vorige Satz (§ 30) gibt uns einen FingerZeig.





S. Ich ziehe nach den EndPunkten der Sehnen die HalbMesser CA, CB, und ca, cb; so stehn die Winkel am MittelPunkte, C und c mit denen

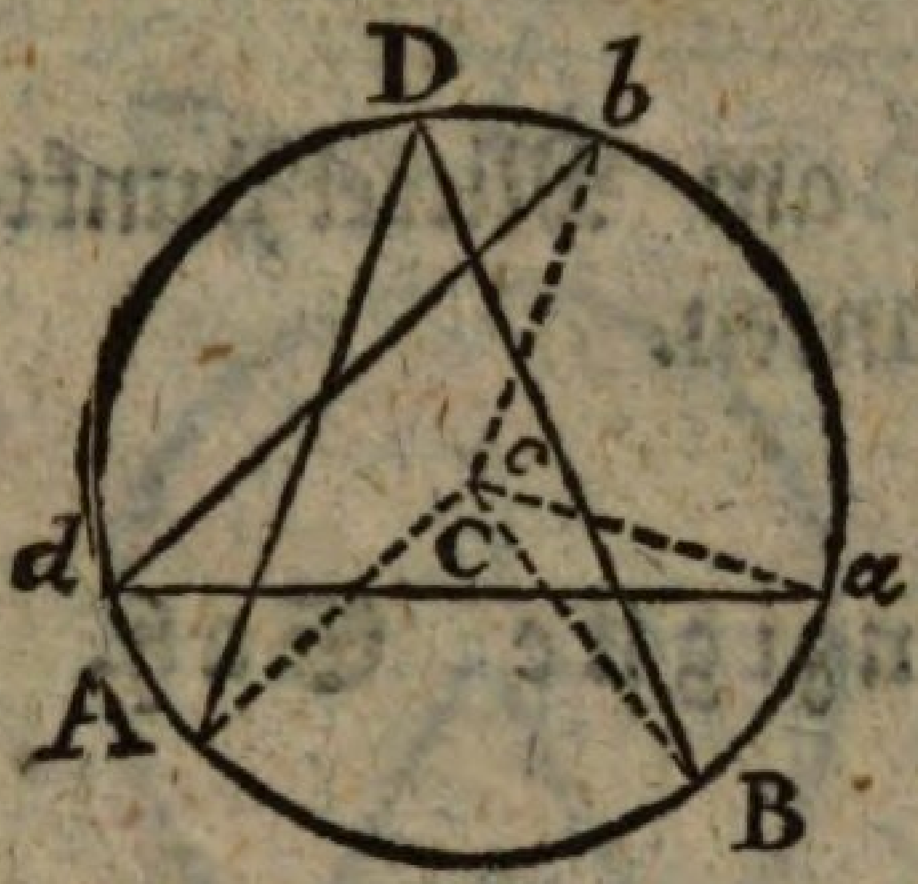
am

am Umfange, D und d auf einerlei Bogen, und sind folglich zwei Mal so groß (§ 198)

Aber D = d (VS.)

folglich auch C = c (§ 43)

Bogen AB = Bogen ab (§ 210).



L. In gleichen Kreisen also stehn gleiche Winkel am Umfange auf gleichen Bögen: wie aber in einerlei Kreise?

S. Es findet genau der vorige Beweis Stat.

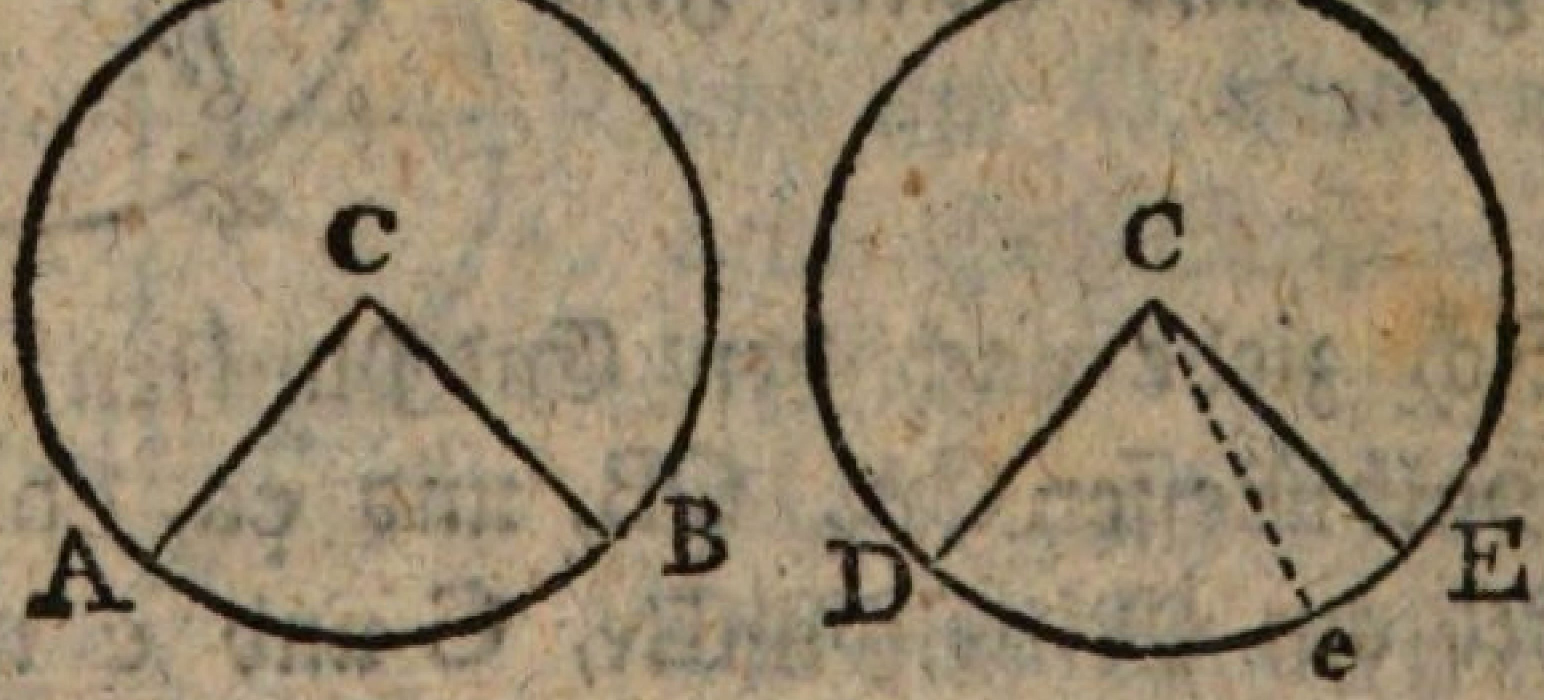
L. Wir können also beide Fälle in einen Satz zusammen fassen.

S. In einerlei und in gleichen Kreisen stehn gleiche Winkel am Umfange auf gleichen Bögen.

Der dreißigste Satz.

§ 214.

L. In zwei gleichen Kreisen stehn zwei Winkel am MittelPunkte, ACB und DCE, auf gleichen Bögen AB und DE. Sind die Winkel gleich, oder ungleich?



S.

S. Wir wollen annehmen sie wären ungleich und DCE wäre grösser als ACB. Ich ziehe also einen neuen HalbMesser Ce innerhalb CD und CE, und nehme nun an es sei

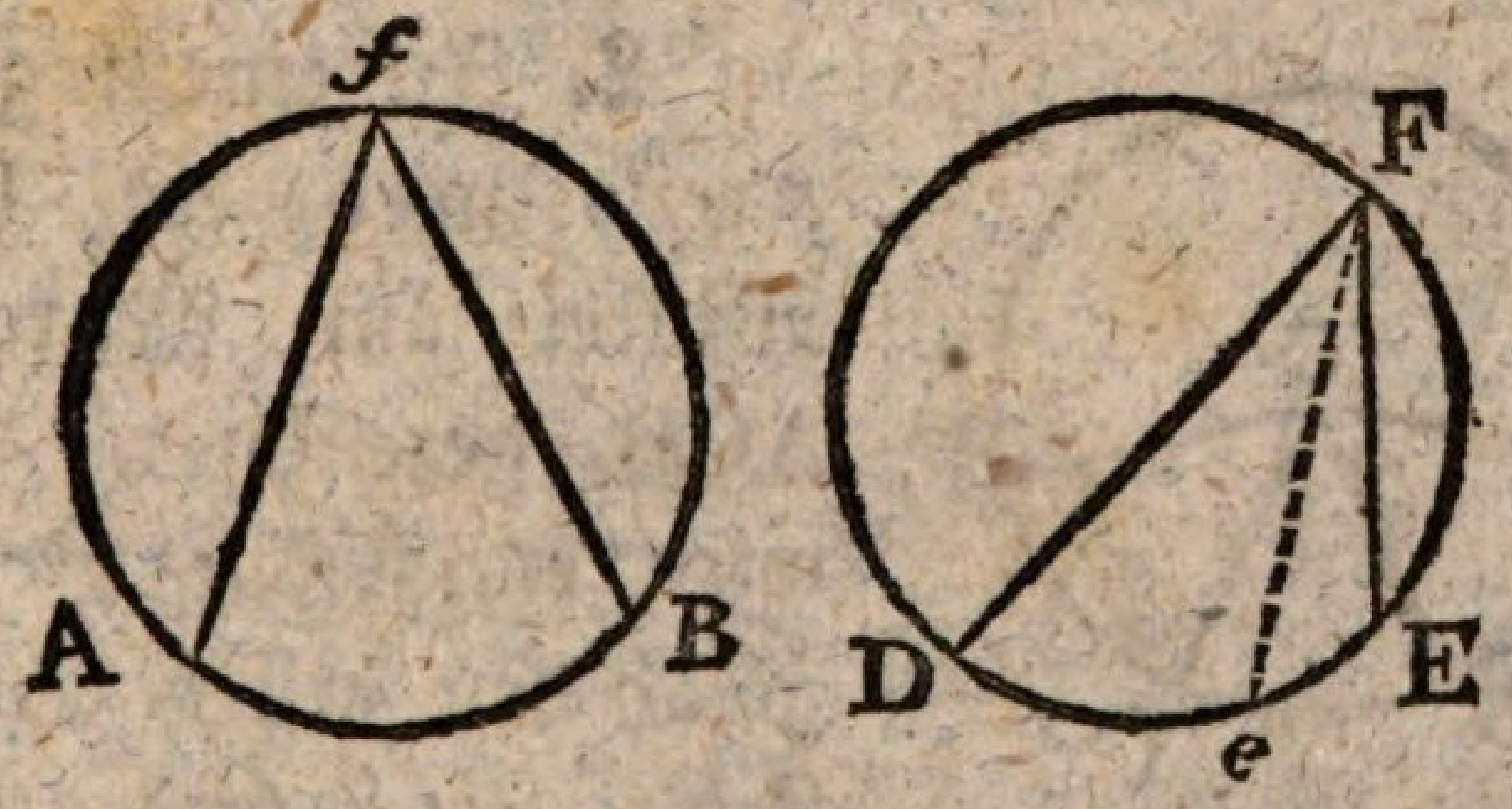
$$\angle ACB = \angle DCe$$

Dan ist B. AB = B. De (§210)

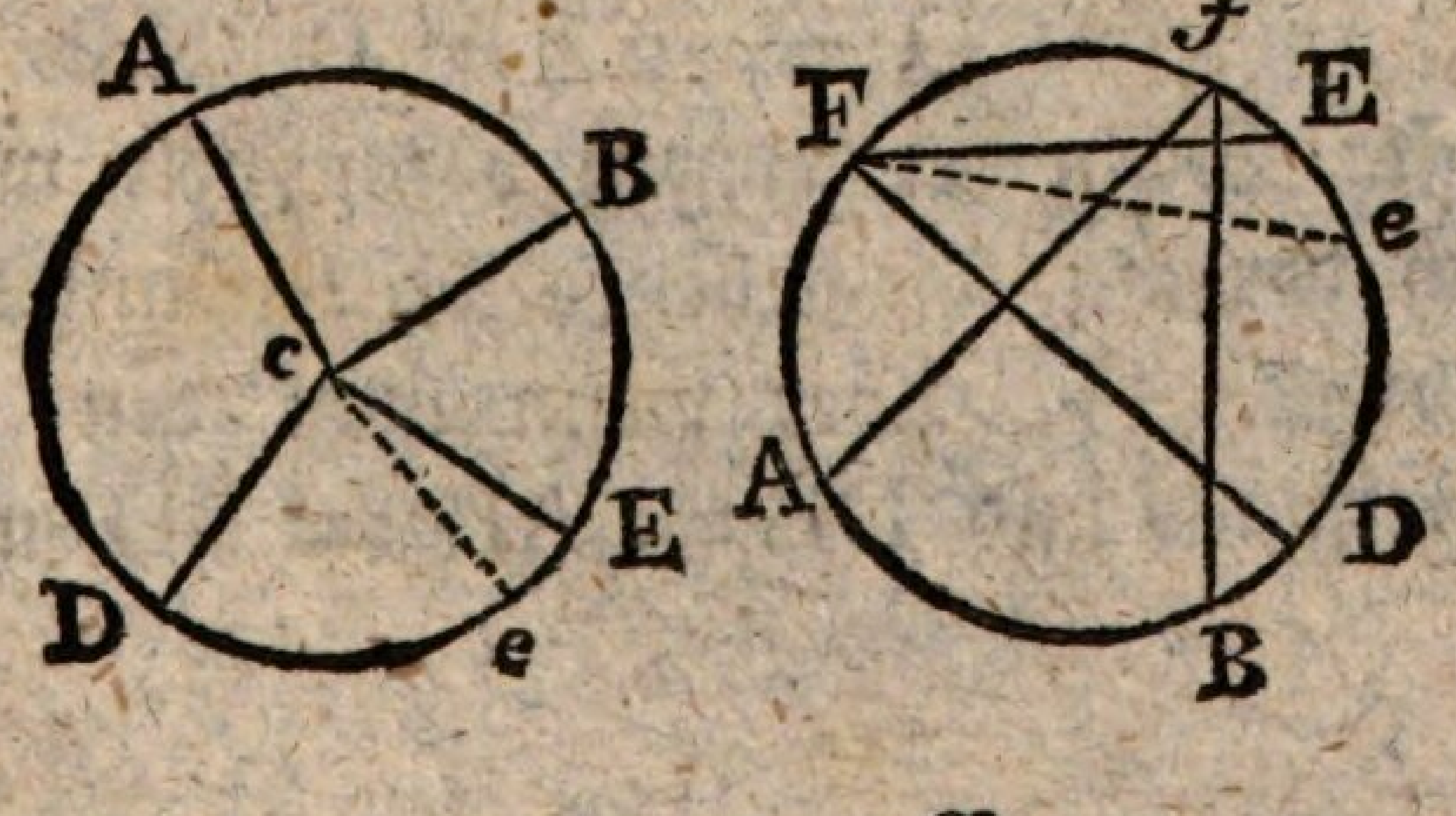
Aber B. AB = B. DE (VS.)

Folglich B. De = B. DE (§ 31);
welches ungereimt ist. (§ 45).

L. MittelPunktsWinkel also die in gleichen Kreisen auf gleichen Bögen stehn, sind gleich; wie ist es aber mit UmfangsWinkeln AfB und DFE, auf gleichen Bögen AB und DE?



S. Genau eben so. Gesetzt einer, DFE, wäre grösser als der andre AfB; so nehme ich DFe = AfB, an; so passt der vorige Beweis, und es ist AB = DE.



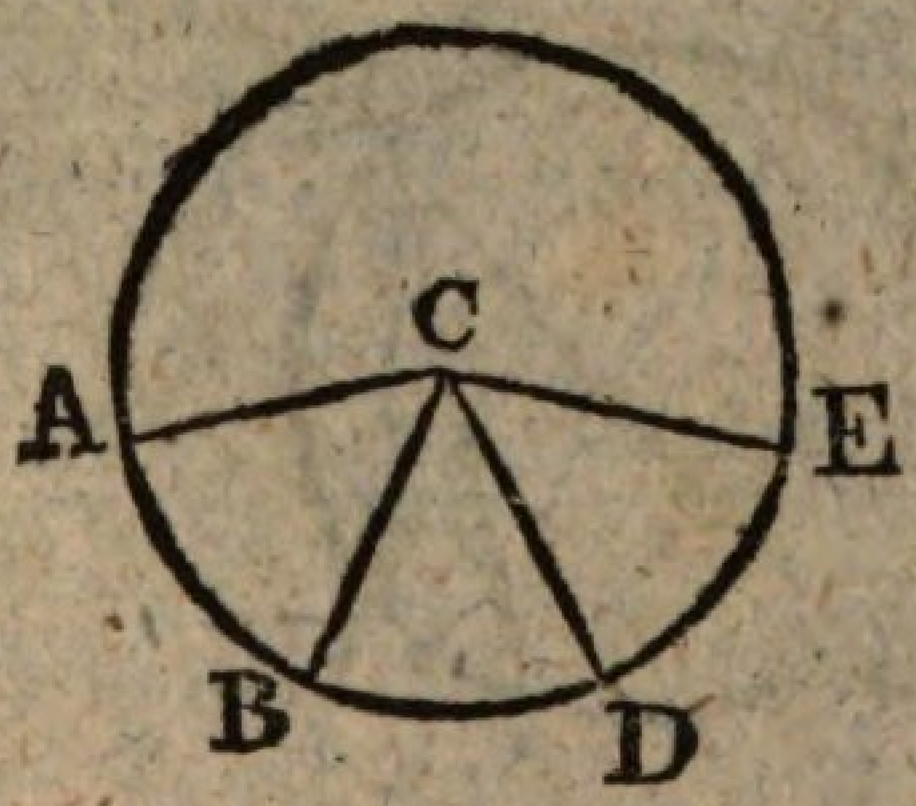
L. Auch damit wären wir also fertig. Nun kömt es noch darauf an, ob auch von einerlei Kreisen gelte, was wir von gleichen erwiesen haben.

S. Auch da passen die vorigen Beweise, wie der blosse Anblikk lehrt.

L. Also in einerlei, und in gleichen Kreisen sind MittelPunktsWinkel auf gleichen Bögen einander gleich, und UmfangsWinkel auf gleichen Bögen auch einander gleich.

Der ein und dreißigste Satz.

§ 215.



L. In einem gegebenen Kreise wird ein beliebiger Winkel am MittelPunkte, ACB, gezeichnet. Hierauf wird ein zweiter Bogen BD, gleich den ersten AB, abgestekkt (§ 207), und der HalbMesser CD gezogen. — Wie groß ist nun der auf BD stehende Winkel BCD?

S. $\angle BCD = \angle ACB$ (§ 213).

L. Also B. ABD = 2 B. AB

$$\angle ACD = 2 \angle ACB$$

Das heisst: Wenn der Bogen verdoppelt wird, so wird auch der auf ihn stehende MittelPunkts-Winkel verdoppelt. — Aber wenn man den Bogen AB verdreifachte und DE = AB = BD machte?

S.

S. So würde auch der Winkel ACB verdreifacht, und ∠ACE = 3∠ACB.

L. Es ist klar daß man dieses fortsetzen kan so weit man will; desgleichen, daß wan der Bogen gehalbt, gedritteilt, geviertteilt, oder verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht rc. wird, der auf ihn stehende Winkel gleiche Verminderung erfährt. Mit einem Worte: In einem Kreise verhalten sich Winkel am MittelPunkte zu einander wie die Bögen auf welchen sie stehn. Durch Zeichen drükkt man das so aus:

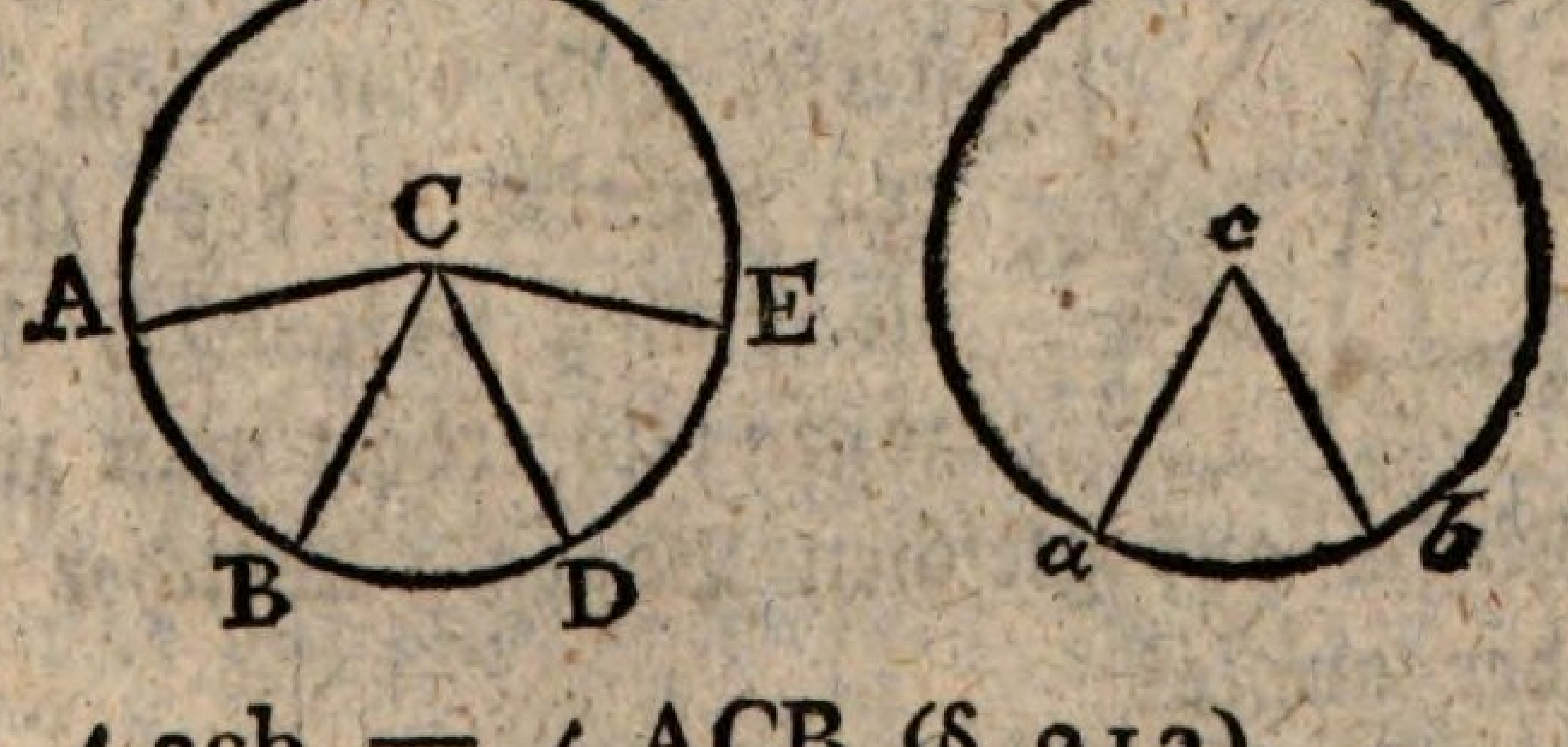
∠ACB : ∠ACD = B. AB : B. ABD

Oder ∠ACB : ∠ACE = B. AB : B. ABDE

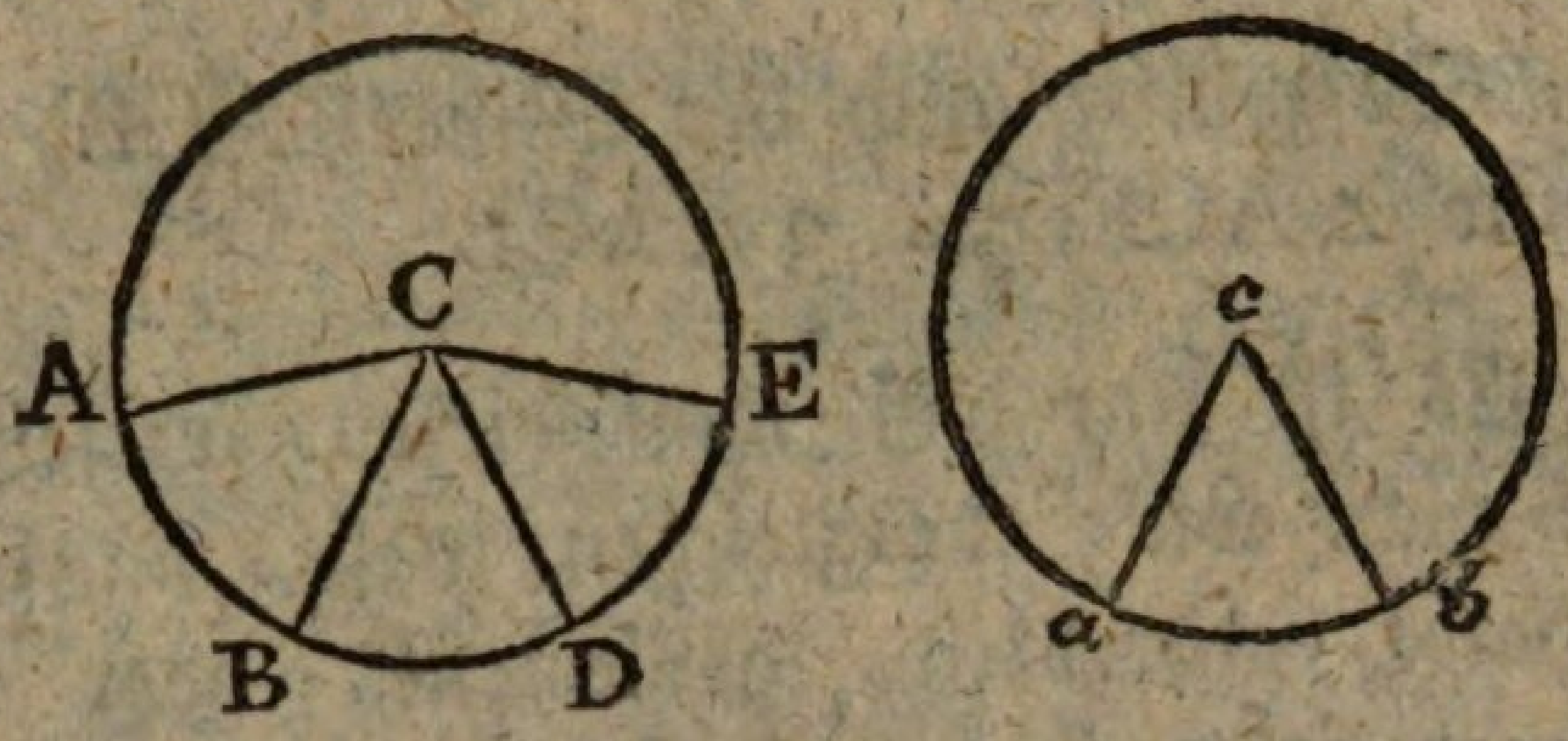
(Arithm. § 231, 232).

§ 216.

L. Es wird ein zweiter dem vorigen gleicher Kreis beschrieben, und in demselben ein Bogen ab = AB abgestekkt. Hierauf werden die HalbMesser ca, cb gezogen. — Wie groß ist nun der Winkel acb?



S. ∠acb = ∠ACB (§ 213).



L. Man kan also ACB und acb gegen einander vertauschen (§ 27), und erhält:

$$\angle acb : \angle ACD = \text{B. } AB : \text{B. } ABD \quad (\S\ 214).$$

Und da auch AB = ab (VS.); so findet in Ansehung dieser gleiche Verwechselung Stat, und man erhält

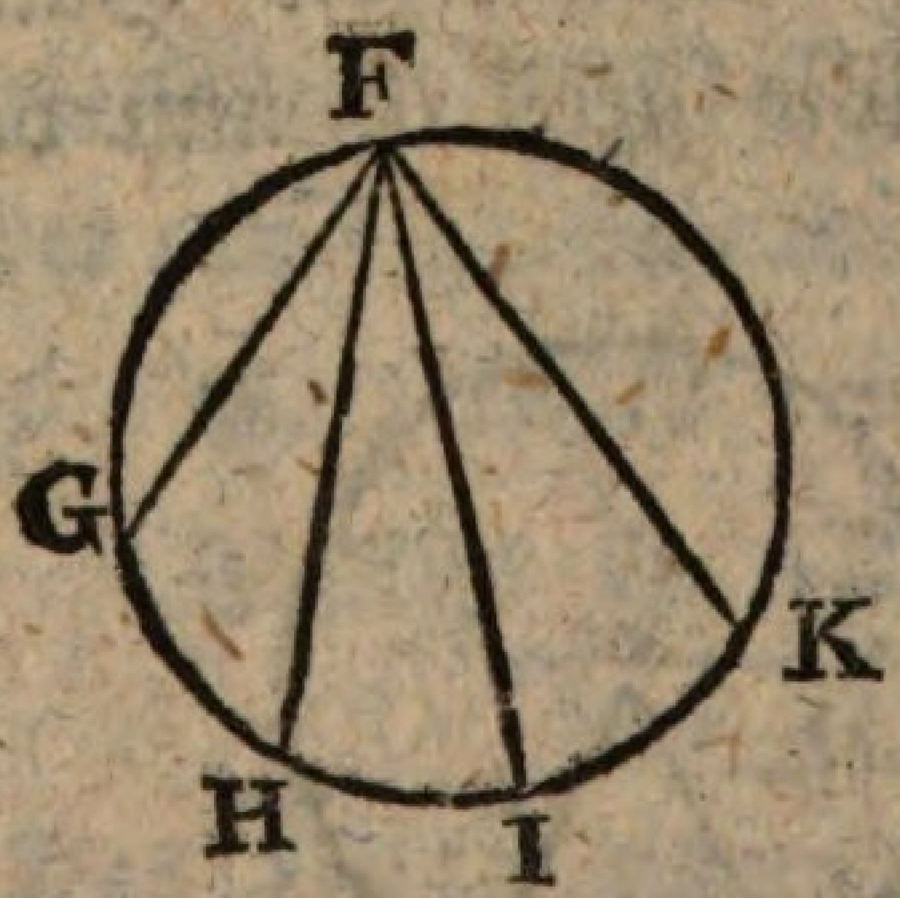
$$\angle dcb : \angle ACD = \text{B. } ab : \text{B. } ABD$$

oder: $\angle ACB : \angle ACD = \text{B. } ab : \text{B. } ABD$

Welche Lehre kan man hieraus ziehn?

S. In gleichen Kreisen verhalten sich **Winkel am MittelPunkte zu einander wie die Bögen auf welchen sie stehn.**

§ 217.



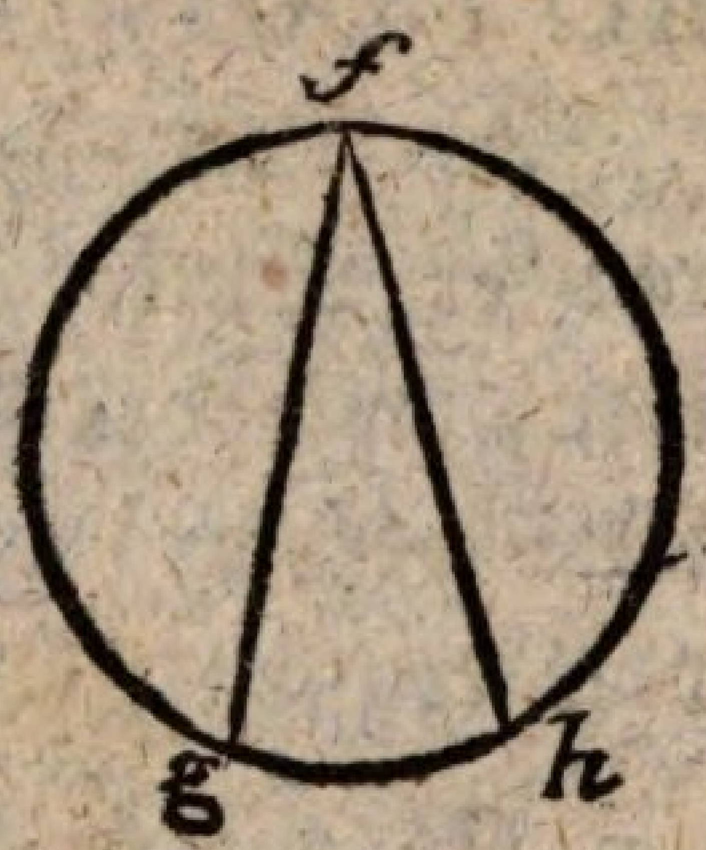
L. Es werden wiederum zwei gleiche Bögen in einerlei Kreise, GH = HI, abgestekkt, und von einem beliebigen Punkte F des Umfangs, die Linien FG, FH, FI, gezogen; so erhält man zwei UmfangsWinkel auf gleichen Bögen. Welcher ist von ihnen der gröste?

S. Sie sind beide gleich groß (§ 213).

L. Und wenn ich den Bogen IK gleich HI mache, und FK ziehe, wie groß ist dan der Winkel HFK?

S. $\angle HFK = 2\angle HFI = 2\angle GFH$.

L. Also auch hier wachsen die Winkel in eben dem Verhältnisse als die Bögen auf welchen sie stehn. Wenn man nun einen zweiten, dem vorigen gleichen Kreis beschreibt, und einen Bogen gh = GH abstekkt, und einen UmfangsWinkel gfh zieht; wie groß ist dan dieser Winkel?



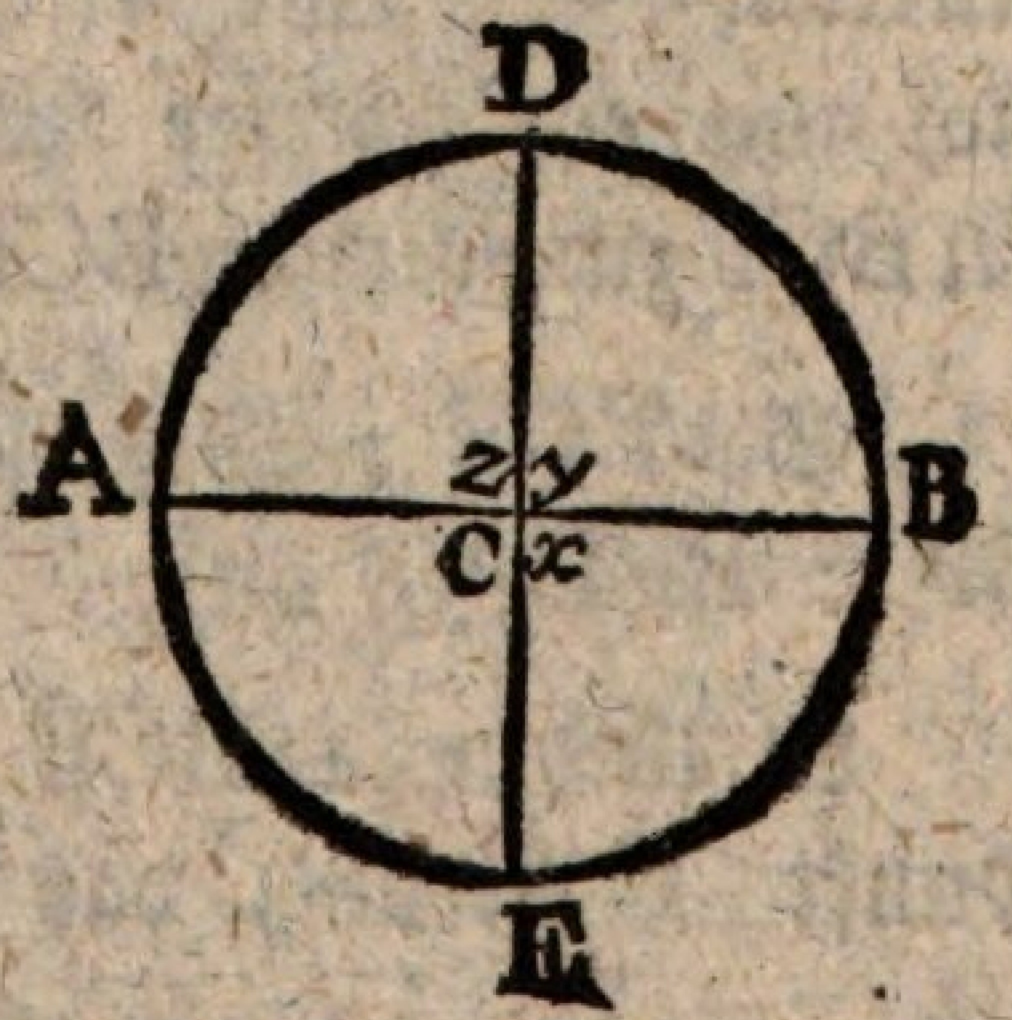
S. gfh = GFH (§ 213).

L. Es gilt also von gleichen Kreisen was von einerlei Kreisen erwiesen ist; und man kan beide zusammen fassen: In einerlei und in gleichen Kreisen verhalten Winkel am Umfange sich zu einander, wie die Bögen auf welchen sie stehn.

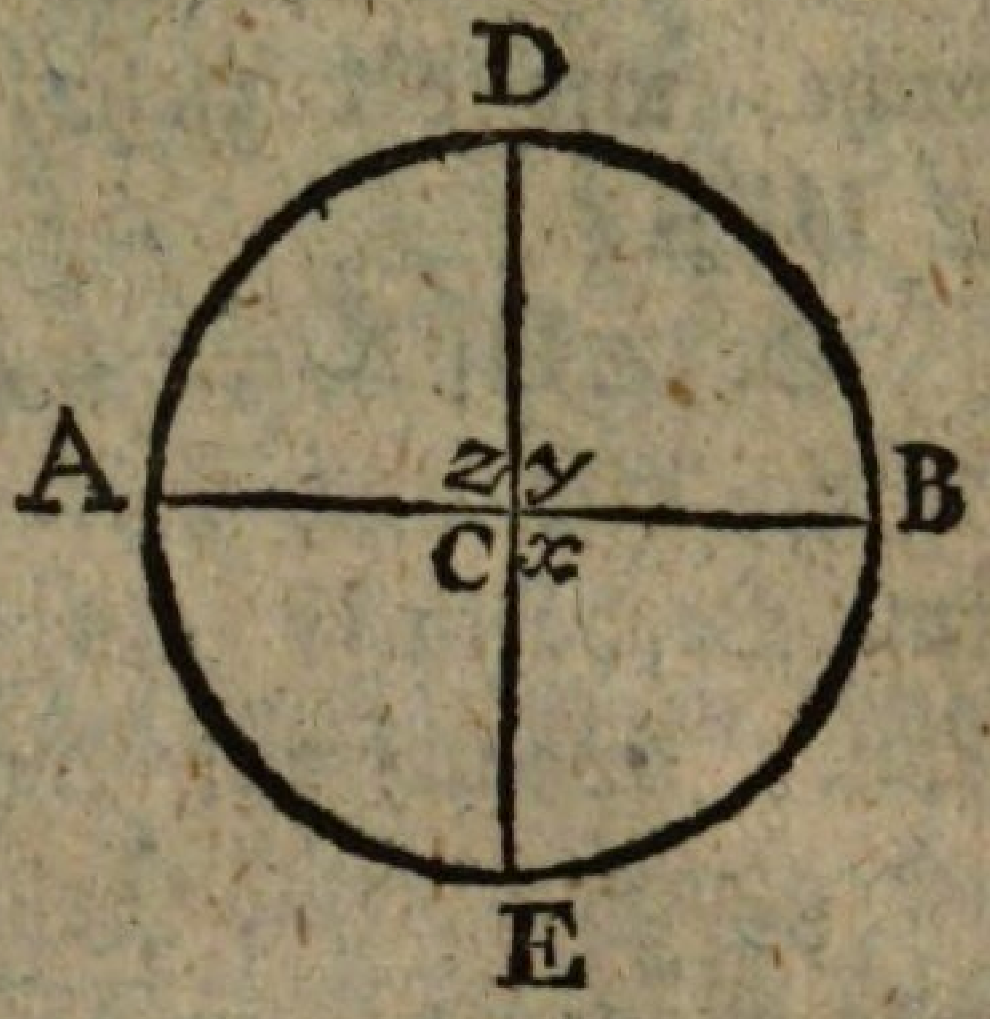
Der zwei und dreißigste Saz.

§. 218.

L. Es wird ein Kreis beschrieben, und in demselben werden zwei Durchmesser AB, DE gezogen, die sich senkrecht schneiden, in C, und die rechten Winkel C, z, y, x bilden. — In einerlei Kreise verhalten sich Winkel am Mittel-



Punkte zu einander wie die Bögen auf welchen sie stehn (§ 215); wie verhält sich nun ein rechter Winkel z, zu zwei rechten Winkeln z + y?



S. z : (z + y) = AD : (AD + DB)

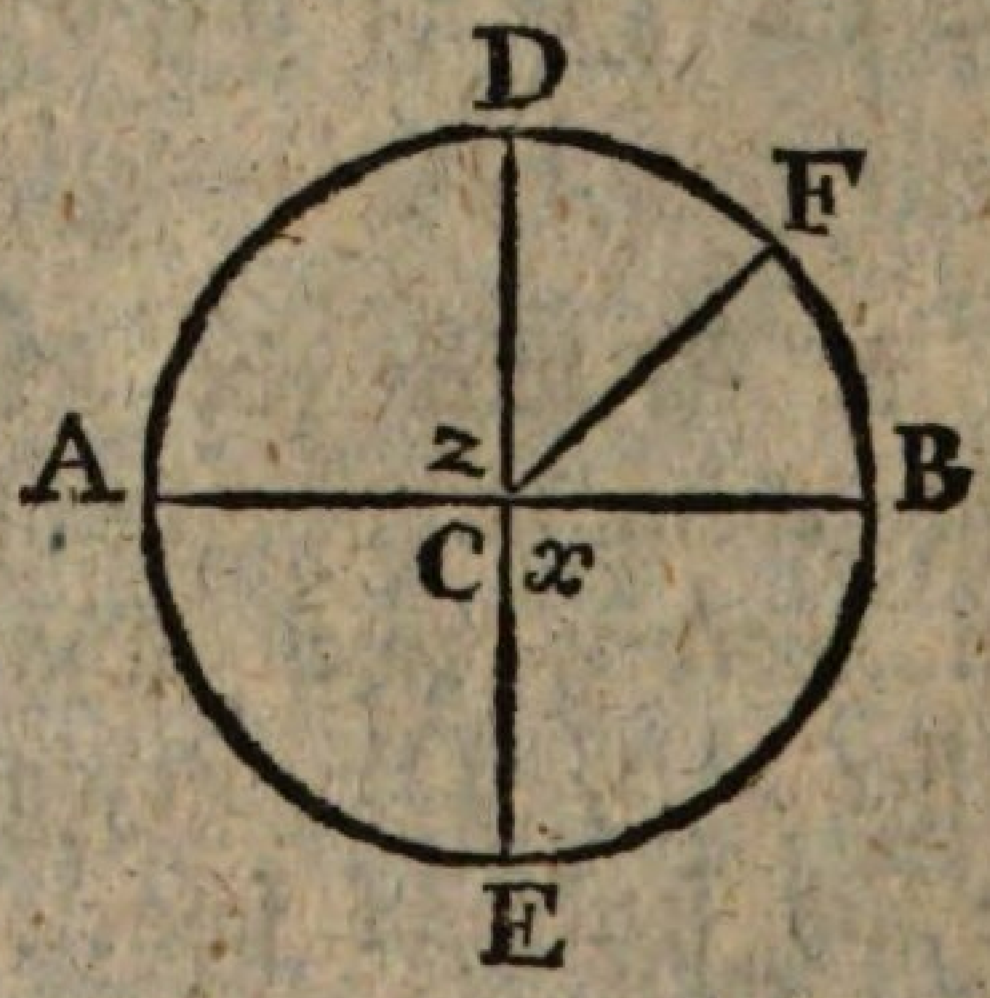
L. Das heisst: Ein rechter Winkel verhält sich zu zwei rechten Winkeln, wie der Quadrant zum halben Umfang. — Wie verhält sich aber ein rechter Winkel, z, zu vier rechten Winkeln, z + y + x + C?

S. z : (z + y + x + C) = AD : ADBEA.

L. Das heisst = = ?

S. Ein rechter Winkel verhält sich zu vier rechten Winkeln, wie der Quadrant zum ganzen Umfange.

L. Wir wollen einen der rechten Winkel, y durch einen HalbMesser CF in zwei willkührliche Teile CFB und FCD zerstükken. — Wie verhält sich nun ein schiefer Winkel BCF zum rechten BCD?



S. BCF : BCD = BF : BFD (§ 215).

L. Und wie BCF zu allen Winkel um einen Punkt C herum, das ist, zu vier rechten?

S.

S. BCF : BCF + FCD + z + C + x) = BF : BFDAEB
Oder BCF : 4 L. = BF : BFDAEB

L. Das heisst = = ?

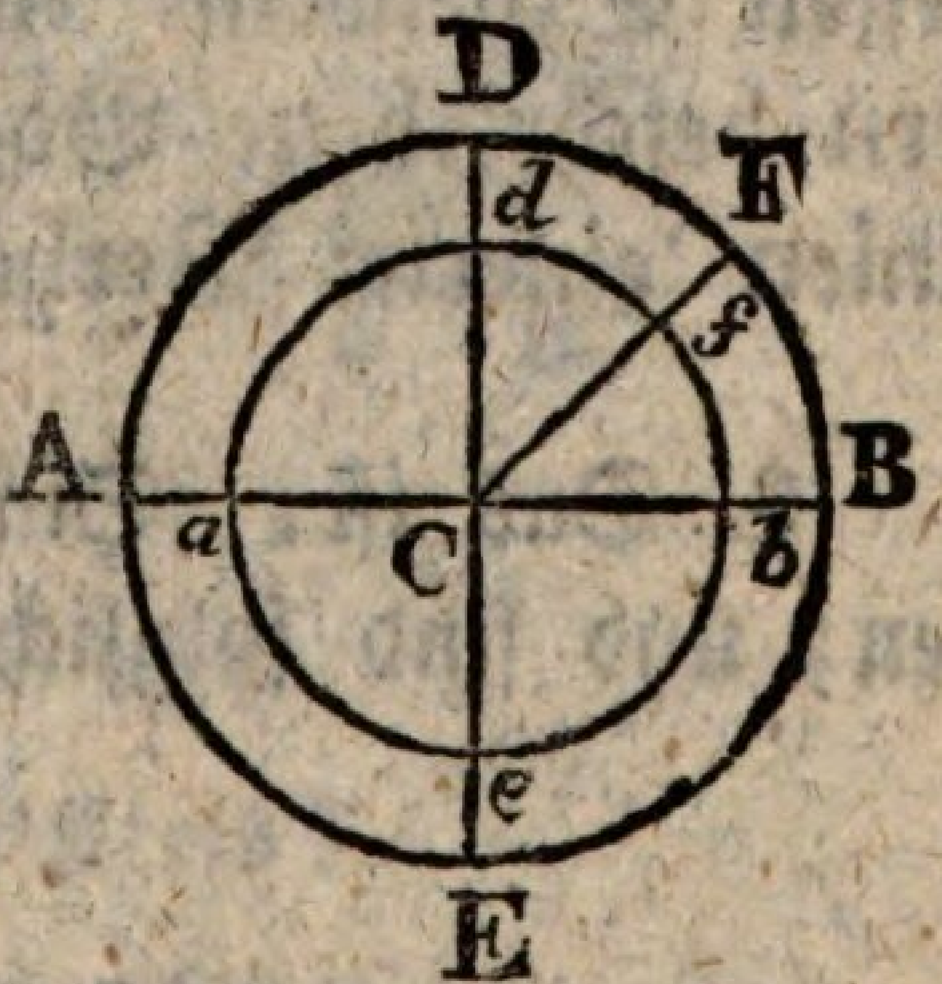
S. Jeder Winkel verhält sich zu vier rechten Winkeln, wie der zwischen seinen Schenkeln enthaltene Bogen eines aus seiner Spitze beschriebenen Kreises zum ganzen Umfange.

L. Oder auch: Jeder schiefe Winkel verhält sich zum rechten, wie der aus seiner Spitze zwischen seinen Schenkeln beschriebene Bogen zum Quadranten.

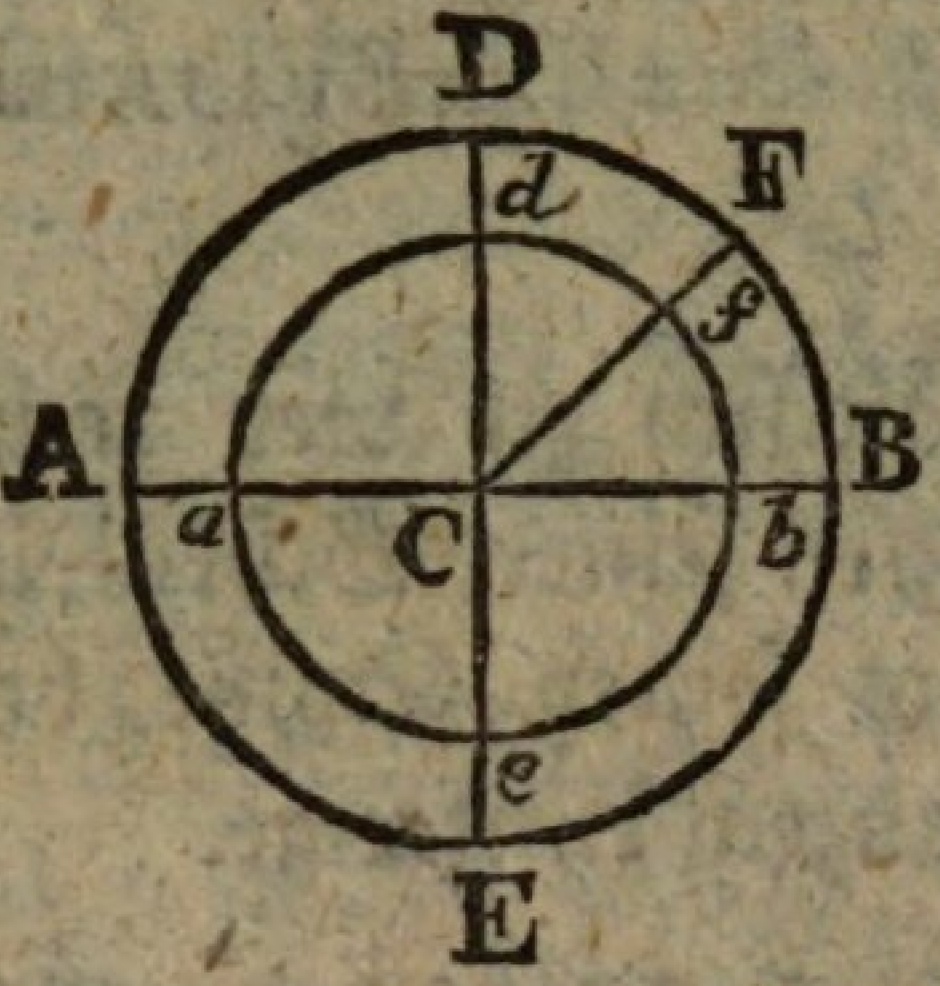
Der drei und dreißigste Saz.

§ 219.

L. Innerhalb des vorigen Kreises aber mit ihm aus einerlei MittelPunkte C, wird mit beliebigem HalbMesser ein zweiter Kreis beschrieben. Die Durchschnitte werden wie die des grössern Kreises, aber mit kleinen Buchstaben, a, d, f, b, e, bezeichnet. — Wie verhalten sich nun die Winkel BCF und bCf zu einander? Welcher von beiden ist der gröste?



S. BCF = bCf (§ 18).



L. Aber wie ist das Verhältniß von BCF = bCf zu vier rechten Winkeln?

S. BCF : 4∟ = BF : BFDAEF
bCf : 4∟ = bf : bfdaef } (218)

L. Da BCF = bCf,
so ist BCF : 4∟ = bCf : 4∟ (§ 27).
folglich BF : BFDAEB = bf : bfdaeb (Ar. § 237)
— Welchen LehrSatz kan man hieraus ziehn?

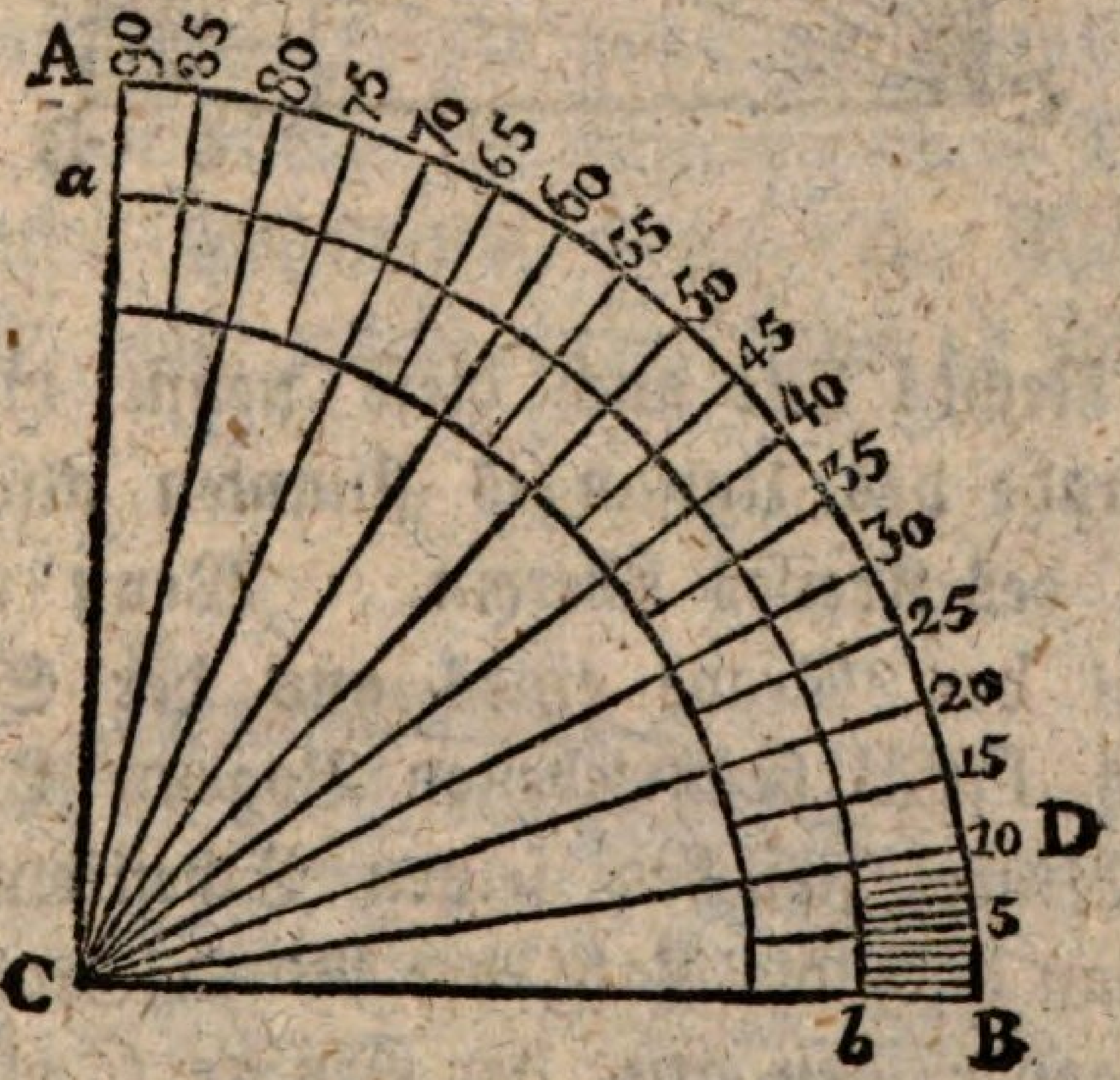
S. Aus der Spitze eines Winkels zwischen dessen Schenkeln, mit verschiedenen HalbMessern beschriebene Bögen, haben zu ihren Kreislinien einerlei Verhältniß.

L. Das ist: Sind gleich grosse Teile von ihnen; und sind folglich einander ähnlich (§ 24, 25).

Der vier und dreißigste Satz.

§ 220.

L. Man pflegt jeden Quadranten, ACB, aCb, er sei groß oder klein, durch HalbMesser in neunzig gleiche Teile, die man Grade nennt, abzuteilen. Wie viel solcher Teile oder Grade gehn nun auf den HalbKreis?



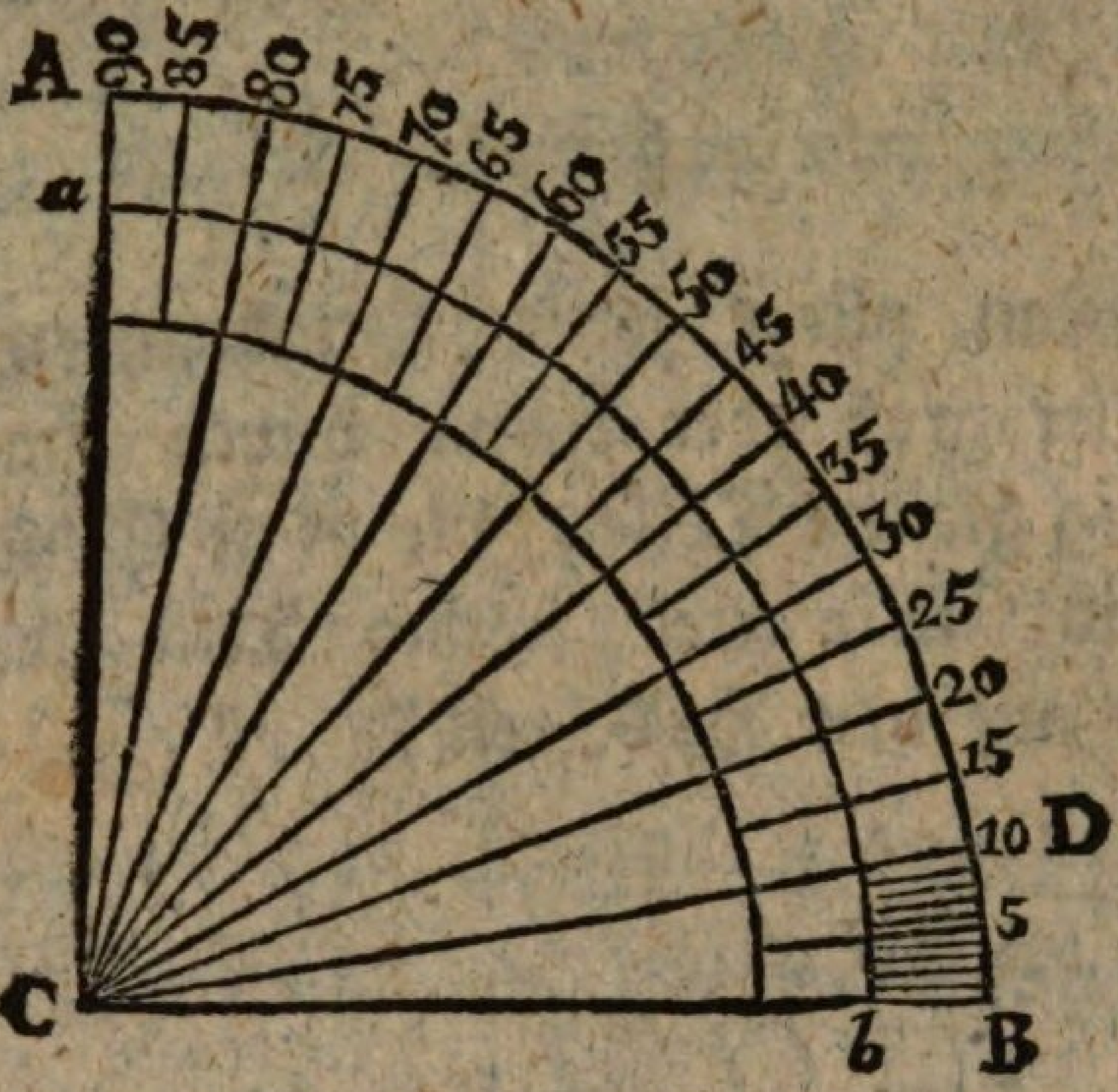
S. Zwei Mal 90, oder 180.

L. Und auf den ganzen Kreis?

S. Vier Mal 90, oder 360.

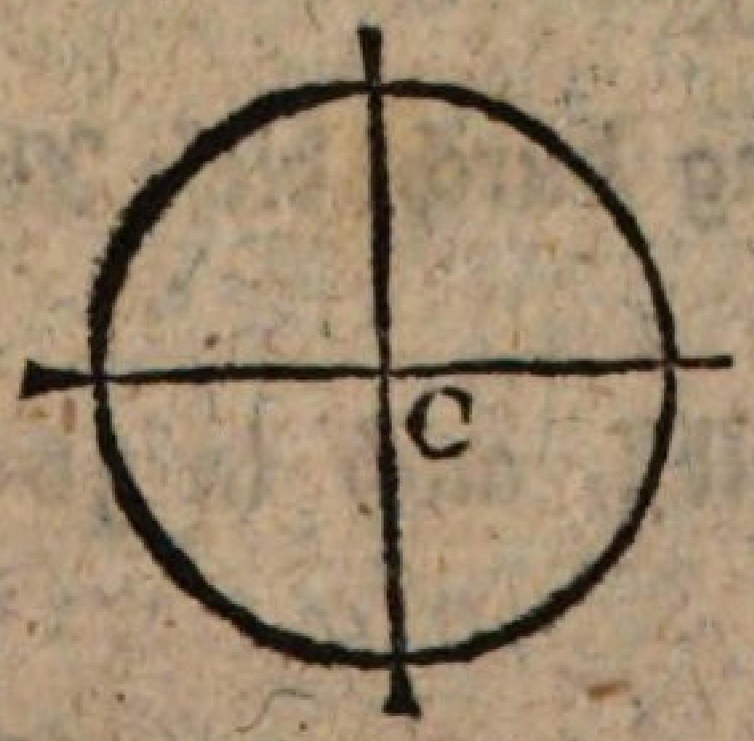
L. Aber wie wird der Umfang durch diese Abteilung geteilt?

S. Eben so wie der Kreis selbst, auch in 360 gleiche Teile (§ 211).



L. Recht! Und auch diese nennt man Grade. Die Grade des Umfanges stimmen also mit den Graden des Kreises überein. Wenn man daher die Zahl der Grade eines aus der Spitze eines Winkels DCB beschriebenen Bogens B 10 welche dieser Winkel zwischen seinen Schenkeln faßt; so weis man auch die Zahl der WinkelGrade. Man nennt daher den aus der Spitze C eines Winkels DCB, zwischen seinen Schenkeln beschriebenen Bogen BD, das Maß dieses Winkels. —

§ 221.



L. Wie viel rechte Winkel haben um einen Punkt C Raum?

S. Viere (§ 73).

L. Um diesen Punkt nun läßt sich ein Kreis beschreiben. Wie

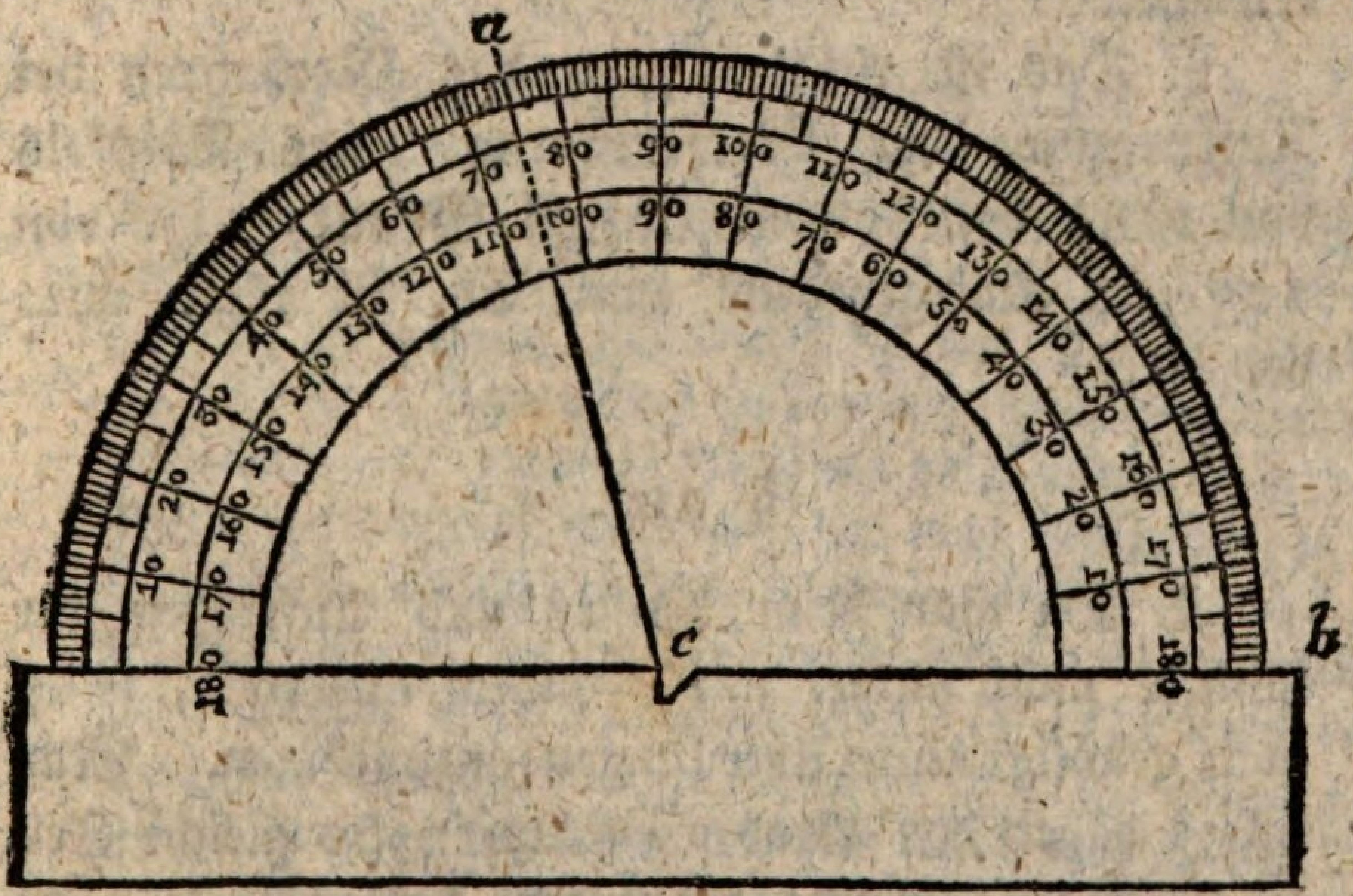
Wie viel von dem Umfange desselben hat nun jeder rechte Winkel zu seinem Masse?

S. Den vierten Teil.

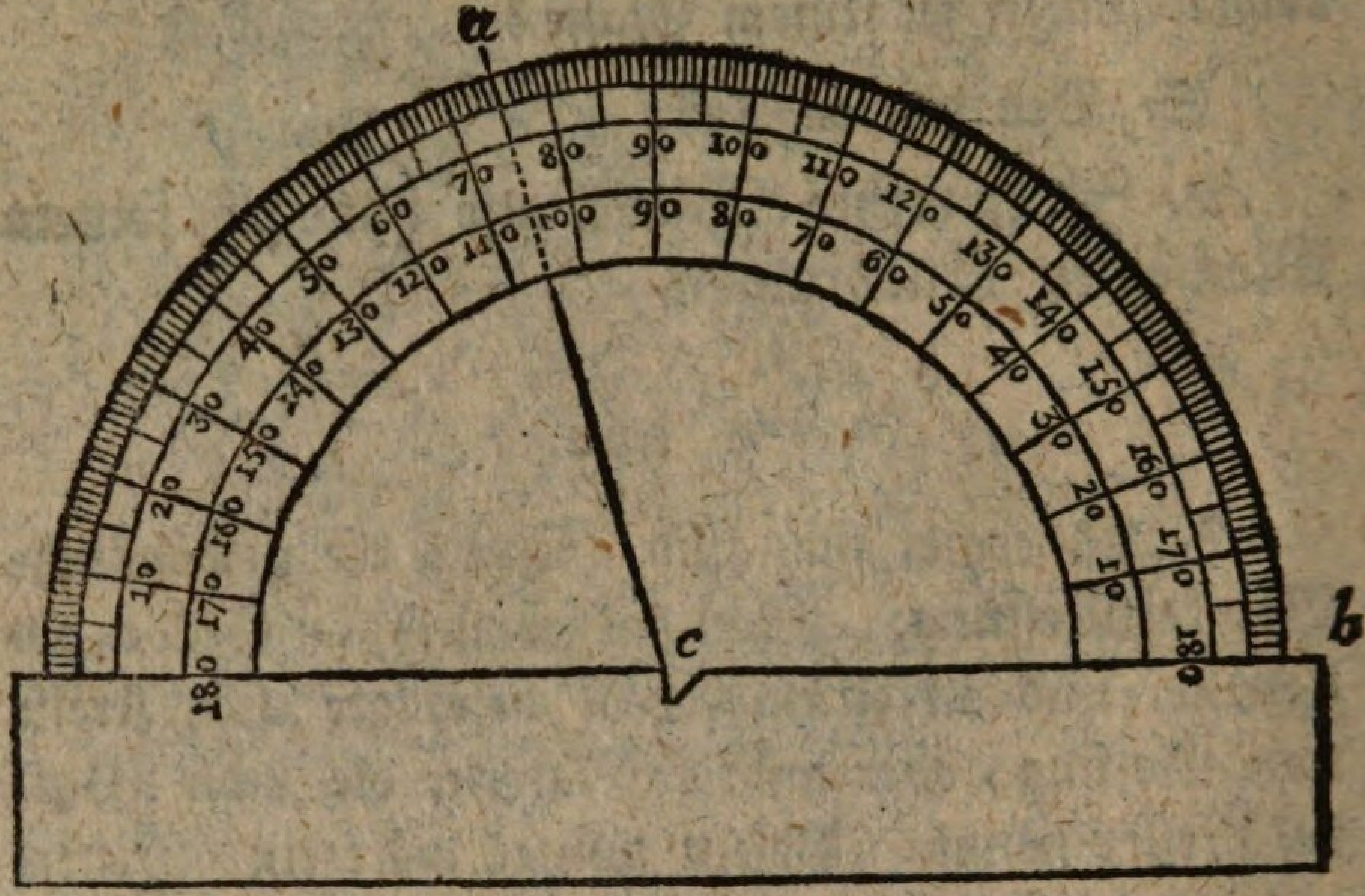
L. Jeder rechte Winkel also hat zu seinem Maß einen Quadranten.

§ 222.

L. Es ergibt sich auch hieraus die gewöhnliche WinkelMessung. Man hat nämlich in Grade abgeteilte, und an einem Lineal befestigte HalbKreise von Messing, oder andrer Materie, die man WinkelMesser nennt. Gesetzt nun es wäre ein Winkel acb zu messen, wie würde man dabei zu Werke gehn?



S. Ich lege den MittelPunkt des WinkelMessers an den Scheitel C, und das Lineal dessel-
ben



ben an den Schenkeln cb, und zähle die zwischen beiden Schenkeln enthaltenen Grade welche hier 105 betragen.

L. Das ist richtig. Und das Verfahren bei Auftragung oder Verfertigung eines Winkels von einer bestimmten Anzahl Grade, z. B. von 105 auf eine gegebene Linie cb, ist nicht minder klar.

§ 223.

L. Da man beim Messen und Auftragen der Winkel nicht immer mit Graden ausreicht; so ist man genötigt UnterAbteilungen anzunehmen. Man pflegt daher den Grad wiederum in 60 gleiche Teile zu teilen, welche Minuten heissen. Und da auch diese UnterAbteilung zuweilen nicht hinlänglich ist; so teilt man eine Minute wieder in 60 glei=

gleiche Teile welche Secunden heissen. Findet man nötig noch weiter zu gehn, so teilt man die Secunde wiederum in 60 Tertien. Das Zeichen Grad ist °, der Minuten ′, der Secunden ″, der Tertien ‴; z. B. 62° 25′ 36″ 30‴ bedeutet: 62 Grad, 25 Minuten, 36 Secunden, 30 Tertien.

§ 224.

L. Der Bequemlichkeit der Rechnung wegen fängt man an die Abteilungen nach HundertTeilen zu machen; nämlich den Quadranten in 100 Grade, den Grad in 100 Minuten, die Minute in 100 Secunden ꝛc. zu zerschneiden. So lange diese Abteilung aber nicht allgemeiner wird, und WerkZeuge und Bücher danach eingerichtet werden, ist man genötigt bei der bisher gewöhnlichen sechzigteiligen zu bleiben.

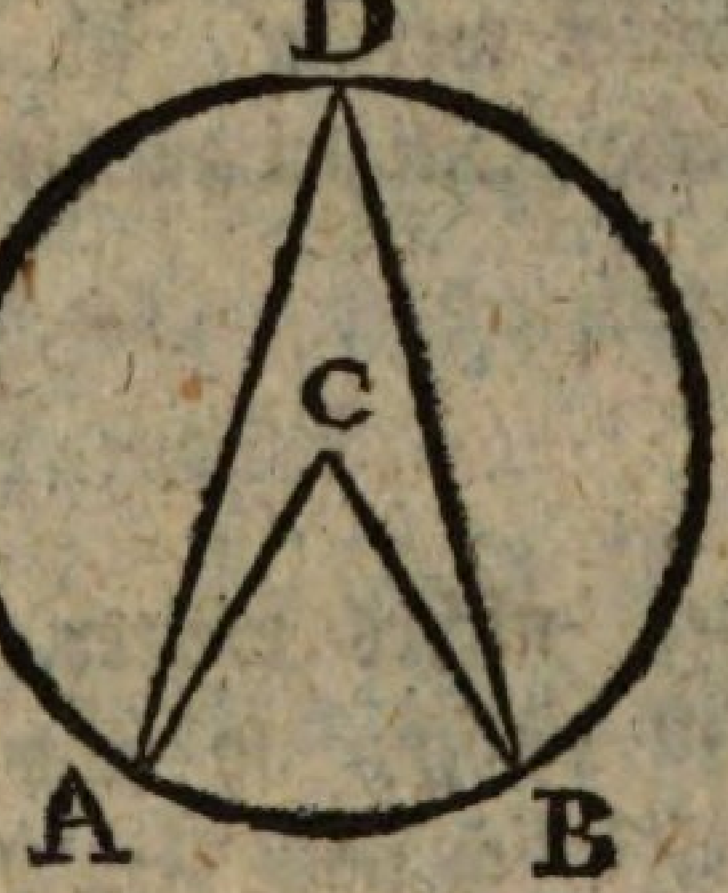
§ 225.

L. Da die geometrischen Foderungen nichts weiter voraussetzen, als gerade und KreisLinien, zu ziehn, so sind alle WerkZeuge welche mehr leisten als dieses, folglich nach dem WinkelMesser nicht geometrisch, sondern mechanisch. Es ist also auch die jezt gelehrte WinkelMessung und WinkelAuftragung eigentlich nicht geometrisch; sondern man bedient sich ihrer aus Bequemlichkeit, teils aus Not, weil viele Winkel nicht ohne grosse Weitläuftigkeiten, andre gar nicht geometrisch zu erhalten sind. Manche dagegen werden sehr leicht geometrisch gefunden, wie z. B. der von 90 und der von 60 Grade. Erster durch Ziehung einer senkrechten Linie, (§ 47), lezter durch Zeichnung eines gleichseitigen DreiEkks (§ 118). Durch fortgesezte Halbung des rechten Winkels erhält man Winkel von 45°, von 22° 30′, von 11°, 15′ ꝛc. und durch Halbung des Winkels von 60 Grad, die vom 30°, von 15°, von 7° 30′, von 3° 45′ ꝛc. Durch Verdoppelung des

Win-

kels von 60° erhält man einen von 120°. Eine große Menge Winkel erhält man auch durch ZusammenSetzung. So ist z. B. 90° + 60 = 150°; 90° + 45° = 135°; 90° + 22° 30′ = 112° 30′; 90° + 11° 15′ = 101° 15′; 90° + 15° = 105°; 90° + 7° 30′ = 97° 30′; 60° + 45° = 105°; 60° + 22° 30′ = 82° 30′; 45° + 30 = 75°; 30° + 22° 30′ = 32° 30′ ꝛc. Man kan auch die zusammen gesetzten Winkel halben; so erhält man die Hälfte von 150° = 75°; die Hälfte von 75° = 37° 30′; u. s. w.

§ 226.



L. Das Maß eines Winkels ist ein aus seiner Spizze zwischen seinen Schenkeln beschriebener Bogen (§ 220). Was ist dem zufolge das Maß eines Winkels ACB am MittelPunkte?

S. Der Bogen AB auf welchem er steht.

L. Und das Maß des Winkels ADB am Umfange? Ist das auch der Bogen AB?

S. Nein. Der Bogen ADB ist nur halb so groß als ACB (§ 198); folglich ist sein Maß auch nur die Hälfte des Bogens ADB.

L. Wenn also der Bogen AB 60 Grad hielte, wie groß wären dan die Winkel ACB und ADB?

S. Dan wäre ACB = 60°, und ADB = 30°.

L. Daß Maß eines Winkels am Mittel-Punkt also ist der Bogen auf welchem er steht; und das Maß eines Winkels am Umfange..?

S. Ist der halbe Bogen auf welchem er steht.

L. Die Sätze § 199, 202, 203, sind auch Folgerungen aus diesem Satze. So steht der UmfangsWinkel ADB (§ 199) auf einem HalbKreise; was hat er nun zu seinem Maß?

S. Einen Quadranten, das ist 90 Grad.

L. Dagegen steht der UmfangsWinkel ADB (§ 202) auf einem grössern, und der UmfangsWinkel ADF auf einem kleinern Bogen als der HalbKreis. Was folgt daraus?

S. Das Maß des ersten ist grösser, das des zweiten ist kleiner als ein Quadrant.

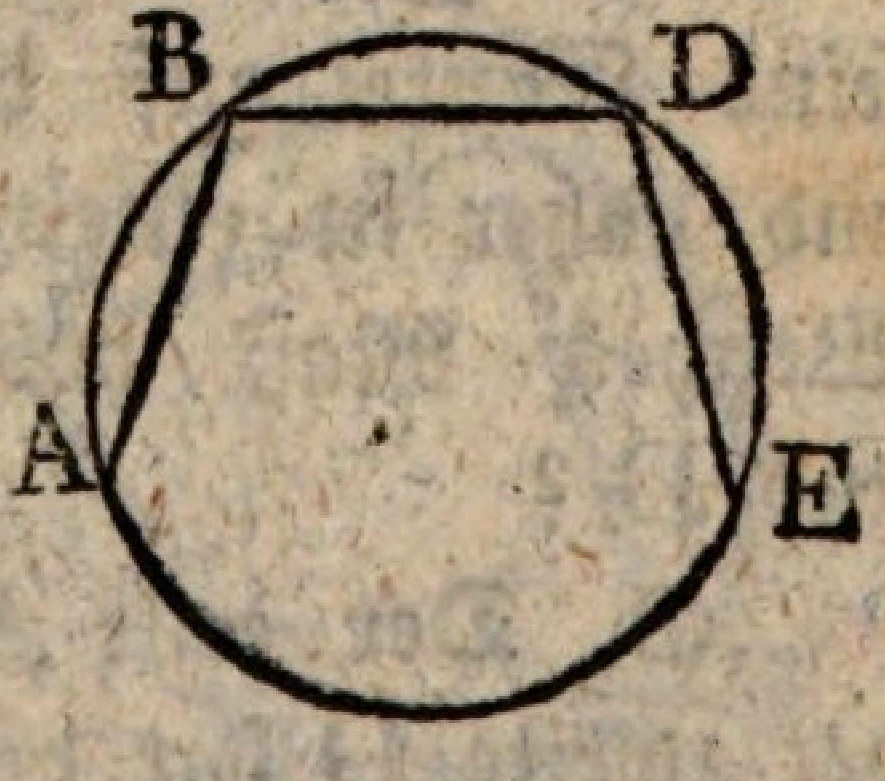
L. Und die Winkel ADB und AEB (§ 203) stehn auf einerlei Bogen. Daraus folgt..?

S. Daß sie auch einerlei Maß haben.

Der fünf und dreißigste Satz.

§ 227.

L. In einem beliebigen Kreise werden drei an einander hängende Sehnen AB, BD, DE, von willkührlicher, aber gleicher Länge gezogen. — Welcher von den daraus entstehenden Winkeln B, D, ist nun der gröste?



S.

S. Sie scheinen gleich groß zu seyn.

L. Wie erlangen wir Gewisheit davon?

S. $\left.\begin{array}{l}\text{Maß } \angle 6\,B = \frac{1}{2}\,\mathfrak{B}.\,AE + \frac{1}{2}\,\mathfrak{B}.\,ED \\ \text{Maß } \angle 6\,D = \frac{1}{2}\,\mathfrak{B}.\,AE + \frac{1}{2}\,\mathfrak{B}.\,AB\end{array}\right\}(\S 226)$

$$\text{Aber } \mathfrak{B}.\,ED = \mathfrak{B}.\,AB \; (\S\ 206)$$

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{B}.\,ED = \frac{1}{2}\,\mathfrak{B}.\,AB \; (\S\ 43).$$

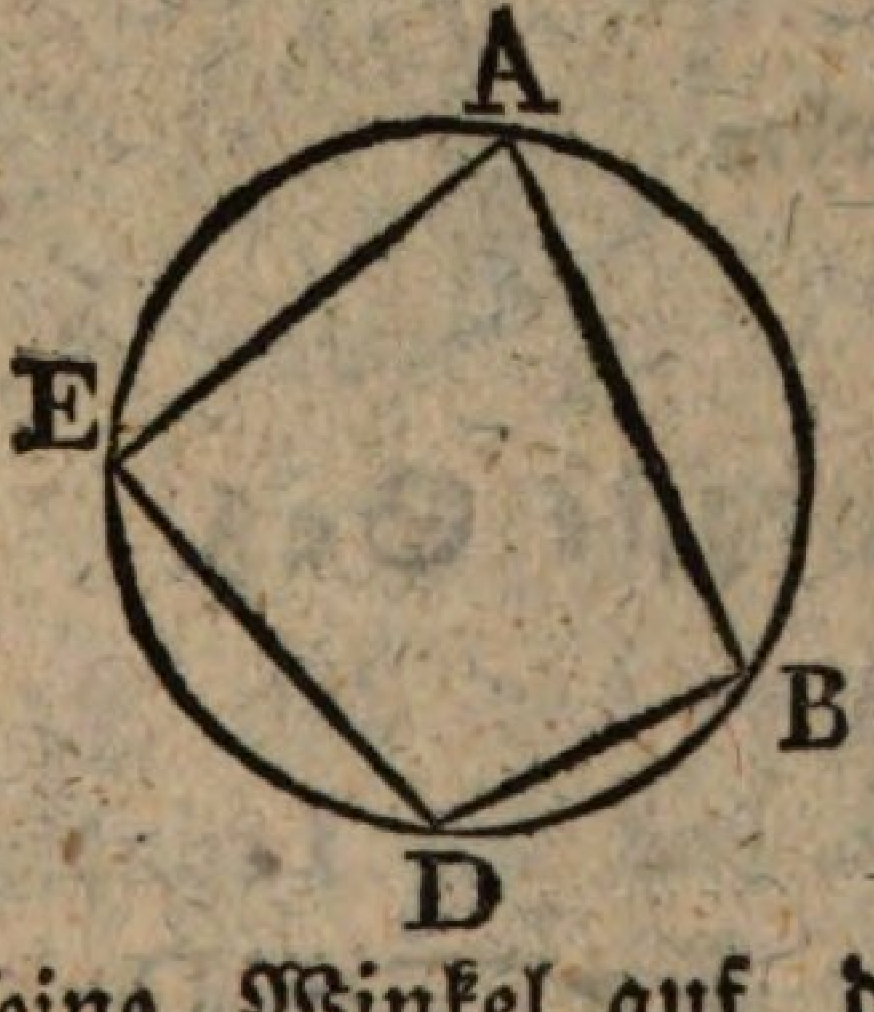
$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{B}.\,AE + \frac{1}{2}\,\mathfrak{B}.\,ED = \frac{1}{2}\,\mathfrak{B}.\,AE + \frac{1}{2}\,\mathfrak{B}.\,AB \; (\S\ 36).$$

$$\angle B = \angle D \; (\S\ 214).$$

L. An einander hängende gleiche Sehnen eines Kreises also bilden gleiche Winkel.

Der sechs und dreißigste Satz.

§ 228.



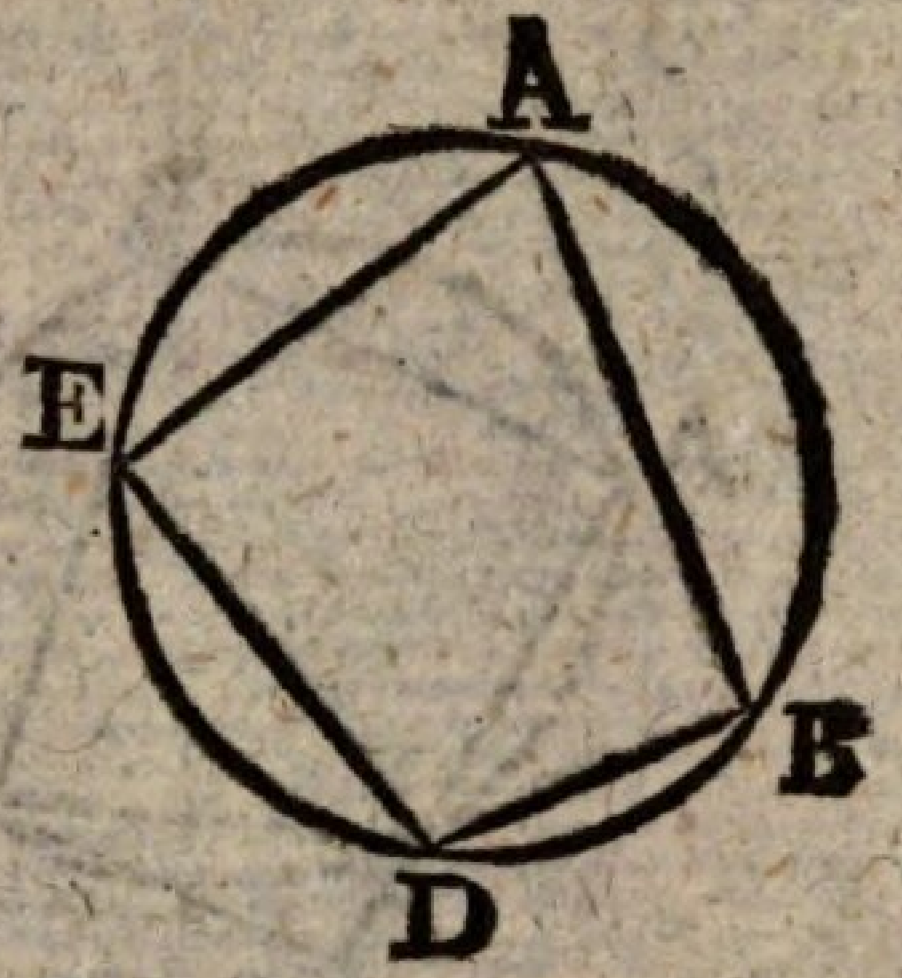
L. Auf dem Umfange eines Kreises werden vier beliebige Punkte, A, B, D, E, angenommen, und durch gerade Linien AB, BD, DE, EA, verbunden; so entsteht ein VierEkk ABDE welches alle seine Winkel auf dem Umfange des Kreises hat, und daher in einem Kreise beschrieben heisst. — Welches Maß haben nun zwei GegenWinkel A und D?

S. Der erste A hat den halben Bogen BDE, der zweite D hat den halben Bogen BAE zu seinem Maß (§ 222).

L.

L. Und beide zusammen?

S. Haben zu ihrem Maß den halben Umfang.



L. Der halbe Umfang aber ist zwei Quadranten gleich (§ 209). Der Quadrant aber ist das Maß eines rechten Winkels (§ 221). Wie groß also sind die zwei GegenWinkel A und B zusammen?

S. Wie zwei rechte.

L. Aber die beiden andern GegenWinkel D und E, welches Maß haben die?

S. Auch den halben Umfang, wie die vorigen.

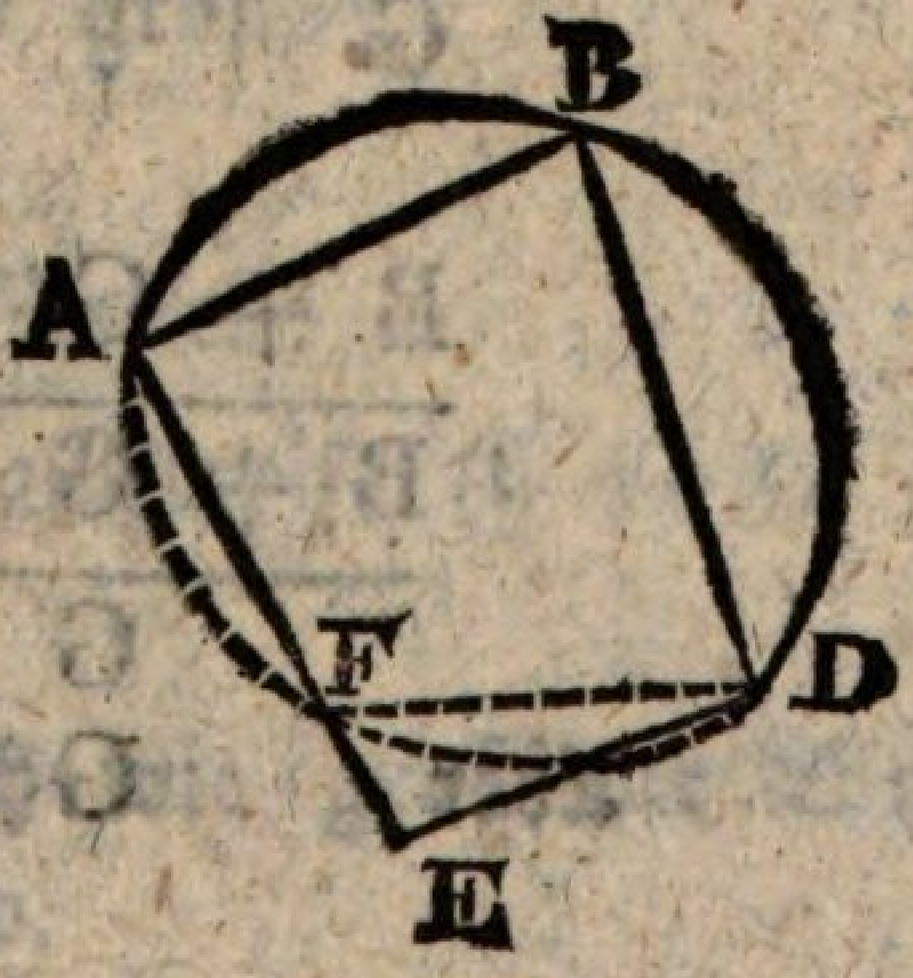
L. Also auch sie sind zwei rechten gleich; und man kan daher als Wahrheit annehmen: Jedes Par GegenWinkel eines in einem Kreise beschriebenen VierEkks ..?

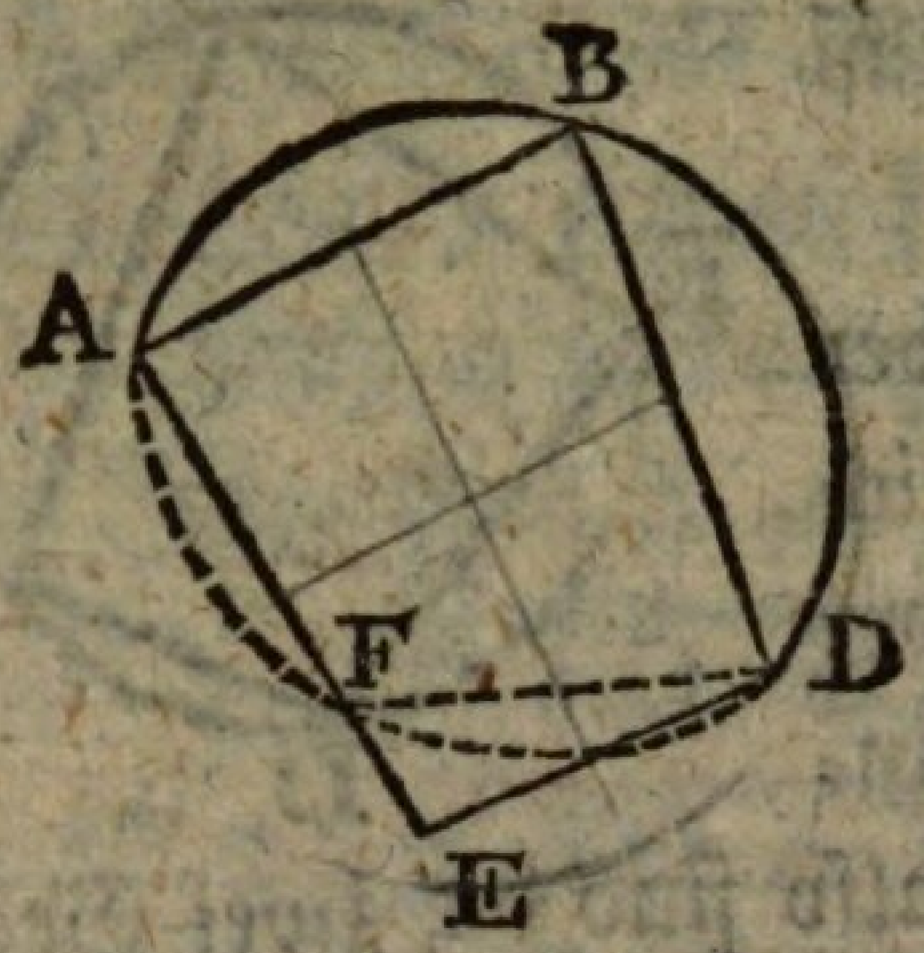
S. Ist zwei rechten Winkeln gleich.

Der sieben und dreißigste Saz.

§ 229.

L. Es lässt sich also in jedem Kreis ein VierEkk beschreiben dessen GegenWinkel zwei rechten Winkeln gleich sind (§ 227): aber lässt sich auch um jedes VierEkk dieser Art ABDE ein Kreis beschrieben? Das heisst, eine KreisLinie durch





alle WinkelSpitzen desselben ziehn. Wird eine durch drei WinkelSpitzen A, B, D, gezogene KreisLinie (§ 174) auch notwendig durch die vierte, E, gehn?

S. Wir wollen annehmen sie ginge nicht durch die vierte, sondern schnitte die Seite AE in F. Wenn ich nun FD ziehe, so ist

$B + F = 2\llcorner$ (§ 227)

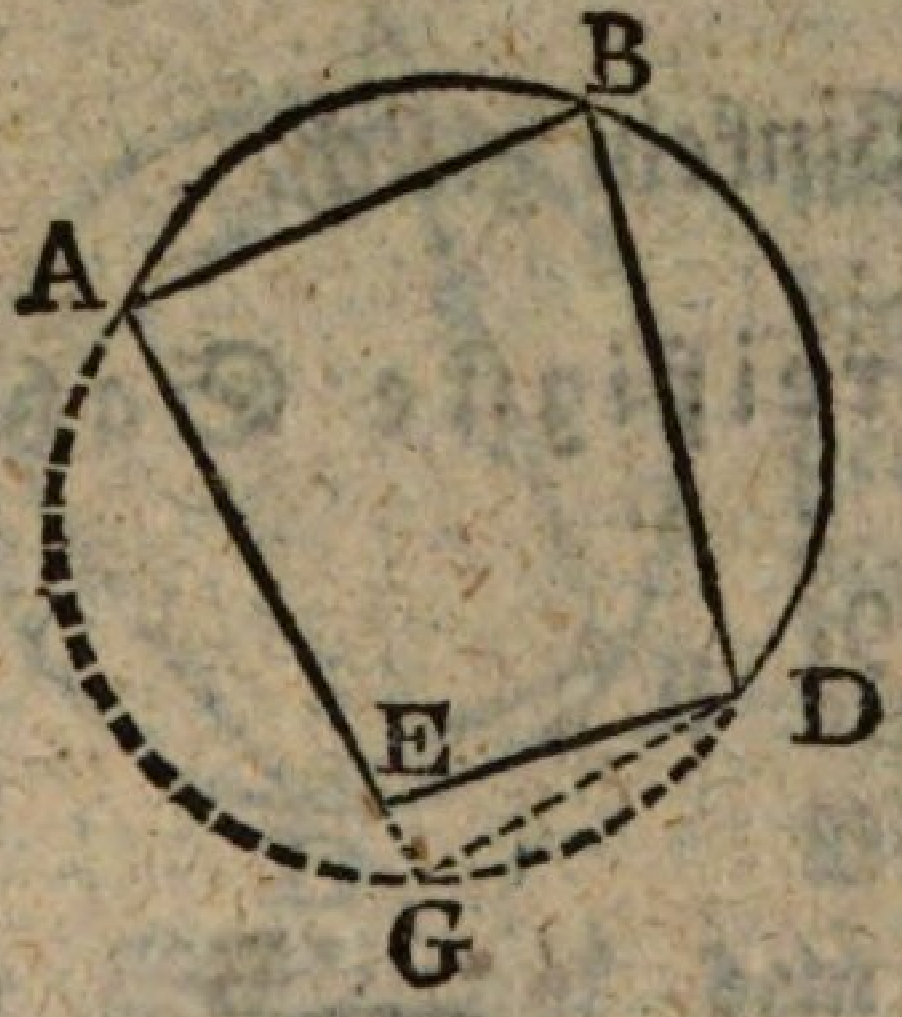
Aber auch $B + E = 2\llcorner$ (VS.)

$B + F = B + E$ (§ 31)

$F = E$ (§ 37).

Aber $F > E$ (§ 79)

L. Schneiden also kan eine durch A, B, D, gehende KreisLinie die Seite AE nicht: aber könte sie nicht ausserhalb um E herumgehn?



S. Dan verlängere ich DE bis sie die KreisLinie in G trift, und ziehe AG; so ist

$B + G = 2\llcorner$ (§ 227)

$B + G = B + E$ (§ 31)

$G = E$ (§ 37)

Aber $G < E$ (§ 79).

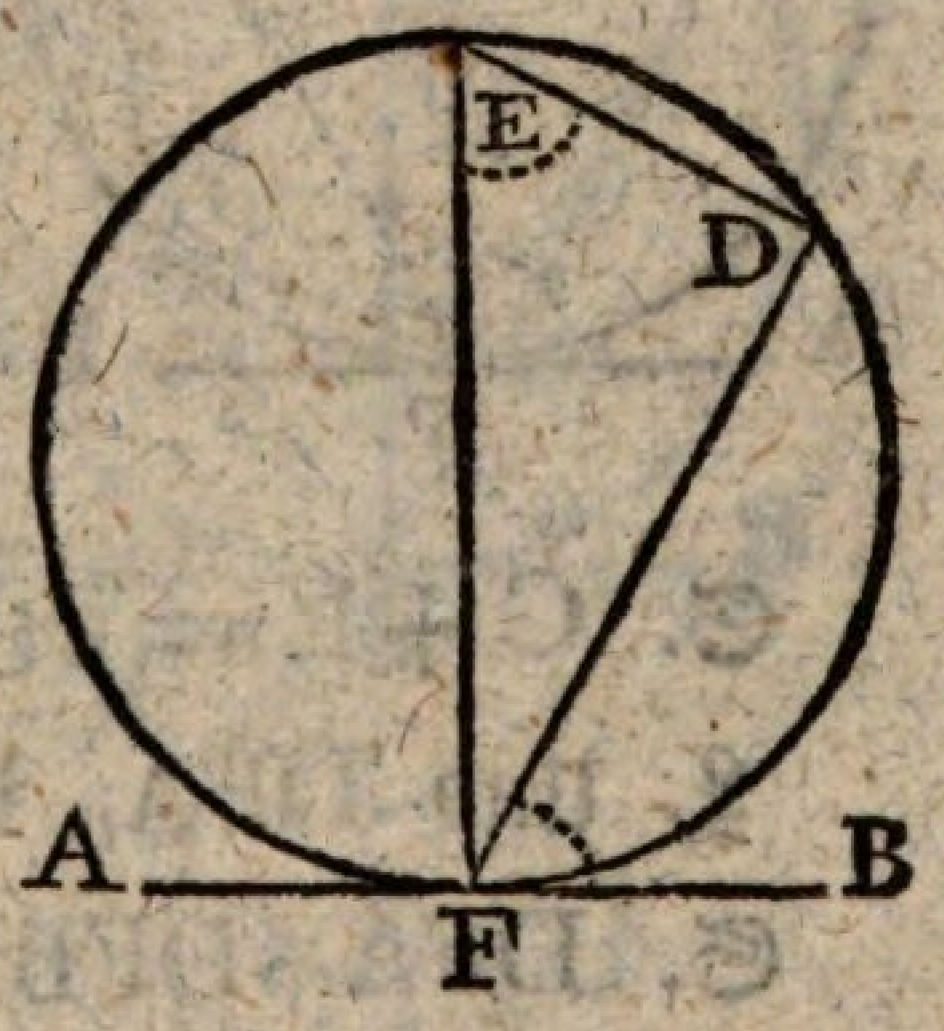
L.

L. Auch das ist also nicht möglich. Also eine durch drei WinkelSpitzen eines VierEkks, in welchem zwei und zwei GegenWinkel zwei rechten Winkeln gleich sind, geführte Kreislinie geht auch durch dessen vierte WinkelSpitze.

Der acht und dreißigste Saz.

§. 230.

I) L. An einem Kreise wird eine willkührliche StreifLinie AB, und von dem StreifPunkte F eine beliebige Sehne FD, und eine senkrechte FE gezogen. — Welchen Weg nimt diese lezte FE?



S. Durch den MittelPunkt (§ 197).

L. Sie ist also ein Durchmesser (§ 168) — Nun werden die Punkte D und E durch eine gerade Linie verbunden. — Welcher von den Winkeln DFB und DEF ist nun der gröste?

S. Das weis ich nicht.

L. Was ist D für ein Winkel?

S. Ein Winkel im HalbKreise (§ 168) und folglich ein rechter (§ 199).

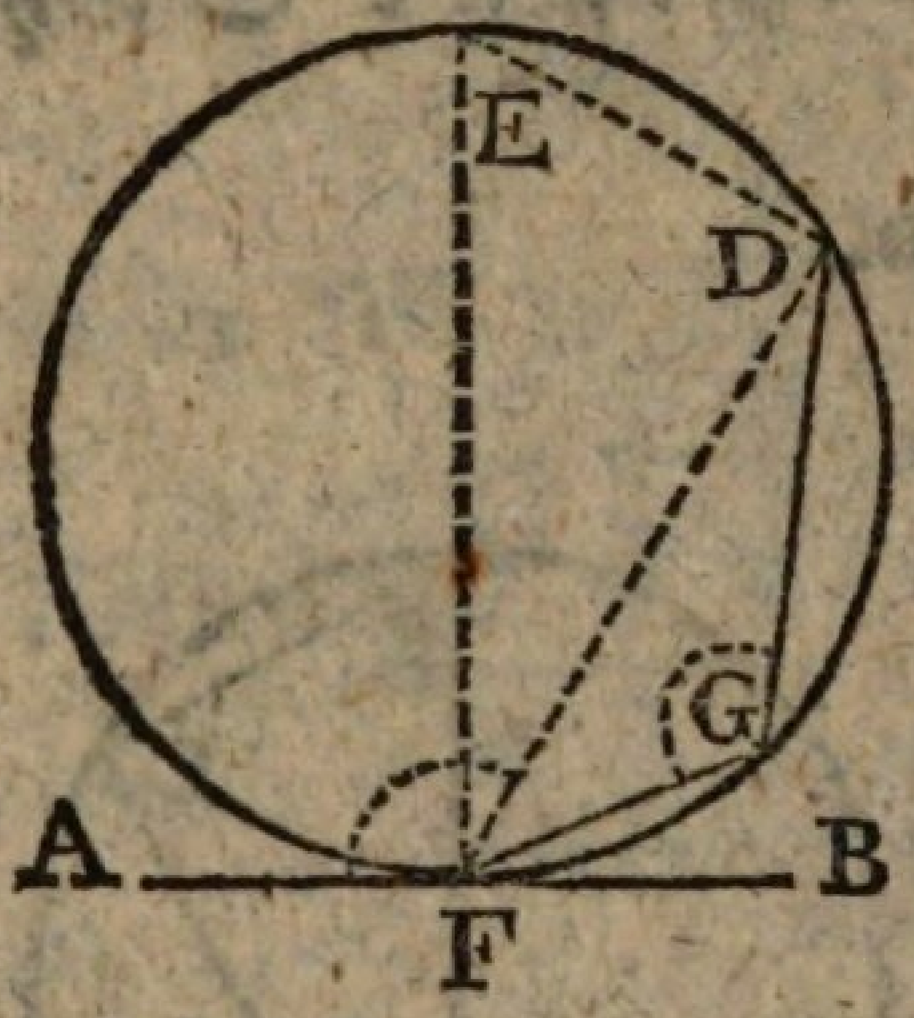
L. Nun wissen wir auch wie groß die Winkel E und EFD zusammen sind.

S. $\angle E + \angle EFD = \llcorner$ (§ 119).

L. Aber auch $\angle BFD + \angle EFD = \llcorner$ (§ 47). Was folgt daraus?

S. $\angle E + \angle EFD = \angle BFD + \angle EFD$ (§ 49)

$\angle E = \angle BFD$ (§ 37).



II. L. Nun wollen wir auf dem Bogen DF einen beliebigen Punkt G annehmen, die Sehnen GD GF ziehn, und die Winkel G und DFA mit einander vergleichen. — Wie groß sind G und E zusammen?

S. $G + E = 2\llcorner$ (§ 227)

L. Und DFA, DFB zusammen?

S. $DFA + DFB = 2\llcorner$ (§ 71)

L. Also $G + E = DFA + DFB$ (§ 31)

Aber $E = DFB$ (I)

S. Folglich $G = DFA$ (§ 37).

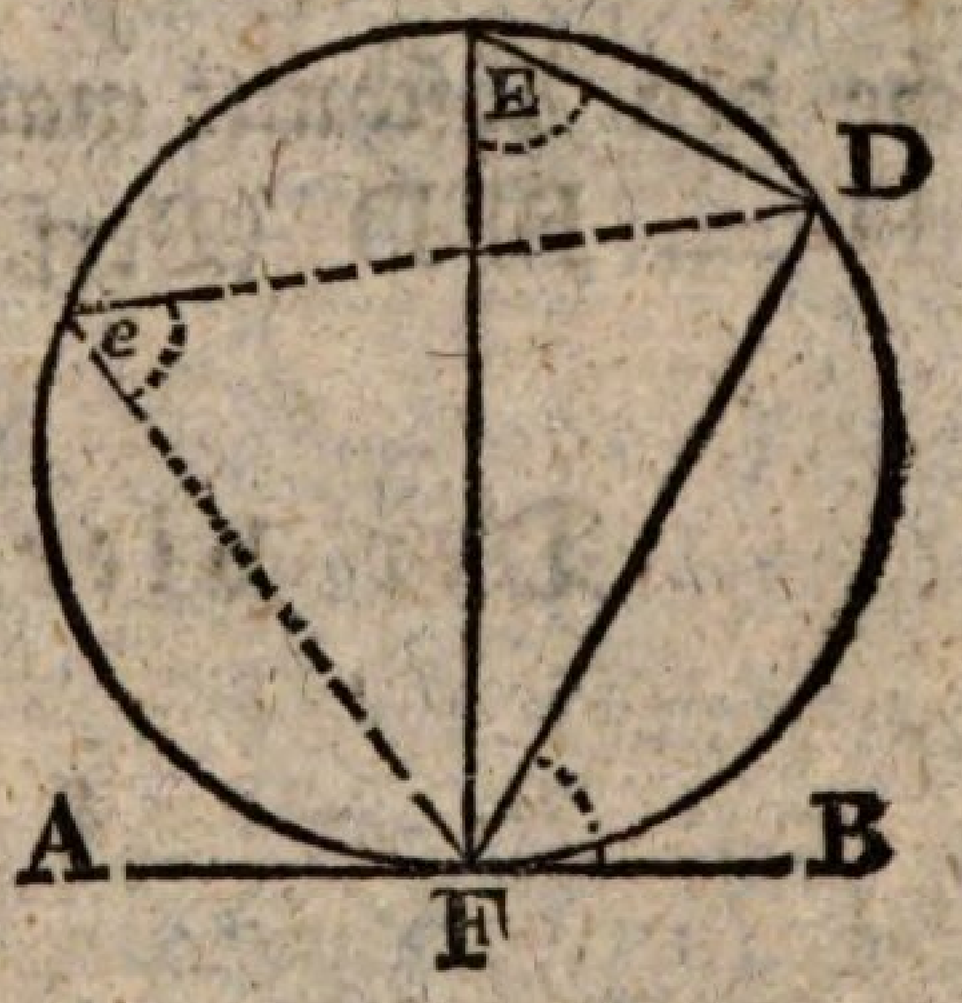
L. Also $\angle E = \angle DFB$ (I)

und $\angle G = \angle DFA$ (II)

E und G aber sind Winkel in Abschnitten, welche die Sehne FD macht, und DFB, DFA sind Winkel welche eben diese Sehne mit der StreifLinie macht. — Wie würde man nun die jezt gefundene Wahrheit einkleiden?

L.

S. Wenn vom Berührungs-Punkte einer Streiflinie eine Sehne gezogen wird; so sind die Winkel welche beide mit einander machen, den Winkeln in den entgegen gesetzten Abschnitten gleich: nämlich der Streif-Winkel DFB, zur Rechten den Abschnitts-Winkel E, zur Linken; und der Streif-Winkel DFA zur Linken, dem Abschnitts-Winkel G zur Rechten.



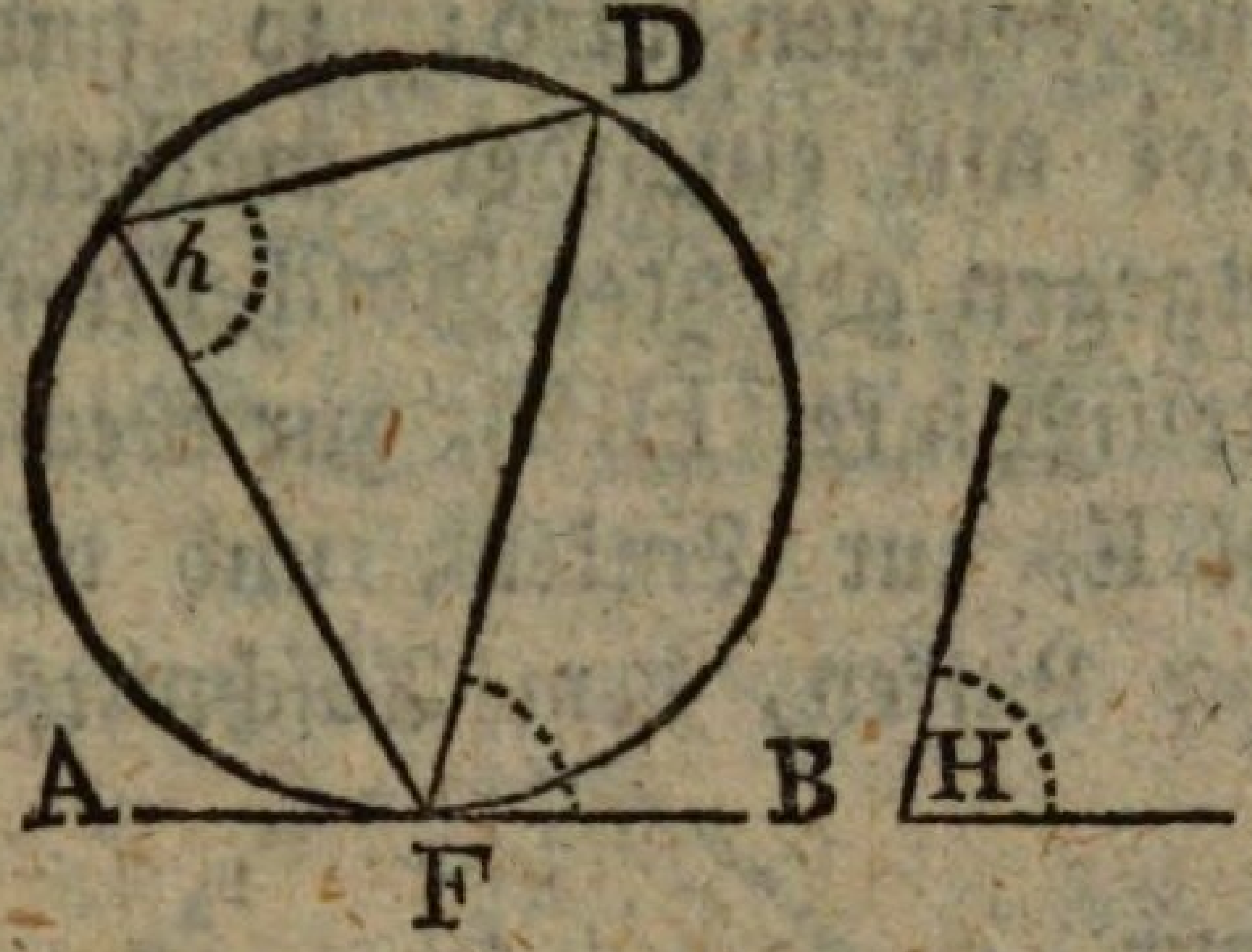
L. Das ist richtig: nur lässt sich noch ein Einwurf machen. Wir haben die Linie FE senkrecht auf AB gestellt. Wenn man nun eine andre, Fe schief stellte, und DE zöge; würde dan der Winkel DeF auch dem DFB gleich seyn?

S. Allerdings: denn e = E; (203).
Nun aber ist G = E; (II)
folglich auch G = e (§ 33).

Der neun und dreißigste Satz.

§ 231.

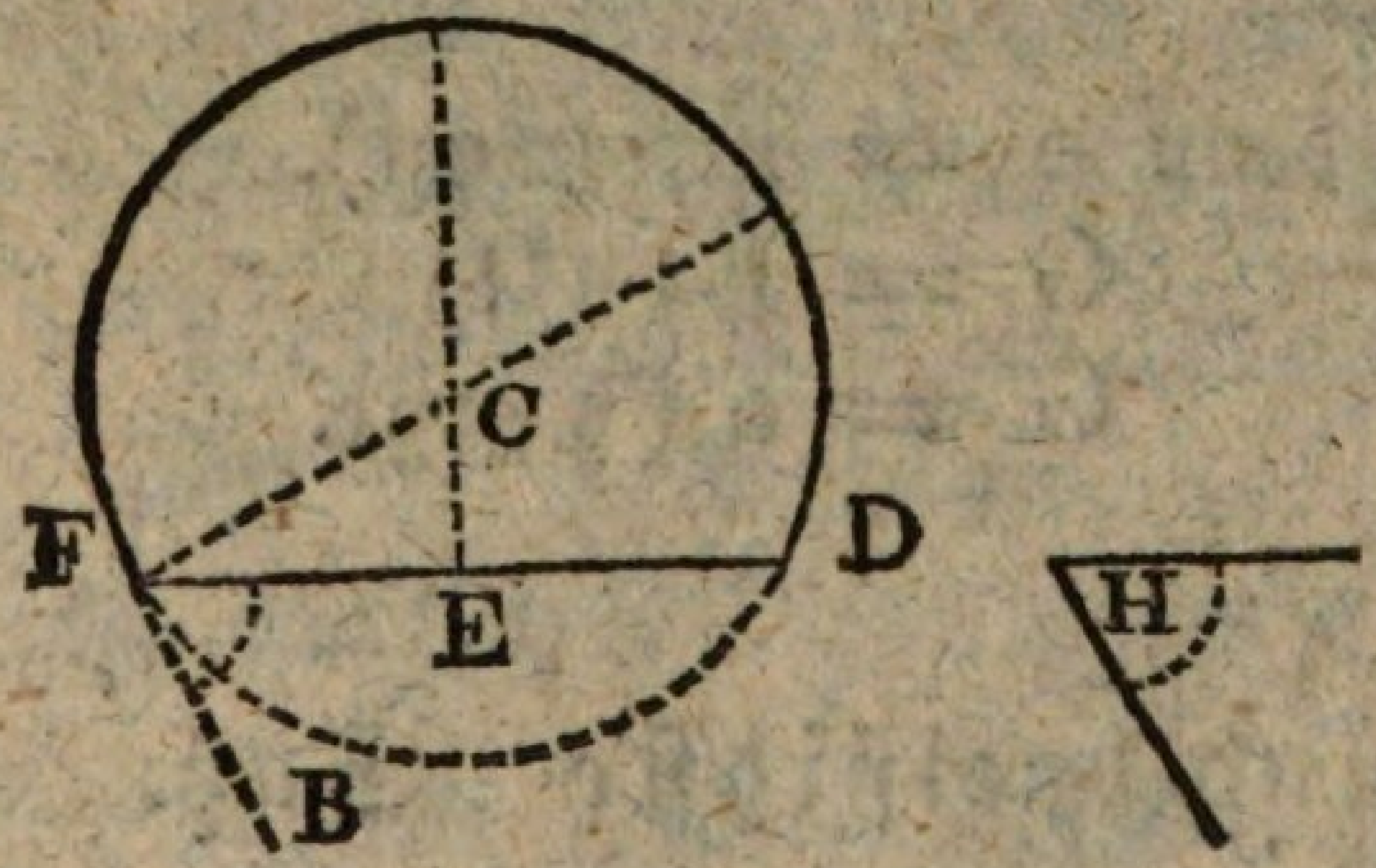
L. Es wird gegeben ein Kreis und verlangt von demselben einen Abschnitt zu machen, der einen gegebenen Winkel H fasst. — Der vorige Satz gibt die Auflösung.



S. Ich ziehe eine Streiflinie AB (§ 193) lege an den Streifpunkt F einen Winkel BFD gleich dem gegebenen H (§ 61); so ist der Schenkel FD zugleich die Sehne welche den Abschnitt macht, der den gegebenen Winkel H = BFD (Verf.) = h (§ 230) enthält.

Der vierzigste Satz.

§ 232.



L. Es wird gegeben eine gerade Linie FD. Ueber derselben soll ein Abschnitt beschrieben werden, welcher einen gegebenen Winkel H faßt. Oder mit andern Worten: Es wird ein Kreis verlangt, in welchen die gegebene Linie FD nicht nur als Sehne paßt, sondern auch einen solchen Abschnitt macht, welcher einen dem gegebenen gleichen Winkel faßt. — Wie wird das zu bewerkstelligen seyn?

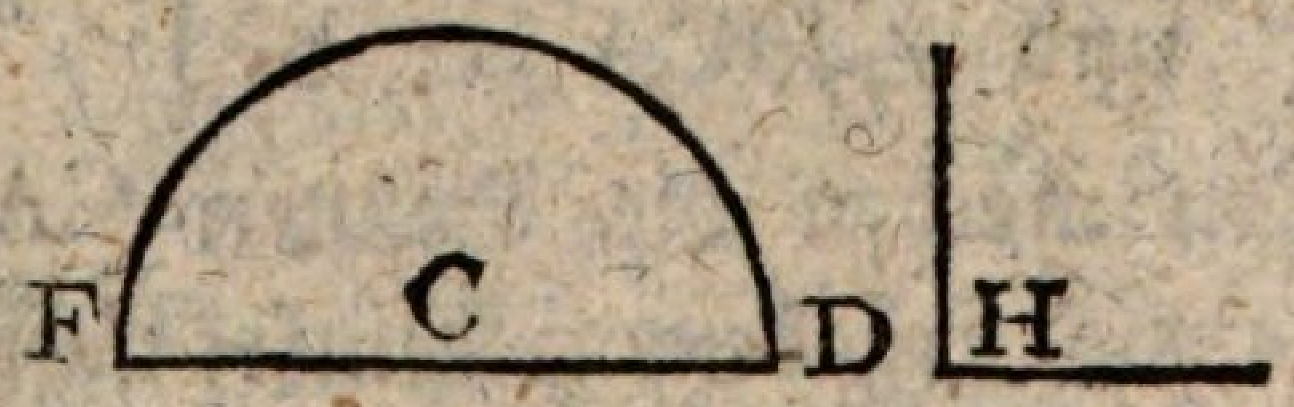
S.

S. So viel ist klar, daß wenn ich auf der Mitte E von FD eine senkrechte Linie errichte, diese durch den MittelPunkt geht (§ 171).

L. Das ist richtig! Da aber die Länge dieser senkrechten Linie unbestimmt ist, so ist es auch ihre Mitte. Zwar lässt sich aus jedem Punkt auf ihr eine durch F und D gehende KreisLinie beschreiben; nur die Schwirigkeit ist, ob die Linie FD den verlangten Abschnitt macht. Aufmerksame Betrachtung der vorigen Zeichnung muß hier wieder die Auflösung geben.

S. Ich sehe nun schon worauf es ankömt. Ich lege an DF einen Winkel DFB = H (§ 91). Dessen Schenkel FB gibt die StreifLinie des zu beschreibenden Kreises (§ 230). Da nun ein aus dem StreifPunkte F errichtete senkrechte Linie auch durch den MittelPunkt geht (§ 197); so gibt der Durchschnitt C beiden senkrechten Linien (§ 9) den MittelPunkt des verlangten Kreises, CF ist sein HalbMesser; und DEF der gesuchte Abschnitt.

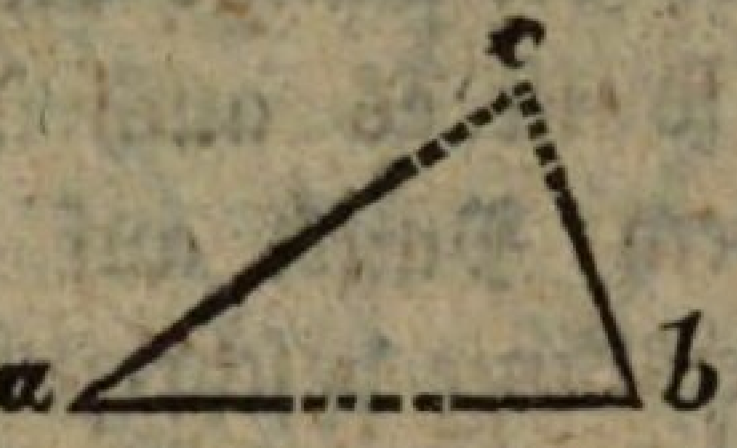
L. Ganz richtig. Ist der gegebene Winkel ein rechter, so bedarf es so vieler Umstände nicht einmal.

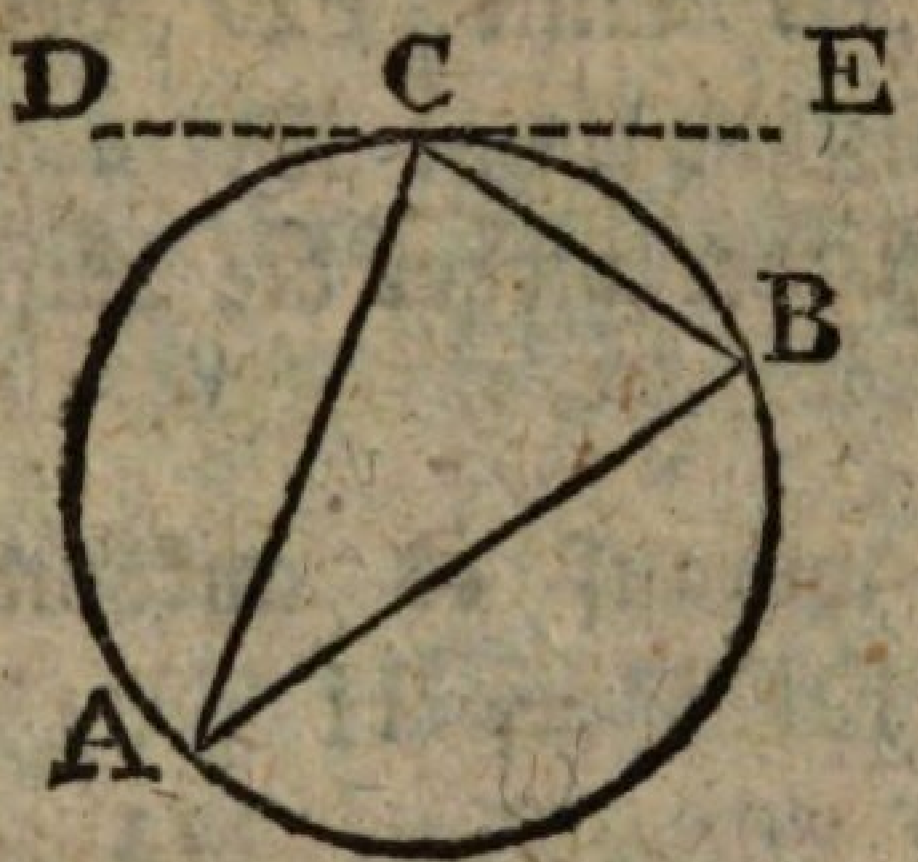


S. Dan brauche ich die gegebene Linie nur zu halben, und aus ihrer Mitte C einen HalbKreis zu beschreiben (§ 199)

Der ein und vierzigste Satz.

§ 233.





L. Auf dem Umfange eines beliebigen Kreises wird ein Punkt C gegeben. Von diesem Punkte C sollen zwei Sehnen ausgehn, welche an ihren beiden andern Enden durch eine gerade Linie verbunden, zwei Winkel machen, die zwei gegebenen Winkeln a und b gleich seien. — Was wird zuerst zu tuhn seyn?

S. An C eine StreifLinie DE zu legen.

L. Recht! Und weiter?

S. An den StreifPunkt Winkel legen, gleich den gegebenen: nämlich

$$\left.\begin{aligned} \angle ECB &= a \\ \text{und } \angle DCA &= b \end{aligned}\right\} (\S\ 91).$$

Nun machen die Sehnen CA, CB, Abschnitte welche die gegebenen Winkel fassen (§ 230). Wenn ich daher AB ziehe; so ist $\angle A = \angle ECB$

$$\left.\begin{aligned} \angle A &= \angle ECB \\ \text{und } \angle B &= \angle DCA \end{aligned}\right\} (\S\ 230) \left.\begin{aligned} &= a \\ &= b \end{aligned}\right\} (\text{Verf.})$$

L. Recht! Nun wollen wir die Schenkel der gegebenen Winkel verlängern, bis sie zusammen stossen;

stossen; so entsteht ein DreiEkk abc. Welche Gleichheit hat dieses mit dem DreiEkke ABC? Worin stimmt es mit ihm überein?

S. $\left.\begin{array}{l}\angle a = \angle A \\ \angle b = \angle B\end{array}\right\}$ (Bew.)

$\angle c = \angle ACB$ (§ 122).

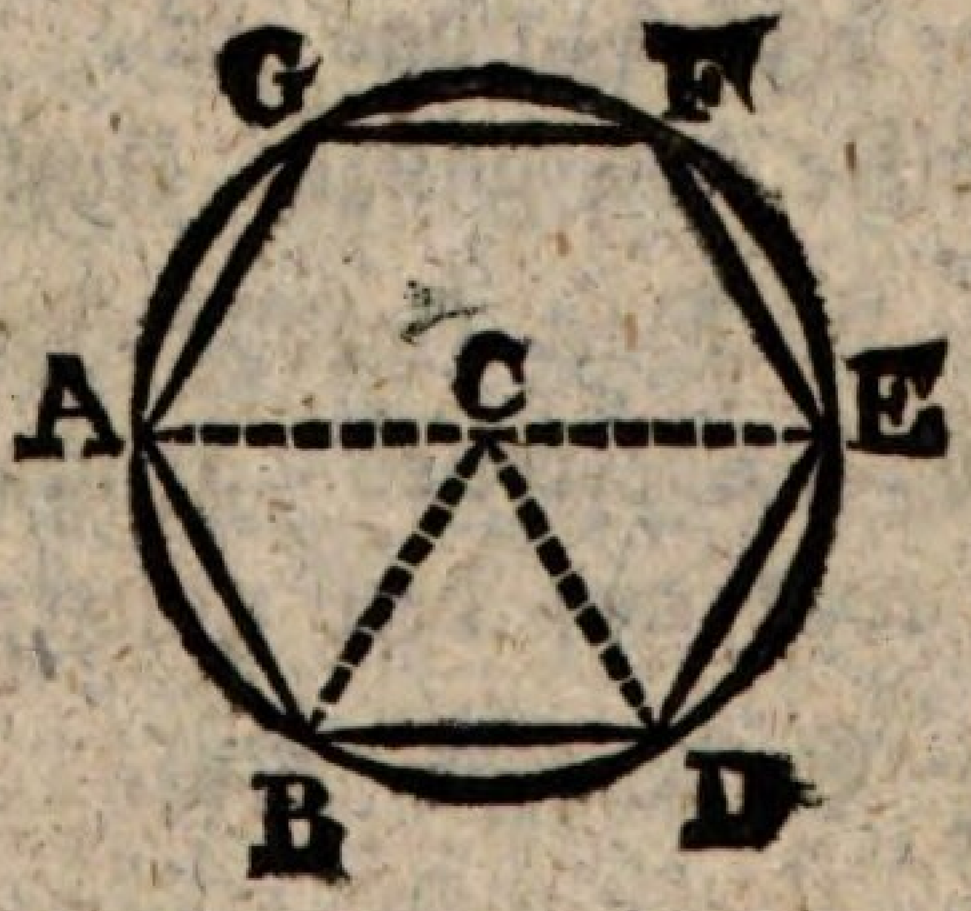
L. Das DreiEkk ABC also ist dem abc gleichwinklig; und die Auflösung leistet mehr als die Aufgabe zu fodern schien. Wir wissen also jezt wie man verfahren muß, um in einen gegebenen Kreis ein DreiEkk zu zeichnen, daß einem gegebenen gleichwinklig sei.

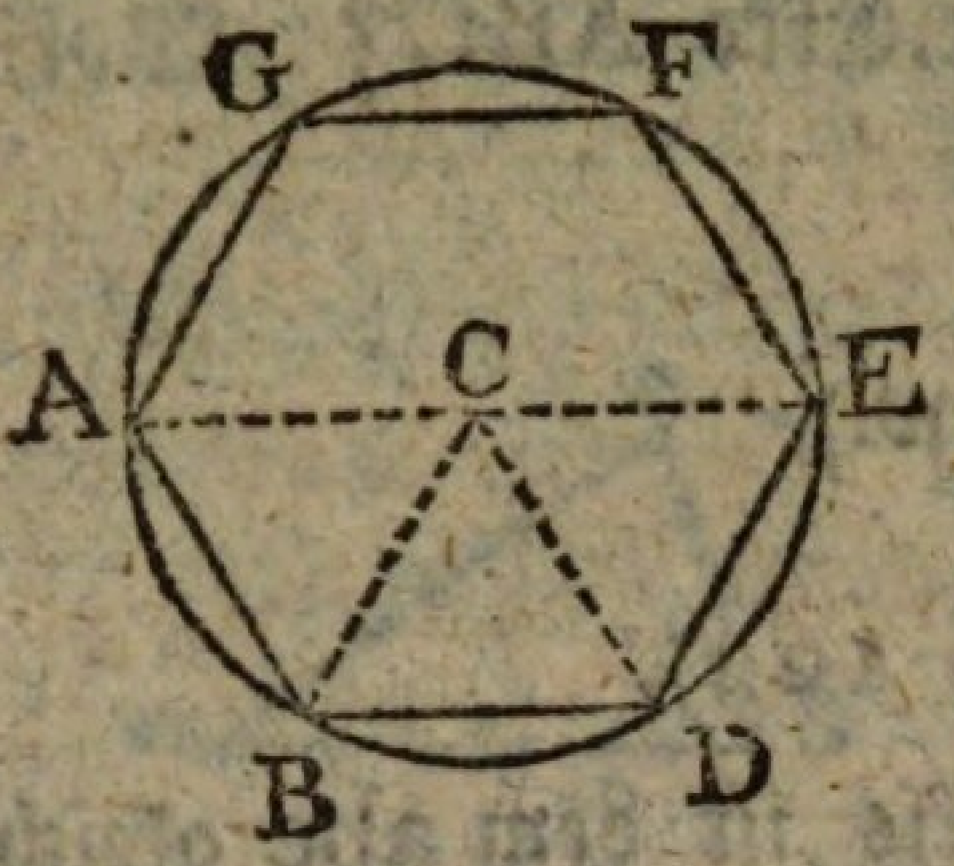
II. Von Zerteilung der KreisLinie; Beschreibung ekkiger Figuren in und um den Kreis; Beschreibung des Kreises in und um ekkige Figuren.

Der zwei und vierzigste Saz.

§ 234.

L. Es wird ein Kreis beschrieben, und ein HalbMesser AC gezogen. Hierauf wird eine Sehne AB = CA, und ein zweiter HalbMesser CB, gezogen. — Was für ein DreiEkk ist nun CAB?





S. Ein gleichseitiges.

L. Und wie groß ist ein Winkel desselben?

S. C = A = B (§ 59) = $\frac{2}{3}$ ∟ (§ 118) = 60° (220).

L. Der HalbMesser wird auf dem Umfange weiter getragen, von B nach D, und von D nach E, und es werden die HalbMesser CD, CE gezogen. — Wie groß sind nun die neu entstandenen MittelPunktsWinkel BCD, DCE?

S. Jeder so groß wie der erste ACD = 60°.

L. Und alle dreie zusammen?

S. 60° + 60° + 60° = 180° = 2 ∟

L. Und wie viel Grade hält ein Bogen AB, BD, DE?

S. Eben so viel als der Winkel den er unterspannt, und aus dessen Spitze er beschrieben ist (§ 220).

L. Welch ein Teil der KreisLinie ist nun ABDE?

S. ABDE = 60° + 60° + 60° = 180° = $\frac{1}{2}$360; das ist, zwei Quadranten, oder die Hälfte des ganzen Umfanges (§ 220).

L. Der HalbMesser also passt auf den Umfang des HalbKreises genau drei Mal; wie oft passt er nun auf den ganzen Umfang?

S. Sechs Mal.

L.

L. Und die Bögen welche er als Sehne unterspannt, sind alle gleich (§ 206). Wie verfährt man also, um den Umfang eines Kreises in sechs gleiche Teile zu teilen?

S. Man trägt den HalbMesser sechs Mal auf demselben herum, von A nach B, D, E, F, G.

§ 235.

L. Aber lässt sich eine KreisLinie auch wol in zwölf gleiche Teile teilen?

S. Ja, man darf nur jedes SechsTeil halben (§ 208).

L. Und auf eben die Art lässt sie sich auch in 24, in 48, in 96 ꝛc. gleiche Teile zerschneiden. — Aber auch in dreie?

S. Wenn $AB = BD = \frac{1}{6}$; so ist $AB + BD = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

L. Eine Kreislinie lässt sich also geometrisch, nicht nur in 6, sondern auch in 3, in 12, in 24, in 48 ꝛc. gleiche Teile zerteilen.

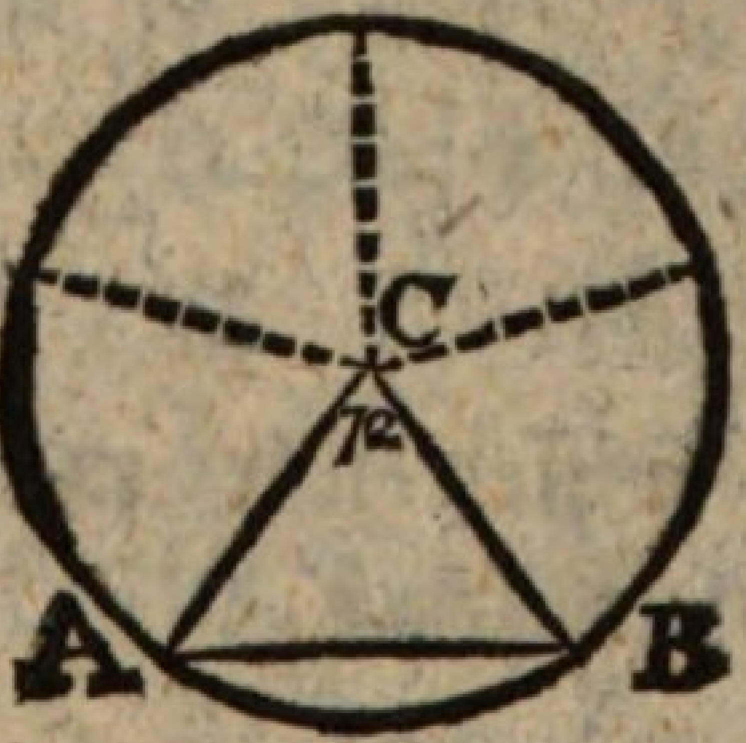
§ 236.

L. In wie viel gleiche Teile wissen wir nun den Kreis, oder seinen Umfang einzuteilen?

S. In zwei, in 3, in 4, in 6, in 8, in 12, in 16, in 24, in 32, in 48 ꝛc. (§ 168, 209, 234, 235).

L. Es gibt auch noch geometrische Verfahrungs-Arten für die Abteilung in 5, und in 15, und folglich auch in 10, 20, 30, 40 ꝛc. gleiche Teile: aber sie beruhen auf Gründen, die ihrer Weitläuftigkeit wegen hier nicht vorgetragen sind. Für die Abteilung aber in 7, 9, 11, 13, 14, 17 ꝛc. gleiche Teile ist noch keine geometrische Methode erfunden, welche Stand hielte, und man ist genötigt zu mechanischen Mitteln Zuflucht zu nehmen.

Das erste und leichteste ist das Versuchen. Es sollte z. B., eine KreisLinie in fünf gleiche Teile geteilt werden; so nimt man eine Linie welche etwas länger ist, als der HalbMesser, und trägt sie auf dem Umfange herum. Passt sie fünf Mal, so ist sie recht: passt sie nicht, so verengt, oder erweitert man die ZirkelOefnung, bis man die rechte trift. — Manche grössere Abteilung, wie z. B. die in neun gleiche Teile, ist noch leichter. Man kan nämlich den Umfang erst in 3 (§ 235), und jedes Drittel wieder in 3 gleiche zerteilen; so ist der ganze Umfang in 9 gleiche Teile zerschnitten.



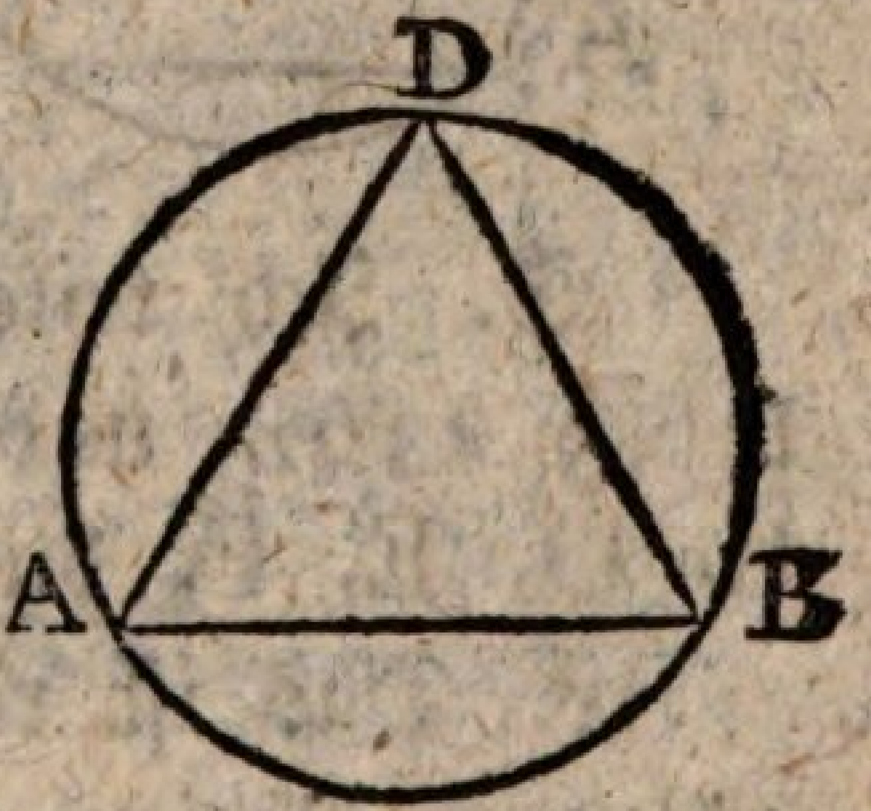
Ein zweites mechanisches Mittel ist der Gebrauch des WinkelMessers (§ 225). — Wie wird vermittels desselben eine KreisLinie in fünf gleiche Teile abgeteilt?

S. Da der ganze Umfang 360 Grad enthält (§ 220), so muß ich ausrechmen, wie viel deren auf den fünften Teil fallen. Er ist aber ein Fünftel

tel von 360° = 72°. Ich mache also einen Winkel dieses Gehalts am MittelPunkte C (§ 222), und wiederhole dieses vier Mal; oder trage auch die Sehne AB des ersten Winkels vier Mal herum (§ 218).

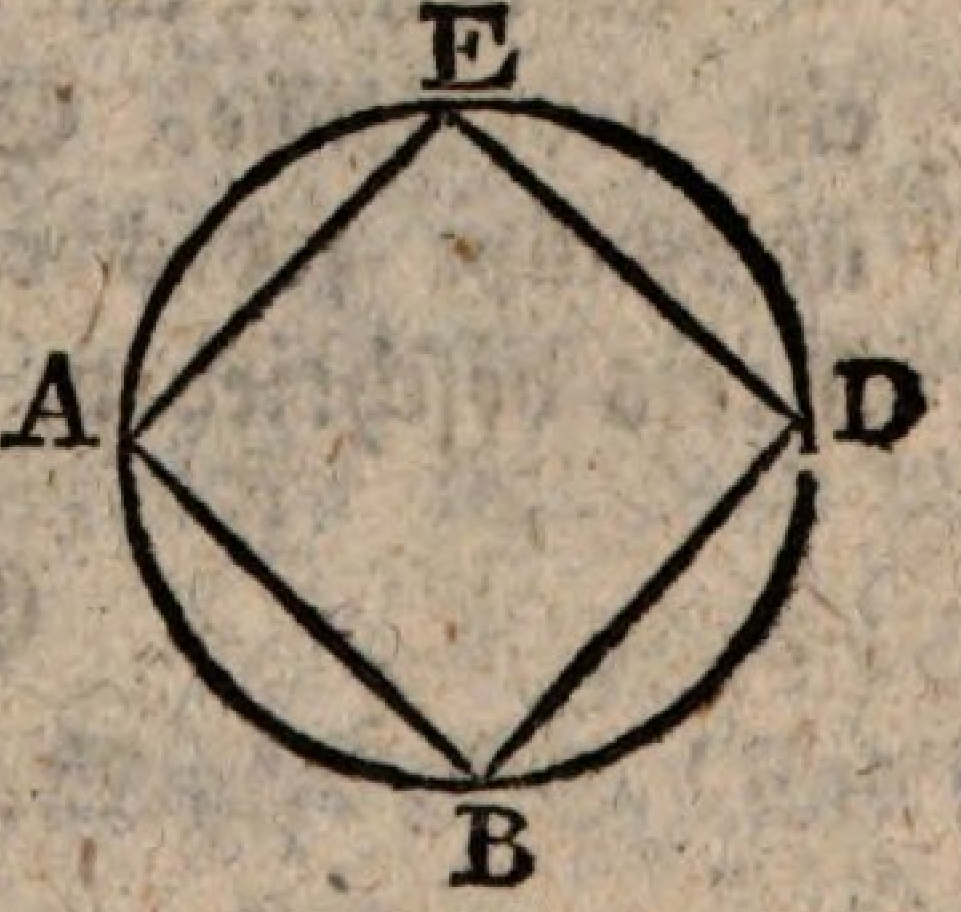
L. Das Verfahren ist richtig, erfodert aber wenn es zutreffen soll, grössere Genauigkeit als die Unvollkommenheit der WerkZeuge zu leisten vermag.

§ 237.



L. Lässt sich wol ein gleichseitiges DreiEkk in einem Kreis beschreiben? Das heisst, so daß seine Seiten Sehnen des Kreises seien?

S. Ich zerteile eine KreisLinie in drei gleiche Teile (§ 235) in A, B, D, und ziehe die Linien AB, BD, DA ꝛc. so ist ABD das verlangte gleichseitige DreiEkk (210).



L. Aber wie wird ein Quadrat in den Kreis beschrieben?

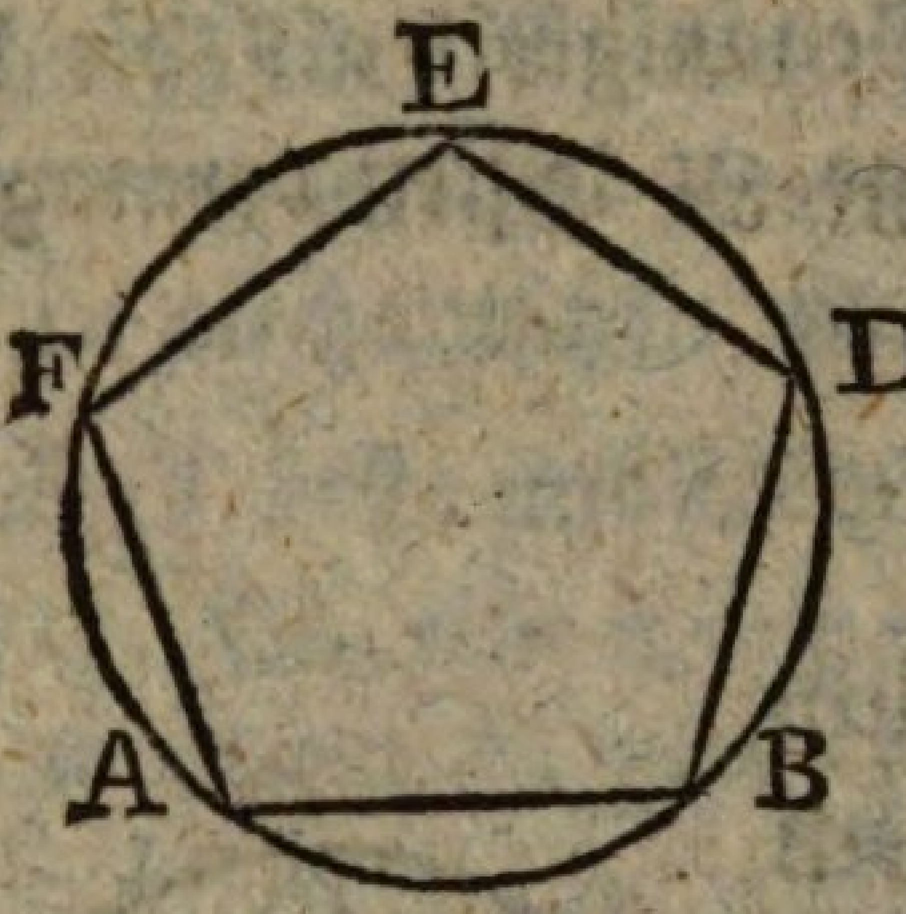
S. Dan wird der Umfang in vier gleiche Teile zerteilt (§ 209), und zwei und zwei benachbarte TeilungsPunkte werden durch gerade Linien, AB, BD, DE, EA, verbunden.

L.

L. Die Seiten sind gleich (§ 210): aber ein Quadrat muß auch lauter rechte Winkel haben.

S. Die hat es auch (§ 228 oder auch § 199).

§ 238.



L. Ein **ordentliches** VielEkk ist was lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel hat. — Wie wird nun ein ordentliches FünfEkk in einen Kreis beschrieben?

S. Ich teile den Umfang in fünf gleiche Teile (§ 236), und verbinde die TeilungsPunkte A, B, D, E, F, durch gerade Linien.

L. Das ist richtig: aber wie beweist man, daß alle diese Linien gleich lang, und alle Winkel gleich groß sind?

S. Die Gleichheit der Seiten folgt aus § 210, und die Gleichheit der Winkel aus § 227.

L. Recht! Und auf ähnliche Art lässt sich auch ein ordentliches SechsEkk, SiebenEkk, AchtEkk, überhaupt jedes ordentliche VielEkk, in einen Kreis beschrieben.

Erklärung.

§ 239.

L. Da das gleichseitige DreiEkk, und das Quadrat, die gleichen Seiten und gleichen Winkel mit

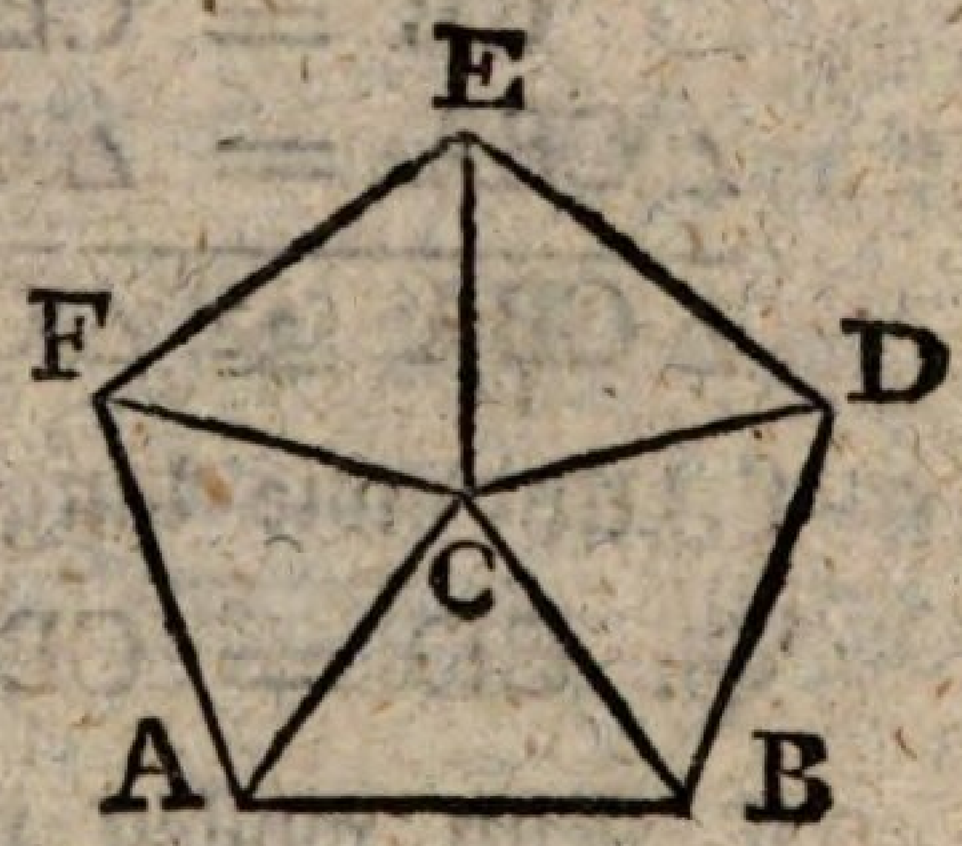
den

den ordentlichen VielEkken gemein haben (§ 54, 59, 136); so wollen wir künftig alle jezt genante Figuren, (zu verstehn die ordentlichen VielEkke, das Quadrat, und das gleichseitige DreiEkk), unter dem gemeinschaftlichen Namen ordentlicher Figuren begreifen.

Der drei und vierzigste Saz.

§ 240.

L. Alle Winkel einer ordentlichen Figur ABDEF sind gleich groß (§ 238). Gesezt nun zwei benachbarte Winkel, A, B, würden gehalbt, (§ 64), werden die sie halbenden Linien zusammen stossen, oder nicht?



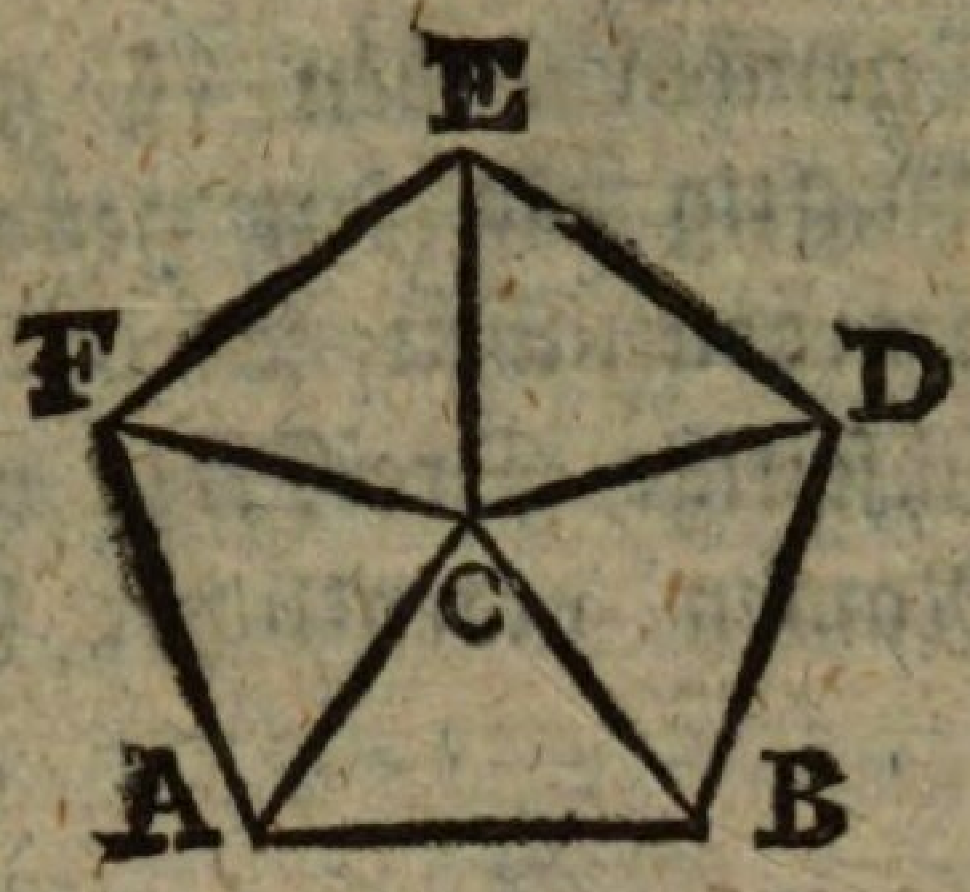
S. Da die innern GegenWinkel welche AB mit ihnen macht, kleiner sind, als zwei rechte (§ 71); so müssen sie zusammen stossen (§ 110).

L. Wir wollen also die Winkel A und B halben, und den ZusammenStossungsPunkt beider HalbungsLinien C nennen. — Welche von den Winkeln, welche die HalbungsLinie mit AB machen, ist nun der gröste?

S. Als Hälften gleicher Winkel (VS.) sind sie gleich groß (§ 43).

L. Und die Linien CA, CB?

S.



S. Die Winkel bei A und B sind gleich, folglich sind die Linien CA und CB gleich lang (§ 60).

L. Nun wollen wir eine Linie CD ziehn; so entsteht ein neues DreiEkk CBD. Wie verhält dieses sich gegen das erste CAB? Welches von beiden ist das gröste?

S. BA = BD (§ 238)
CB = CB (§ 29)
$\angle$CBA = $\angle$CBD (VS.)
$\triangle$CBA ≌ $\triangle$CBD (§ 56)

L. Und wie lang ist nun CD?

S. CD = CB = CA (§ 24).

L. Nun wollen wir auch eine Linie CE ziehn. — Wie groß ist nun das DreiEkk CDE?

S. $\triangle$CDE ≌ $\triangle$CBD (§ 56) ≌ $\triangle$CAB.

L. Das setzt voraus, daß die Winkel CDE und CBD gleich seien. Sind sie das aber auch wirklich?

S. $\angle$D = $\angle$B (§ 238)
$\angle$CDB = $\angle$CBD (Bew.)
$\angle$CDE = $\angle$CBA (§ 37).
Aber $\angle$CBA = $\angle$CBD (VS.)
$\angle$CDE = $\angle$CBD (§ 32).

L. Und wie lang ist CE?

S. CE = CD = CB = CA (§ 24).

L.

L. Nun können wir auch CF ziehn, und versichert seyn, nicht nur daß $\triangle CFE \cong \triangle CED \cong \triangle CDB \cong \triangle CBA \cong \triangle CAF$; sondern auch daß $CF = CE = CD = CB = CA$. — Diese Betrachtungen enthalten mehr als eine nüzliche Wahrheit. Was kan man, z. B., daraus daß $CA = CB = CD = CE = CF$ lernen?

S. a) Jede ordentliche Figur hat einen MittelPunkt C, der von allen Ekken desselben gleich weit entfernt ist.

L. Und daraus daß $\triangle CAB = \triangle CBD$ 2c.?

S. b) Jede ordentliche Figur wird durch gerade Linien vom MittelPunkte nach seinen Ekken in so viel gleichähnliche DreiEkke geteilt als es Seiten hat.

L. Und daraus daß $\angle CDE = \angle CBD$?

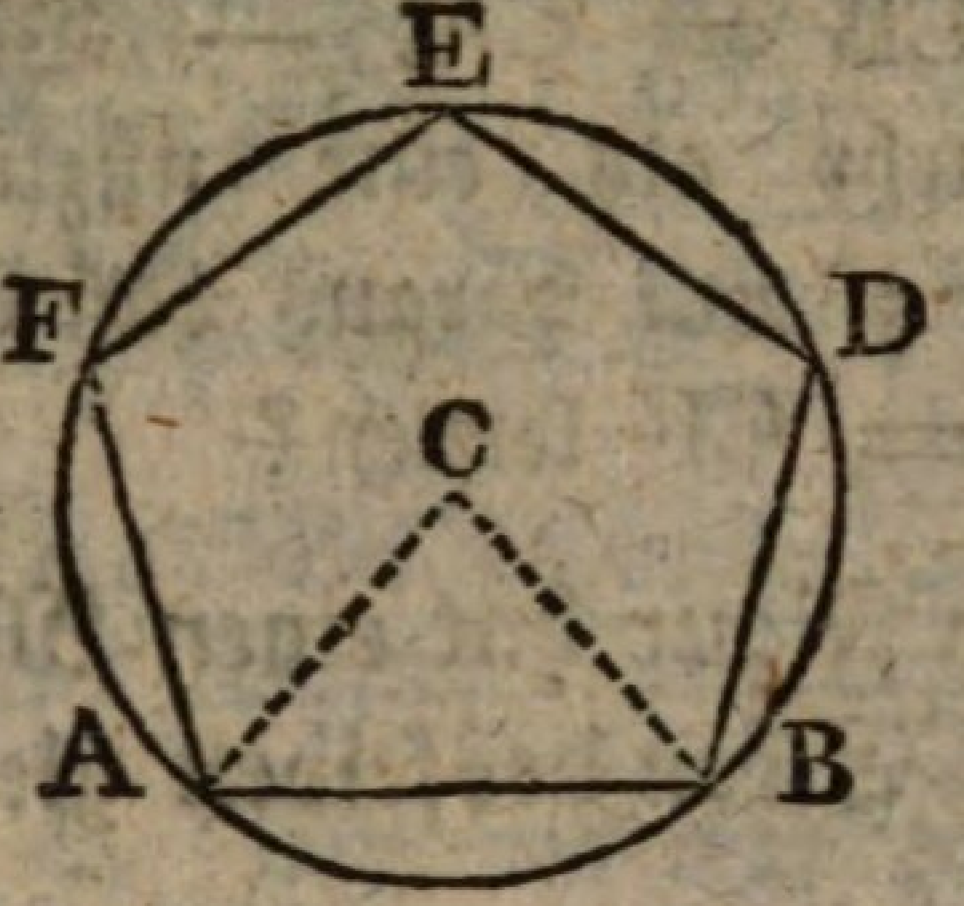
S. c) Eine von dem MittelPunkte einer ordentlichen Figur nach einem Winkel desselben gehende gerade Linie, halbt diesen.

L. Und daraus daß AC, BC, durch den MittelPunkt gehn?

S. d) Gerade Linien welche den UmfangsWinkel einer ordentlichen Figur halben, gehn durch deren MittelPunkt.

§ 241.

L. Jede ordentliche Figur hat also einen MittelPunkt (§ 240). Gesetzt der MittelPunkt eines ordentlichen VierEkks ABDEF, wäre unbekant, liesse er sich wol ausfindig machen?



S. Man darf nur zwei UmfangsWinkel, A und B halben (§ 64); so ist der Punkt C, wo die HalbungsLinien zusammen treffen, der gesuchte MittelPunkt § 239).

L. Und nun lässt sich auch wol ein Kreis beschreiben, der durch alle Ekken des VielEkks geht?

S. Da C von allen Ekken gleich weit absteht (§ 239); so darf ich nur eine dieser Entfernungen CA, zum HalbMesser nehmen, und damit einen Kreis beschreiben.

L. Man kan also von einer gegebenen ordentlichen Figur nicht nur den MittelPunkt finden; sondern auch einen Kreis um sie beschreiben.

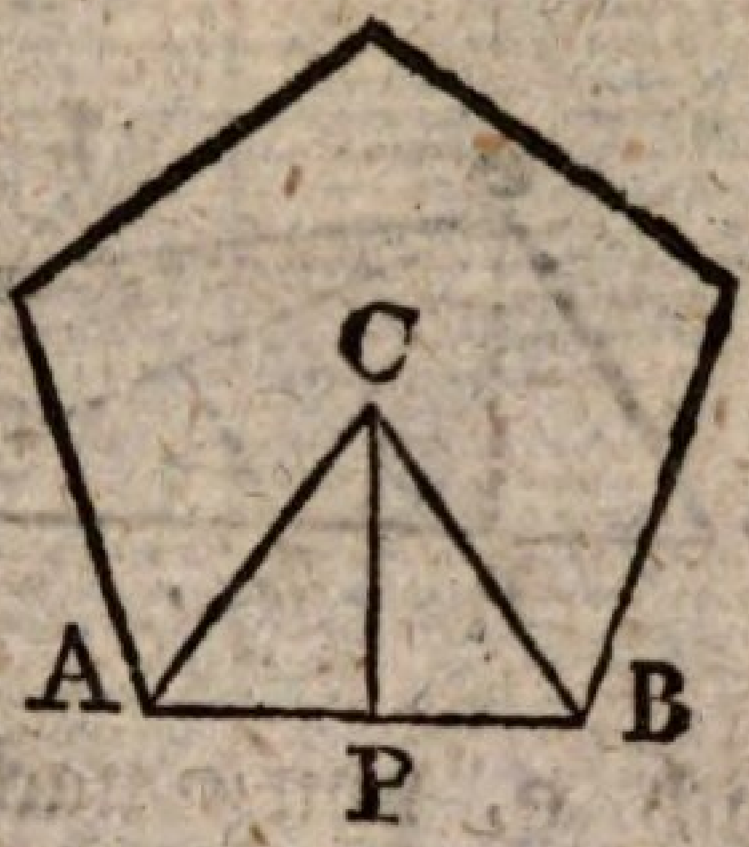
Erklärungen.

§ 242.

L. Was versteht man unter Umfangs- oder VielEkksWinkel?

S.

S. Einen von zwei zusammen stossenden VielEkks-Seiten gebildeten, A, B, ꝛc. (§ 246).

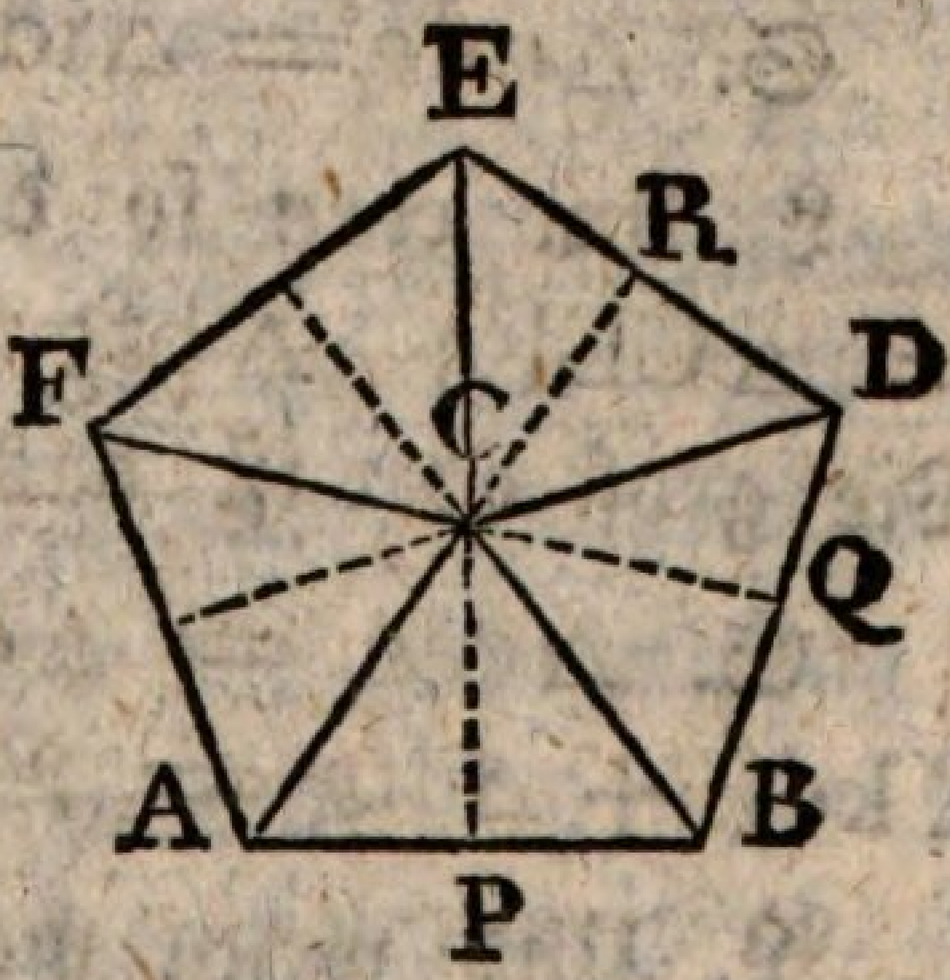


L. Recht! Und eine vom MittelPunkte C, bis zur Spitze des UmfangsWinkel reichende gerade Linie CA, CB, heisst ein grosser HalbMesser; eine vom MittelPunkte auf eine Seite AB einer ordentlichen Figur senkrecht gehende Linie CP aber heisst ein kleiner HalbMesser derselben. Zwei benachbarte grosse HalbMesser, CA, CB, bilden einen MittelPunktsWinkel.

Der vier und vierzigste Satz.

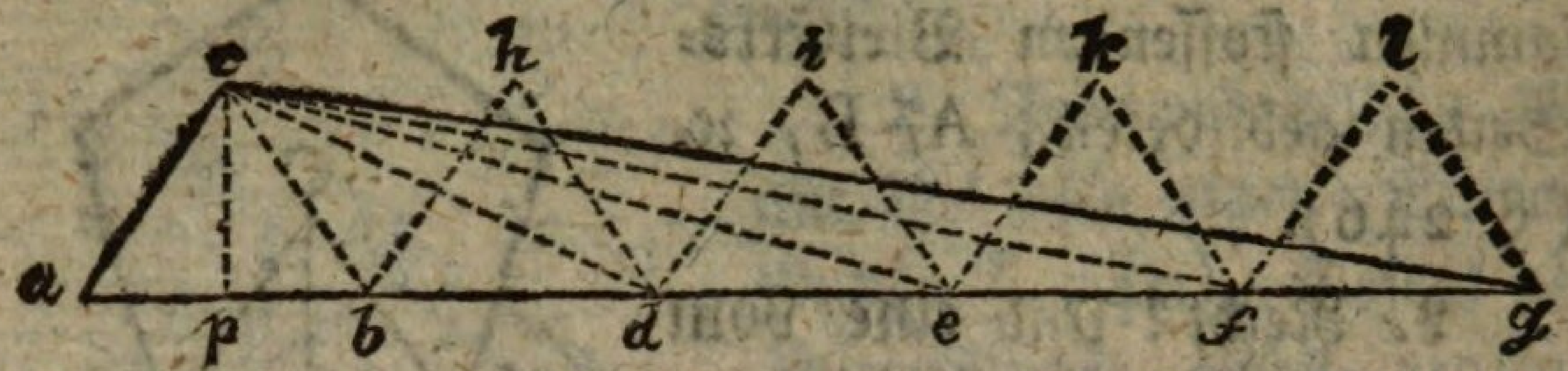
§ 243.

L. Ein ordentliches VielEkk ABDEF wird durch grosse HalbMesser CA, CB, CD, CE, CF, in lauter gleichähnliche DreiEkke abgeteilt (§ 240). Es wird eine unbestimmte gerade Linie gezogen, und auf solche werden die Grund-



Linien AB, BD, DE, EF, FA, dieser DreiEkke getragen, von a nach b, von b nach d, von d

 nach



nach e, von e nach f, und von f nach g. Ueber jede dieser Linien wird ein DreiEkk beschrieben, gleichähnlich denen ABC, BDC ꝛc. des VielEkks, (§ 90). — Wie groß sind nun diese DreiEkke abd + bdh + dei + efk + fgl zusammen?

S. △abc + △bdh + △dei + △efk + △fgl = △ABC + △BDC + △DEC + △EFC + FAC = VielEkk ABDEF.

L. Nun werden die geraden Linien cd, ce, cf, cg gezogen. — Wie groß ist nun das DreiEkk cbd?

S. △cbd = △hbd (§ 144) = △CBD (Verf.)

L. Und cde?

S. △cde = △ide (§ 144) = △CDE (Verf.)

L. Und eben so die übrigen: △cef = △kef = △CEF; △bfg = △lfg = △CFA. — Wie groß aber ist das DreiEkk cag?

S. △cag = △cab + △hbd + △ide + △kef + △lfg = VielEkke ABDEF.

L. Und wenn man von c auf ag eine senkrechte Linie cp fällt, was stellt die vor?

S. Die Höhe der DreiEkke cag, cab, cad, ꝛc. (§ 138).

L.

L. Und wie lang ist cp?

S. cp = CP (§ 24), dem kleinen HalbMesser.

L. Der Beweis aus § 24 ist nicht überzeugend. Wir wollen § 94 nachlesen.

S. Hier ist ein andrer.

$$\begin{array}{l} cb = CB \text{ (Verf.)} \\ \angle cpb = \angle CPB \text{ (§ 49)} \\ \angle cbp = \angle CBP \text{ (§ 24)} \\ \hline \triangle cpb \cong \triangle CBP \text{ (§ 94)} \\ \hline cp = CP \text{ (§ 24)}. \end{array}$$

L. Gesetzt aber man hätte, anstat auf AB eine senkrechte Linie vom MittelPunkte zu fällen, auf BD eine gezogen, wäre auch K so lang als CP, oder cp?

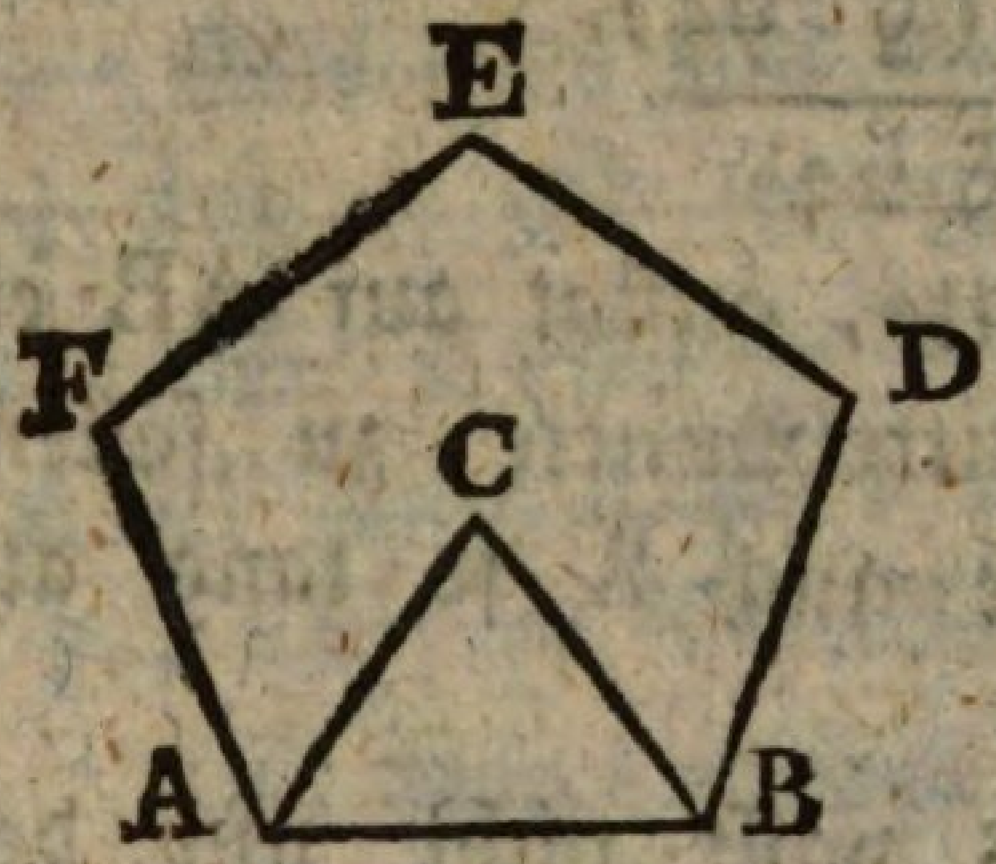
S. Allerdings, denn es passt nicht nur der vorige Beweis; sondern man kan auch aus c einen Kreis um ABDEF beschreiben (§ 240); so sind die Seiten des VielEcks Sehnen desselben (§ 170). Und da sie alle gleich lang sind (§ 237); so haben sie auch alle gleiche Entfernung vom MittelPunkte (§ 186). Folglich CP = CQ = CR ꝛc.

L. Alles jezt gefundene gilt von allen ordentlichen Figuren. Man kan also festsetzen: Alle kleine HalbMesser einer ordentlichen Figur sind einander gleich, und da sie die Entfernung der Seiten vom MittelPunkte messen (§ 97) so stehn alle Seiten vom MittelPunkte gleich weit ab. Aber welche Lehre kan man daraus ziehn, daß cag gleich ABDEF ist?

S. Jede ordentliche Figur ist einem DreiEkke gleich, welches zu seiner Grundlinie den Umfang, und zu seiner Höhe den kleinen HalbMesser desselben hat.

Der fünf und vierzigste Saz.

§ 244.



L. Läßt sich wol der MittelPunktsWinkel eines ordentlichen FünfEkks AB DEF finden?

S. Die Summe aller Winkel um C ist vier rechten Winkeln (§ 73), oder 360 Grad gleich (§ 220). Ein einzelner also ist der fünfte Teil von 360, das ist 72 Grad.

L. Und der MittelPunktsWinkel des SechsEkks?

S. Ist der sechste Teil von 360, das ist 60 Grad.

L. Wie groß aber ist der UmfangsWinkel des FünfEkks?

S. $\angle C + \angle CAB + \angle CBA = 2 ⊾ (\S 118) = 180°$

$\angle CAB + \angle CBA = 2 ⊾ - C = 180° - 72° = 108°.$

L. Aber ist auch der Winkel CAB mehr CBA so groß als A?

S. Ja. Denn A = B (§ 238). Beide aber sind gehalbt durch die Linie CA und CB (§ 240);

folg-

folglich sind ihre Hälften CAF und CBD einander gleich § 43. Folglich ist CAB + CBA = CAB + CAF (§ 227) = A.

L. Der MittelPunktsWinkel eines ordentlichen VielEkks überhaupt einer ordentlichen Figur wird also gefunden ? ?

S. Wenn man 360° durch die Zahl der Seiten teilt.

L. Und der UmfangsWinkel?

S. Wenn man den MittelPunktsWinkel von 180° abzieht.

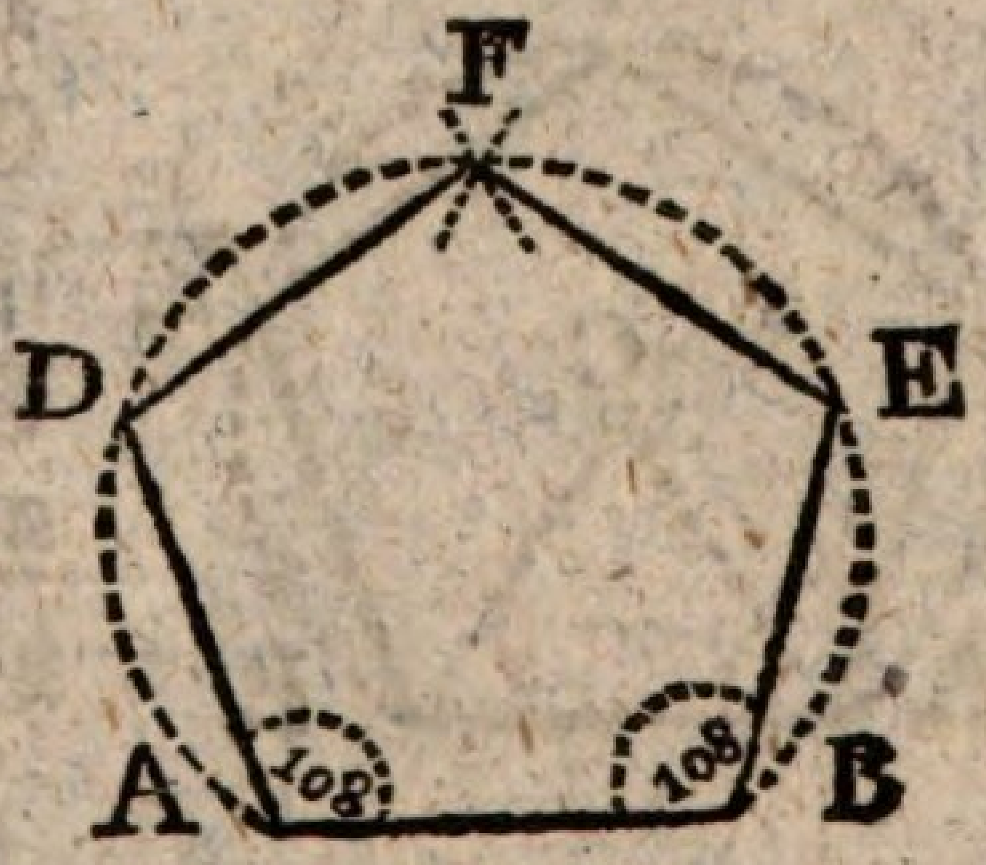
L. Wie groß ist nun der UmfangsWinkel des ordentlichen SechsEkks?

S. 180° — 60° = 120°.

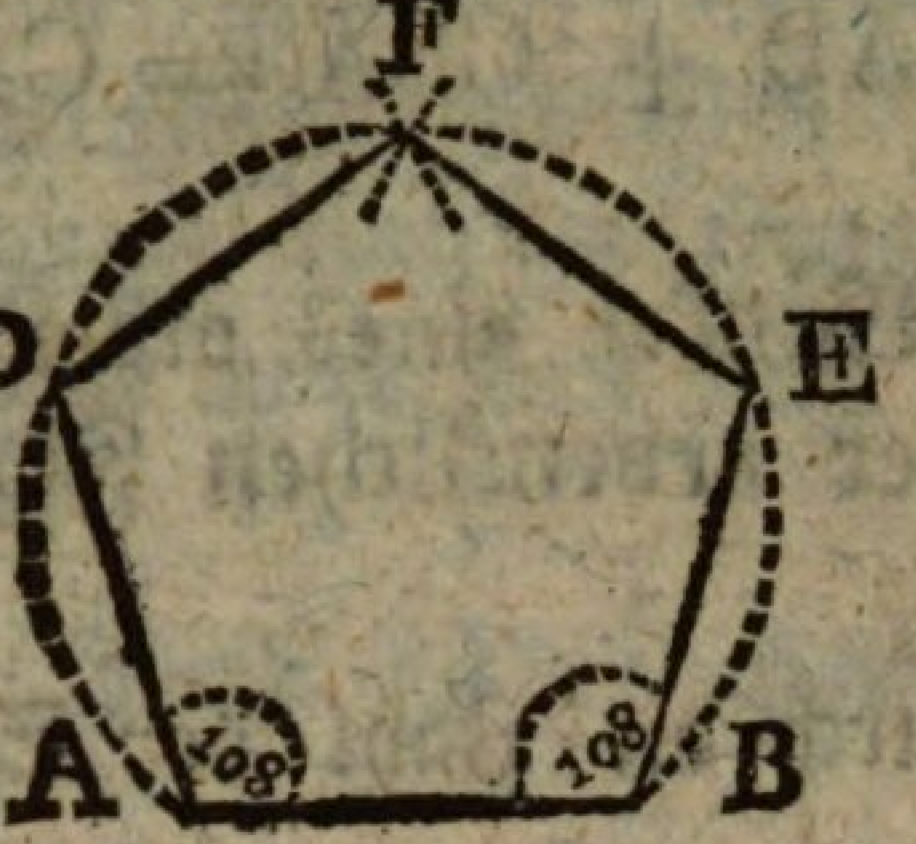
Der sechs und vierzigste Satz.

§ 245.

L. Es wird gegeben eine Seite AB, und verlangt auf derselben ein ordentliches VielEkk zu beschreiben. — Wir wollen es mit dem FünfEkk versuchen.

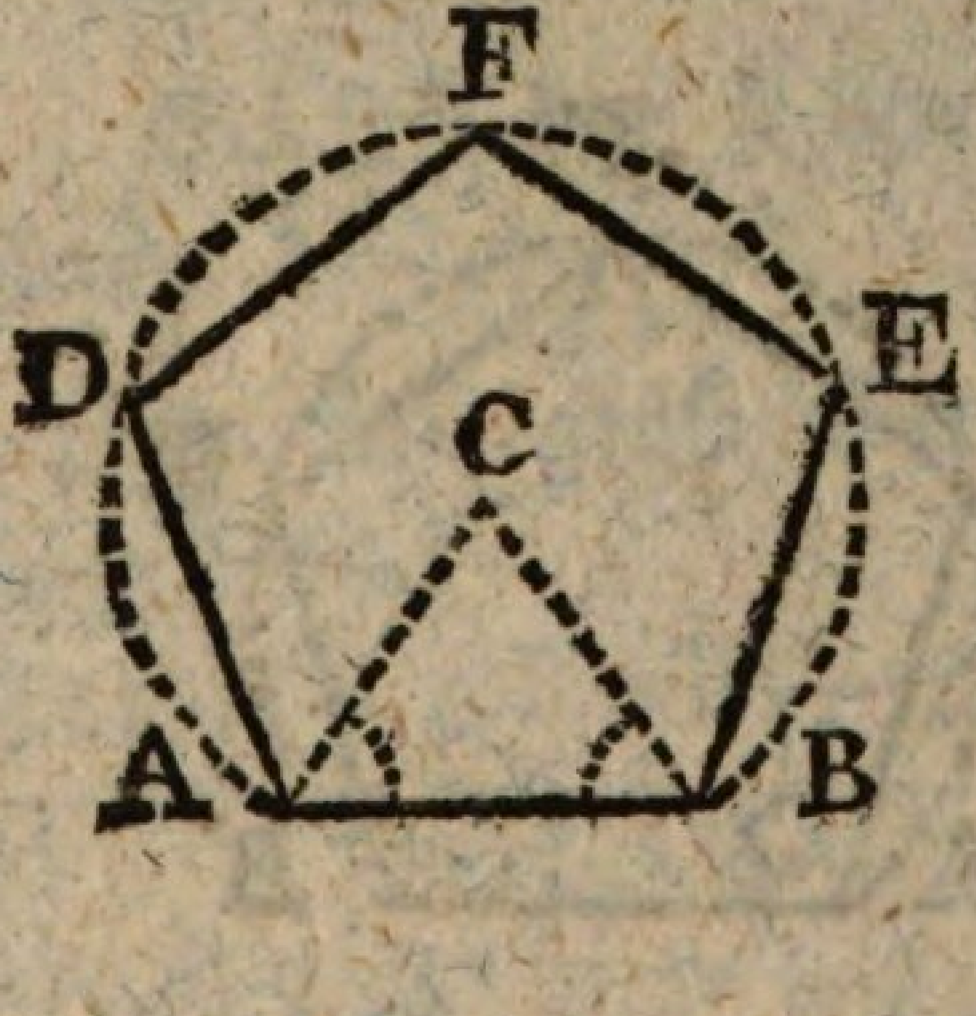


S. Zuerst suche ich den UmfangsWinkel, welcher beim FünfEkke 108 Grad ist (§ 243). Diesen trage ich an beide Enden von AB (§ 222), und mache die Schenkel AD, BE, der gegebenen Sei-



te AB gleich. So habe ich schon drei Seiten; und die beiden noch fehlenden ergeben sich, wenn ich, mit der Länge AB, aus D und E einen Durchschnitt F mache, und DF, EF ziehe.

L. Das Verfahren ist richtig, aber für VielEkke von mehr Seiten zu weitläuftig, und des vielen WinkelAuftragens wegen zu unsicher (§ 236). Auch wird ein Beweis erfodert daß der Winkel F den übrigen UmfangsWinkeln gleich sei. Wir wollen daher, um den Schwirigkeiten auszuweichen, und die Weitläuftigkeiten abzukürzen, auf eine bequemere Auflösung denken. — Lässt sich nicht, wenn eine VielEkksSeite AB gegeben ist, der MittelPunkt desselben finden?



S. Man muß die halben VielEkksWinkel auf beide Enden von AB tragen; so ist der Punkt C, wo beide Schenkel sich schneiden, der MittelPunkt des verlangten VielEkks (§ 241).

L. Und wie wird das VielEkk dessen Seite AB seyn soll, nun vollendet?

S. Ich beschreibe aus C, mit dem grossen HalbMesser CA, eine KreisLinie. Da diese durch

alle

alle WinkelSpitzen der Figur geht (§ 241); so darf ich nur die gegebene Seite AB auf derselben von A in D, von B in E, von E in F tragen.

L. Wir wissen also auf einer, gegebenen Seite ein ordentliches VielEkk zu beschreiben.

Der sieben und vierzigste Satz.

§ 246.

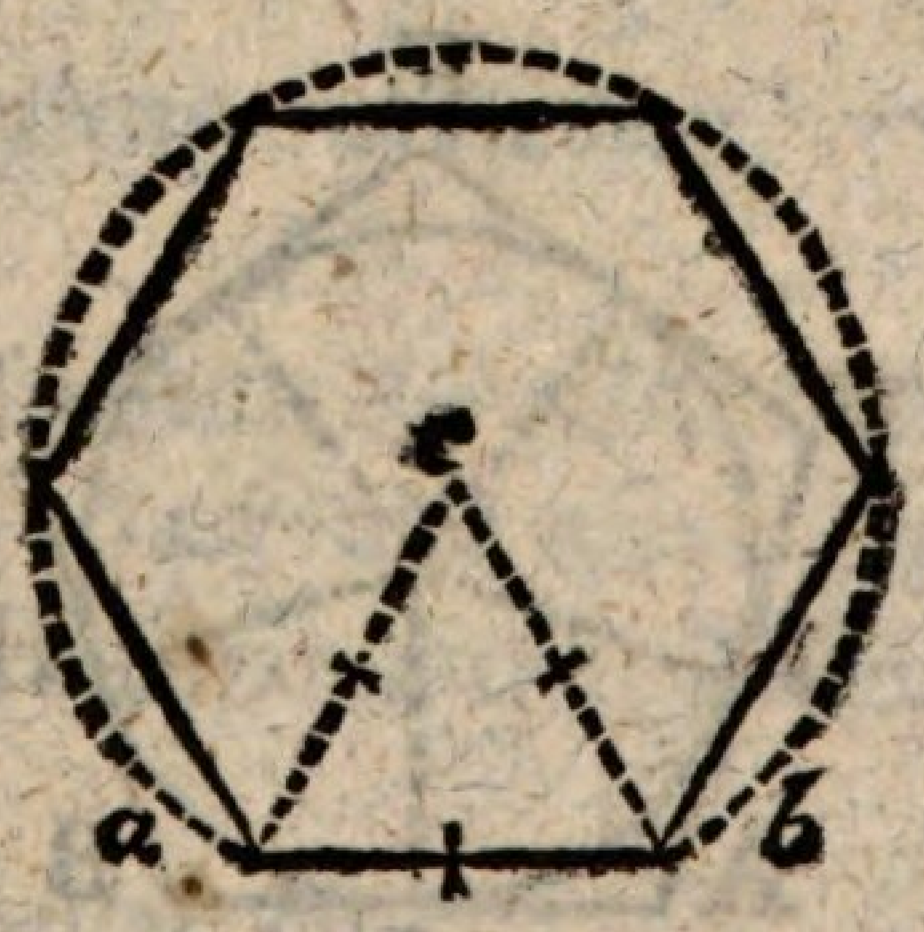
L. So richtig dieses Verfahren in der Theorie ist, so unsicher ist es, wenn man sich des gewöhnlichen WinkelMessers dabei bedient (§ 235); es bahnt aber den Weg zu richtigern Auflösungen, die in der Trigonometrie gelehrt werden. Für das SechsEkk gibt indessen schon die Geometrie ein kürzeres und sicheres Verfahren. — Wie groß ist der UmfangsWinkel des SechsEkks?

S. 120 Grad (§ 244).

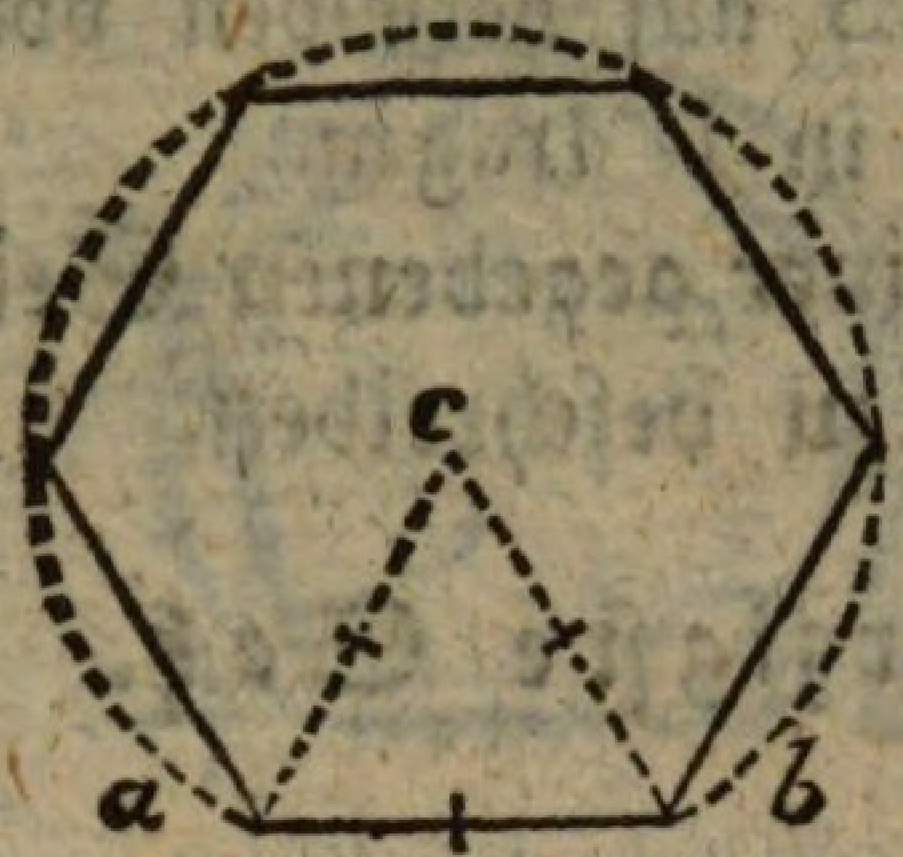
L. Und eines gleichseitigen DreiEkks?

S. 60 Grad (§ 124).

L. Also gerade die Hälfte des vorigen. Daraus ergibt sich die Zeichnung eines ordentlichen SechsEkks auf einer gegebenen Linie ab. Wie hat man zu verfahren?



S. man zeichnet auf ab ein gleichseitiges DreiEkk abc (§ 54), und beschreibt aus dessen Spitze c, mit dem HalbMesser ca, eine KreisLinie, in welcher ab sechs Mal herum passt.



L. Woher aber bin ich versichert, daß c der Mittel=Punkt des verlangten Sechs=Ekks ist?

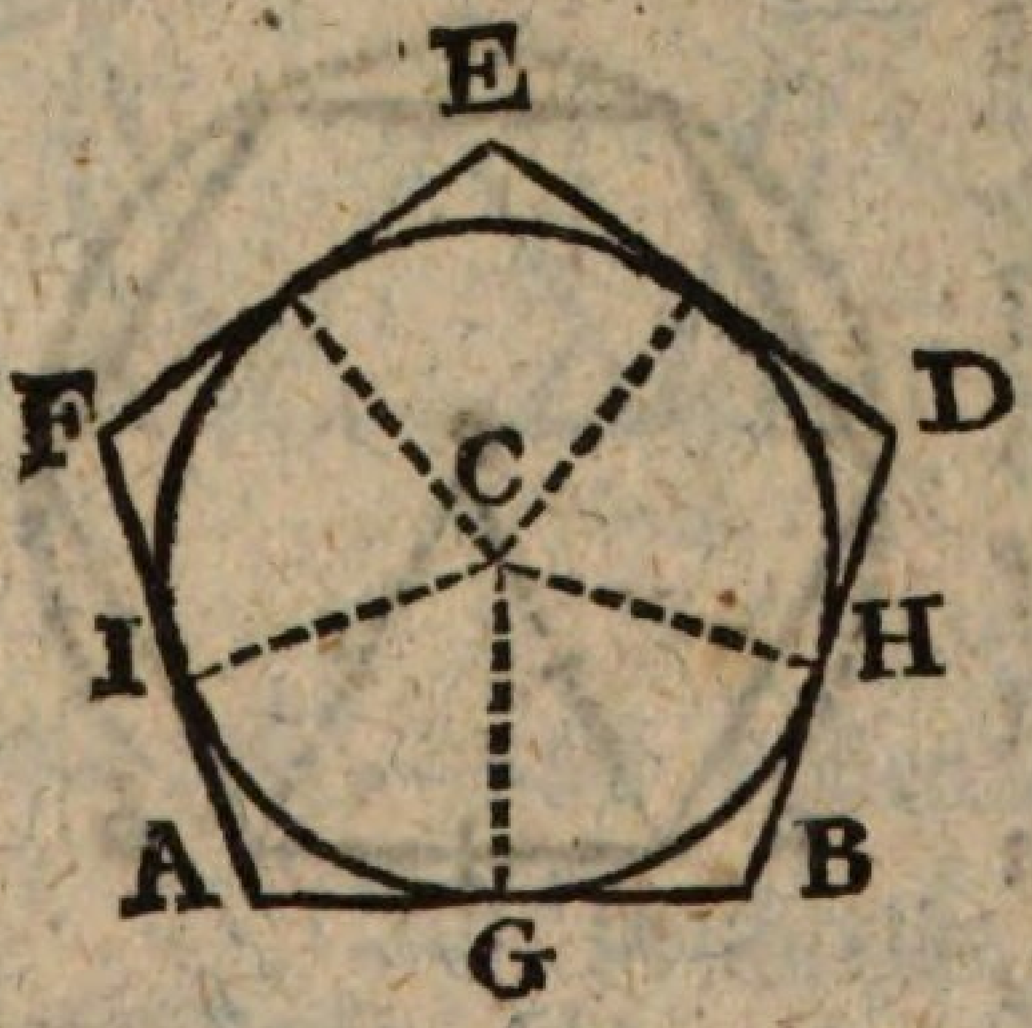
S. Weil bei a und b der halbe VielEkksWinkel aufgetragen ist, so gehn die Linien ac, bc, durch den Mittel=Punkt (§ 240).

L. Recht! Aber woher weis ich, daß ab, sechs Mal in die mit ca beschriebene KreisLinie passt?

S. ca = ab (§ 54). Nun aber passt ca sechs Mal auf die damit beschriebene KreisLinie (§ 234); folglich auch ab (§ 25, 27).

Der achtund vierzigste Satz.

§. 247.



L. Lässt sich wol in einer ordentlichen Figur ABDEF ein Kreis beschreiben, so daß alle Seiten derselben ihn streifen?

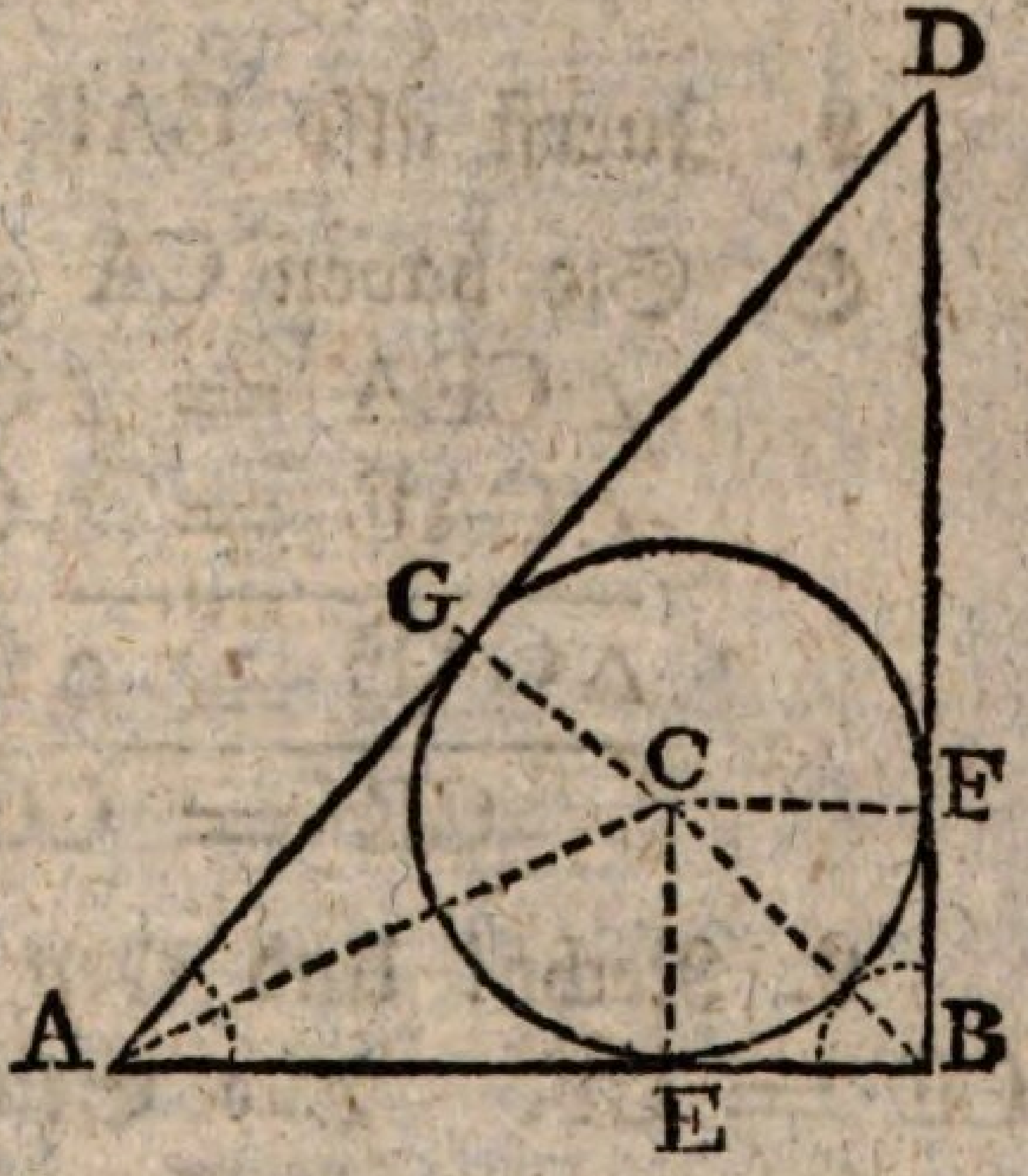
S. Zuerst muß ich ihren MittelPunkt C suchen (§ 241). Dan ziehe ich einen kleinen HalbMesser CG (§ 242), und beschreibe damit einen Kreis. Die=

Dieser wird von allen Seiten der Figur gestreift; denn alle sind vom MittelPunkte C gleich weit entfernt (§ 240), und stehn auf dem kleinen HalbMesser CG, CH, CI ꝛc. die zugleich HalbMesser des Kreises sind, (§ 21), senkrecht (§ 242).

Der neun und vierzigste Satz.

§ 248.

L. Das gleichseitige DreiEkk gehört unter die ordentlichen Figuren (§ 239), und die Beschreibung eines Kreises da hinein gehört also in die Auflösung des vorigen Satzes. (§ 247): Wie ist es aber mit ungleichseitigen DreiEkken ABD? Lässt sich auch in die ein Kreis beschreiben?



S. Ich glaube es nicht.

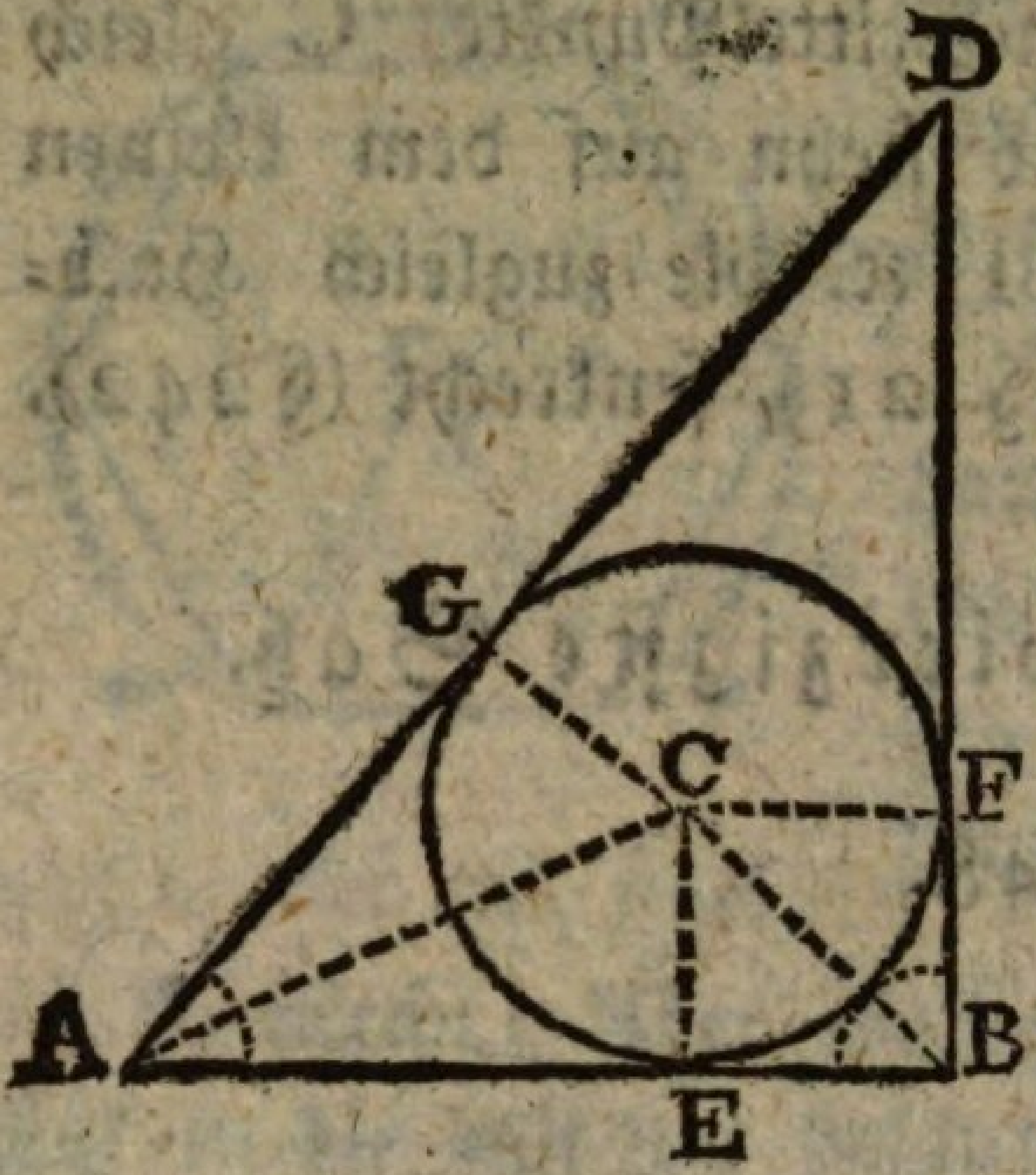
L. Wir wollen es wenigstens versuchen. — Was ist zuerst zu tuhn?

S. Den MittelPunkt zu suchen. — Ich halbe die Winkel A und B (§ 64) und ziehe die HalbungsLinien welche in C zusammen stossen (§ 109, 118).

L. Worauf kömt es nun weiter an?

S. Ob C von allen Seiten gleich weit entfernt ist.

L.



L. Recht! Und wie erfährt man das?

S. Ich ziehe von C auf alle Seiten senkrechte Linien CE, CF, CG, (§ 69), und untersuche, ob diese gleich lang sind.

L. Auch recht! Aber wie erfährt man das?

S. Durch Vergleichung der DreiEkke CAE und CAG, CBE, und CBF.

L. Zuerst also CAE und CAG.

S. Sie haben CA gemein.

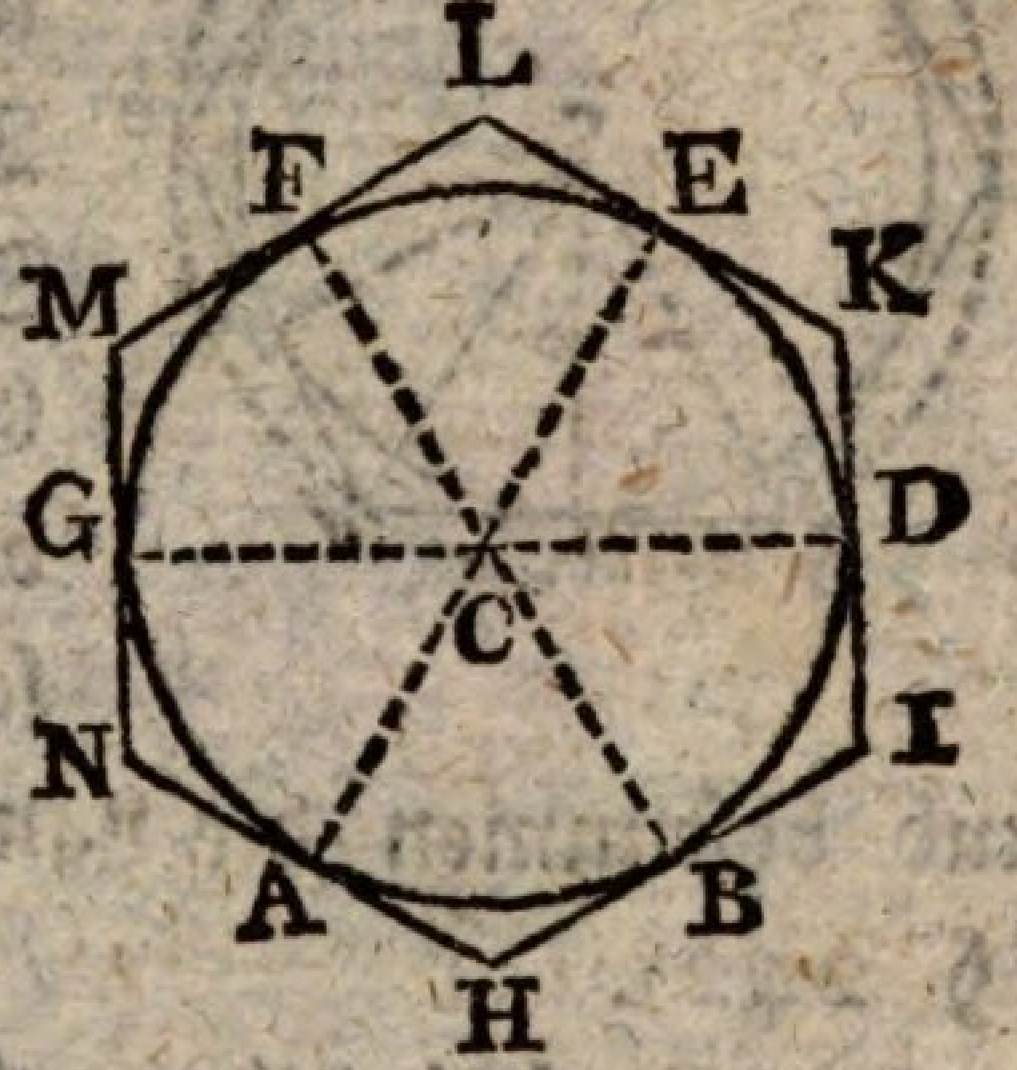
$$\angle CEA = \angle CGA \text{ (§ 49).}$$
$$\angle CAE = \angle CAG \text{ (Verf.)}$$
$$\triangle CAE \cong \triangle CAG \text{ (§ 95)}$$
$$CE = CG \text{ (§ 24).}$$

L. Recht! Und eben so wird bewiesen daß auch CE = CF. Alle Seiten des DreiEkks also stehn von C gleich weit ab, und es lässt sich folglich aus C, mit CE = CF = CG, ein Kreis beschreiben der von allen Seiten des DreiEkks gestreift wird (§ 193). Man nennt dieses einen Kreis in ein DreiEkk beschreiben. — Eine Kreislinie um ein DreiEkk zu beschreiben ist § 175 gelehrt.

Der funfzigste Saz.

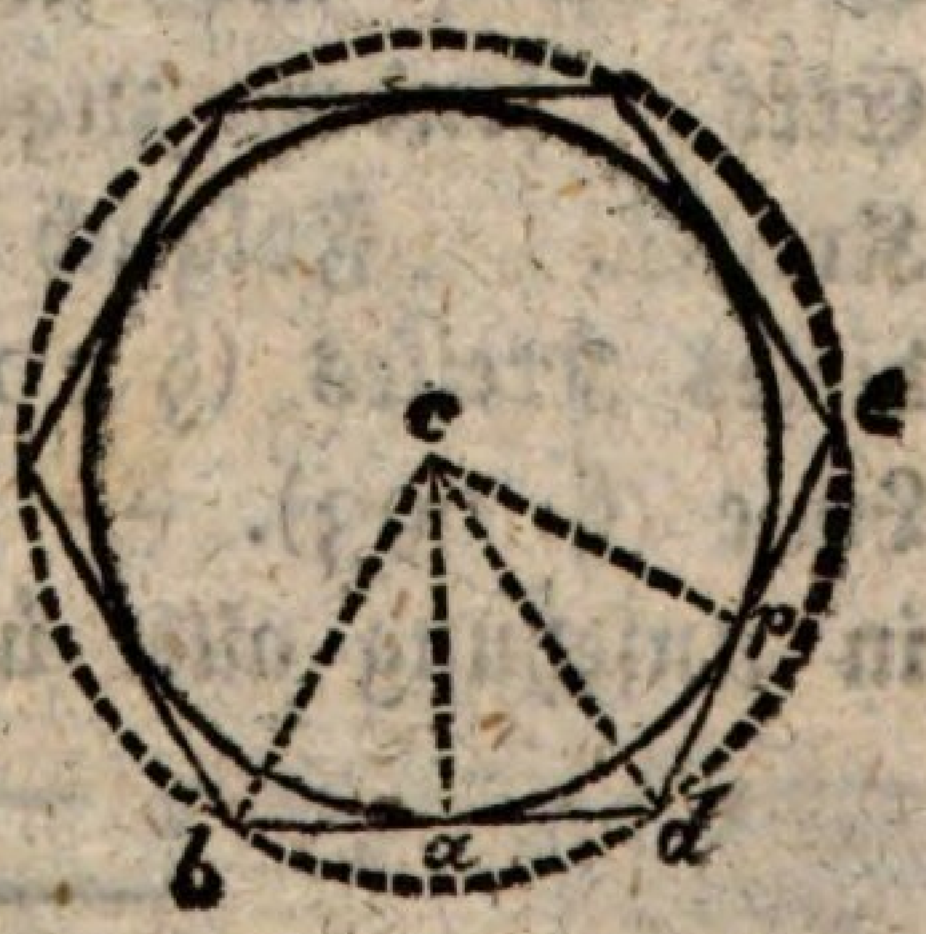
§ 249.

L. Nun ist noch übrig um den Kreis eine ordentliche Figur zu beschreiben; z. B. ein ordentliches SechsEkk?

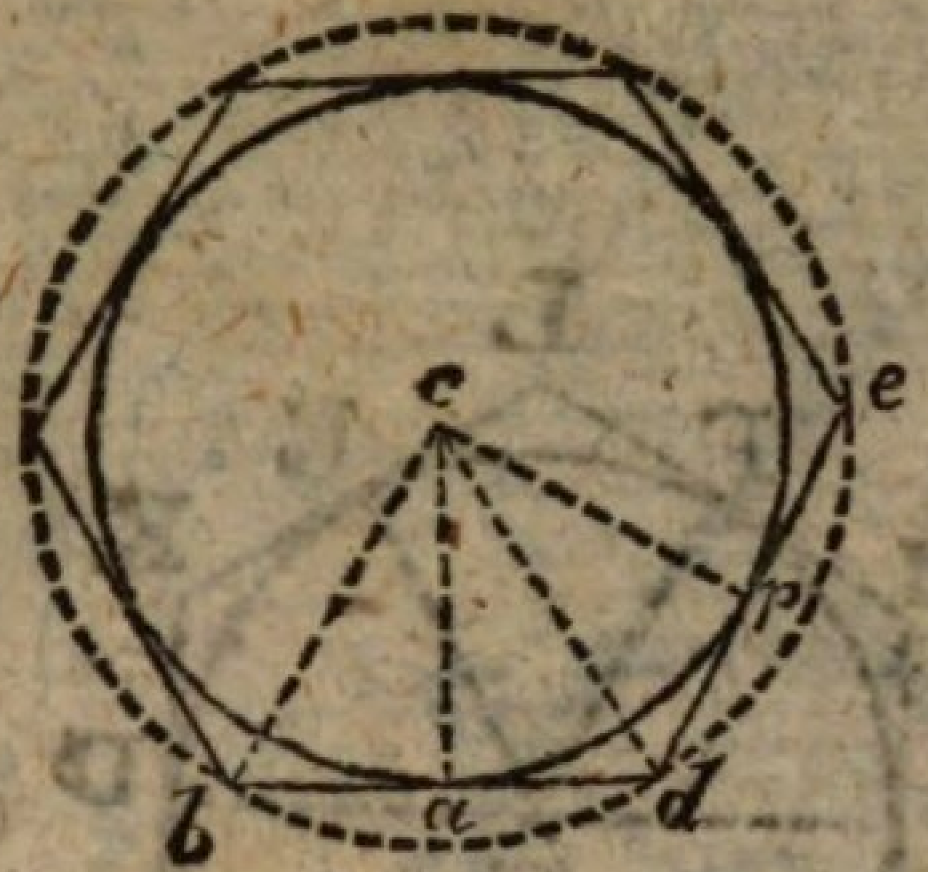


S. Ich teile den Umfang in so viel gleiche Teile als die Figur Seiten hat (§ 236), hier in sechse (§ 234); ziehe nach allen TeilungsPunkten HalbMesser, CA, CB, CD, CE, CF, CG, und errichte auf deren Enden StreifLinien, (§ 193) welche in H, I, K, L, M, N zusammen treffen, und die Seiten der Figur bilden.

L. Die Auflösung ist euklidisch und richtig: aber es muß bewiesen werden: 1) daß die StreifLinien notwendig sich schneiden: 2) daß sie lauter gleiche Winkel mit einander machen; und 3) daß sie alle gleich lang sind; welches weitläuftig und schwer ist. Wir wollen daher eine andere Auflösung suchen. — Es wird ein beliebiger HalbMesser ca gezogen, und auf ihm eine StreifLinie von unbestimmter Länge errichtet (§ 193). Diese soll die erste Seite der Figur abgeben. Wie werden wir die Länge bestimmen?



S. Man muß den MittelPunktsWinkel berechnen,



und auf beiden Seiten von ca die Hälfte desselben tragen. Hier beim SechsEkk ist er 60 Grad (§ 244). Trage ich nun auf jede Seite von ca, in c 30 Grad, (§ 220, 225); so sind die Schenkel cb, cd, die grossen HalbMesser des VielEkks und bestimmen die Länge einer Seite bd desselben (§ 242).

L. Recht! Aber wie nun weiter?

S. Ganz wie in § 245. Ich beschreibe mit dem grossen HalbMesser cb eine KreisLinie, und trage die gefundene Seite bd darum herum.

L. Das ordentliche VielEkk wird auf solche Art erhalten, daran ist kein Zweifel. Aber alle ihre Seiten sollen den Kreis streifen (§ 247). Von bd ist es aus der Verfertigung klar: aber wie beweis't man daß de eine StreifLinie ist?

S. Wenn ich auf de vom MittelPunkt eine senkrechte Linie CP ziehe, so ist diese ein kleiner HalbMesser (§ 242), und als solcher = ca (§ 243). Aber ca ist nicht nur kleiner HalbMesser des VielEkks, sondern zugleich HalbMesser des gegebenen Kreises. Folglich auch cp = ca HalbMesser eben dieses Kreises (§ 20, 21). Folglich de eine StreifLinie (§ 193). — Ein gleicher Beweis lässt sich in Ansehung aller übrigen Seiten der Figur führen.

Schreib- und Druckfehler.

Seite 4, Z. 18, steht können für Körper.
S. 9, Z. 14, steht es kan für kan es.
S. 12, Z. 3 von unten, steht bemerkt für benennt.
— — Z. 8 von unten steht Linie für Linien.
— 13, Z. 1, steht HL für H, L.
— — Z. 3, muß heissen: man drei Buchstaben.
— — Z. 11, steht QRO für QOR.
— 16, Z 17, steht Sie von einem in ihrer Mitte: für Sie ist von einem in der Mitte ꝛc.
— 17, Z 5, v. u. steht jeder für jedem.
— 19, Z. 3 v. u. lese man Linien O und P?
— 25, Z. 10 v. u. steht $a = a$ für $a = c$.
— 29, § 37, Z. 3, streiche man beide c weg.
— 30, Z. 3. v. u. steht $<$ für $>$.
— 31. Z. 3 v. u. steht — für $=$.
— 34, § 44, Z. 2, b für 6.
— — Z. 6, steht e für c.

Auch das neben § 44 stehenden Exempel ist so zu berichtigen:

a
ooo
ooo
$b = a$ $c = a$
ooo ooo
ooo ooo
$d = b - \frac{1}{2}a$ $e = c - \frac{1}{2}a$.
ooo ooo

S. 35, Z. 4, steht $b - a = c - a$ für $b - \frac{1}{2}a = c - \frac{1}{2}a$.

S.

S. 37, sind in der ersten Zeichnung die Buchstaben M und N verwechselt und in den Winkeln fehlen die Buchstaben t und v

— — Z. 8, steht § 50 für § 47.

— 39, § 50, Z. 1, steht stehn für stehe.

— — Z. 3, steht § 50 für § 47.

— — Z. 4 v. u. y 2∟ für y = 2 ∟

— 41, Z. 7, steht eines für eine.

— 47, Z. 9, steht A für AB.

— 49, Z. 7 v. u. steht von für in.

— — Z. 5. v. u. steht zwei Seiten für zwei einzelne Seiten.

— 56, § 58, lezte Z. steht 56 für § 49.

— 57, § 60, Z. 4, streiche man aber weg.

— 58, Z. 3 v. u. steht DB für DC.

— 61 fehlt über § 63 die UeberSchrift: Der fünfte Satz. Dieser Irtum hat Einfluß auf folgende UeberSchriften, bis zu Ende des ersten Buches.

— 67, Z. 15, wird Hälften das erste Mal weggestrichen.

— 72, l. Z. steht 46 für 47.

— 75, Z. 10, steht auf für in.

— — Z. 16, steht seine R. für ihre Richtung.

— 76, fehlt in der lezten Zeichnung, zwischen den Linien AB und EB, der Buchstabe z.

— — lezte Z. steht + für —

— 77, Z. 2, streiche man Denn ∟ + z weg.

— 79, § 74, Z. 2, steht er, sich auf für er sich auch auf.

— — lezte Zeile steht A für a.

— 80, Z. 1, steht epagogische für apagogische.

— Zwischen Z. 2 u. Z. 3 v. u. muß ein Strich gehn.

— 81, fehlt in der Zeichnung der Buchstabe F an der punktirten Linie.

— 83, § 77, Z. 6, steht 50 für 47.

— — Z. 5 v. u. steht 75 für 76.

— 85, Z. 2, v. u. steht 77 für 78.

— 86, Z. 13, 26, 28, steht 77 für 78.

— 17 u. 25 steht 75 für 76.

S.

S. 86, Z. 29, steht 78 für 79. bis hieher
— 87, Z. 6, v. u. u. steht 74 für 68.
— 88, Z. 8, steht 50 für 47.
— — Z. 11, ist § 47 auszustreichen.
— 89, Z. 6 und 8 v. u. steht 78 für 79.
— — Z. 10 v. u. steht CD für BCD.
— — = = = = = hinter Amt fehlt das Komma.
— 90, Z. 3, steht x für z.
— — Z. 9, = 78 = 79.
— 91, vorlezte Z. steht 81 für 82.
— 93, Z. 3, steht 80 für 81.
— — Z. 9, = 50, 52 für 47, 49.
— — Z. 10, = 78 = 79.
— — Z. 12, = 82 = 83.
— 94, Z. 11, = 13 = 12.
— 95, Z. 12 v. u. steht 82 für 83.
— 96, Z. 8. v. u. steht AC für AB.
— 97, Z. 3 v. u. = 85 = 86.
— 98, § 88, Z. 9 u. 10 steht $<$ für $>$
— — Z. 11 u. 16 = 86 = 87.
— — Z. 13 u. 17 = 87 = 88.
— 99 , Z. 1, steht BD u. CD für EB u. EC.
— — § 89, Z. 3 steht BD u. CD für BE u. CE.
— — Z. 9, steht Rest für Stoß, u. CE für CD.
— — Z. 13 u. 16. steht 78 für 79.
— 100, Z. 3, steht DB und DC für EB und EC.
— — § 90, 8 steht DreiEkke (§ 85) für dritte (§ 86).
— 103, § 92, Z. 6 steht ABC für BAC.
— — Z. 8 v. u. steht grossen für grössern.
— 104, Z. 14 fehlt (§ 41).
— — Z. 15 fehlt (§ 42).
— 105, Z. 4 steht AB für AC
und ADB + D für AD + BD.
— 106, Z. 6 streiche man ∠ weg.
— 109, l. Z. steht epag. für apagogisch.
— 112 , Z. 15 steht EH für BH.

S. 112, lezte Z. steht 29 für 30.
— 117, § 97 ist, aus Versehn, zwei Mal gezählt.
— — Z. 5 v. u. steht einen für einer.
— 125, Z. 5 steht § 75 für § 76. — (Dieser Verstoß kömt auch 136, ꝛc. vor).
— 128 fehlt die vorhergehende Zeichnung.
— — Z. 13 steht = für #
— 131, Z. 13 steht Asyreptote für Asymtote.
— 135, Z. 10 steht GegenWinkel für WechselWinkel.
— 139, Z. 7 steht § 112 für § 102.
— — Z. 9 ⸗ § 114 für § 104.
— — Z. 11 ⸗ § 114 ⸗ § 105.
— — Z. 22 ⸗ § 112 ⸗ § 102.
— 140, Z. 2 ⸗ § 118 ⸗ § 113.
An der Zeichnung fehlen die Buchstaben. An der obern Spitze des DreiEkks muß A stehn. Die übrigen Buchstaben sind nach dem Texte leicht zu ergänzen.
S 141, Z. 18 steht in für zu.
— 145, Z. 4 v. u. steht § 119 für § 118.
— 152, Z. 6 steht § 131 für 132.
— — Z. 6 v. u. steht § 63 für § 133.
— 154, Z. 11, steht A = a für C = c.
— — Z. 13 ⸗ — ⸗ +
— — Z. 18 ⸗ § 43 ⸗ § 44. (Dieser Fehler kömt auch S. 169 f. vor.)
— 155, § 137, Z. 1, steht § 135 für 136.
— 158, § 139, Z. 8 ist so zu berichtigen: Spitzen D, A, gehende Linie, oder die ꝛc.
— 160, Z. 12 u. 13 steht § 132 für 133.
— — Z. 15 ⸗ = y ⸗ = x.
— — Z. 18 fehlt hinter vorhin das Komma.
— — Z. 22 steht Parallelogrammen für Parallelogramme. (Dieser Fehler kömt mehr Mal vor.)
— 161, Z. 7, steht bB für bD.
— 163, Z. 3, steht BD für bD.
— 165, Z. 17 f. sind so zu berichtigen: Es scheint als ob er sie nicht für so überzeugend hielte.

S.

S. 169, Z. 8 v. u. ſteht x für y.
— — Z. 4 v. u. = 141 = § 142.
— 170)
— 171) fehlt an den Zeichnungen die Linie AD.
— 172, fehlt an der zweiten Zeichnung die Linie AG.
— 173, lezte Z. ſteht § 43 für § 27.
— 174, § 149, Z. 7, ſteht wie für wird.
— 176, Z. 2, ſteht § 149 für § 150.
— 177, Z. 1, ſteht G für GHIK.
— — § 152, Z. 4 ſteht 135 für 136.
— 178, Z. 9, gehört hinter groß ein Punkt.
— 179, Z. 11 u. 28 ſteht § 151 für 152.
— — Z. 21 iſt hinzuzufügen: bis: „Von a durch k eine L. welche die Verl. ſchneidet in d.“
— 181 fehlt bei § 155 die Zeichnung, welche jedoch aus dem Texte leicht anzugeben iſt.
— — Z. 10 ſteht § 152 für § 153.
— — Z. 16, muß hinter Art ein Punkt ſtehn.
— — Z. 2 v. u. ſteht DCG für DCI.
— 182 Z. 16 = ∠∠ = ∠I.
— — Z. 19, 20 = § 30 = § 130.
— 183, Z. 4 v. u. = in = in ein.
— 184, Z. 8 = ihre = die.
— — Z. 14 fehlt hinter gleich die Citation § 137.
— 189, Z. 2, gehört hinter vergleichen ein Punkt.
— — Z. 6 ſteht RA für BA.
— — hinter Z. 12 iſt einzuſchieben: $\frac{1}{2}m = \frac{1}{2}M$. (§ 44).
— — Z. 5 von u. iſt hinter betragen einzuſchieben: § 75.
— 190, iſt in der Zeichnung ∠ECB mit t, ∠BCA mit v, ∠ACK mit s zu bemerken.
— — Z. 5 ſteht AC für AL.
— 191, Z. 4 = § 54 = § 56.
— 192, Z. 13, ſteht einen für einer.
— 195, § 164, Z. 9, gehört hinter beſtimmte ein Punkt.
— — Z. 13 ſteht AC für AB.

S.

S. 196, Z. 11 f. so zu berichtigen: **überdis die den bekanten Winkeln gegenüber stehenden Seiten länger** ꝛc.

— 197, Z. 2. ist so zu berichtigen: „**wollen wir auf CB eine senkrechte Linie BD, so lang als BA errichten (§ 68), und DE ziehn.**"

— — Z. 5 steht § 137 für § 120.

— 203, Z. 4 = § 168 = § 166.

— 206, Z. 7 = = GDA = = GDB.

T. III. Vorrede S. vi, Z. 16 f. ist so zu berichtigen: „Alembert, Kästnern, und Lorenzen." das nun folgende dieses Abschnitts fällt ganz weg.

Winterfeld, Moritz Adolph <<von>>,

Anfangsgründe der Mathematik zum Gebrauch in Schulen und für Selbstlehrlinge

Bd.: 1

Braunschweig 1800

Math.u. 212 m-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594362-4
VD18 80065570-001